
研究展望

Review

研究展望

三次元支持力理論の展望

SOME RECENT RESEARCH ON THE BEARING CAPACITY OF CIRCULAR AND RECTANGULAR FOUNDATIONS

山口 柏樹*

By Hakuju YAMAGUCHI

1. はじめに

地盤の支持力評価は帯基礎について歴史的にも古くから研究されており、数学・力学的にみる限り二次元支持力問題は一応完成の域に達したと思われる。しかし土質力学として終わったわけではなく、進行性破壊やせん断抵抗角の応力あるいはせん断試験法への依存性^{1)~3)}など完全な解決を得るに至っていない問題がある。直方形基礎や円形基礎のような三次元支持力論においては、数学的困難さが付け加わるため問題はさらに複雑となる。したがって三次元支持力を理論的に無欠の形で取り扱うことは一般に難しく、またそれに固執することは実際問題の解決に資することにはならない⁴⁾。本文で三次元支持力の理論概要を展望、紹介するにあたり理論解析の面以外にも言及するのは如上の理由によるのである。

2. 極限解析による三次元支持力解析

(1) 上・下界定理⁵⁾

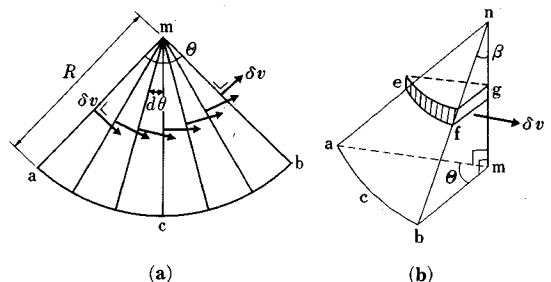
上界定理：「速度の境界条件を満たす速度場（可容速度場）が見出されると、この場に伴う外力仕事率と塑性仕事率（内部消散率）を等値して得られる外力は崩壊荷重を下回らない」。この外力の下ですでに崩壊を示す速度場が生じていることから定理の正しいことは明らかである。

下界定理：「力の境界条件を満たし、つり合い方程式と破壊条件を破らない応力場（可容応力場）が見出され

れば、その境界外力は崩壊荷重を上回らない」。この力の下ではまだ崩壊が起きていないことから定理が理解される。

単位体積当たりの仕事消散率 \dot{w} は平面ひずみ条件下で $\dot{w} = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3$ だが $\phi_u = 0$ 条件下で非排水 ($\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3 = 0$) なら $\dot{w} = (\sigma_1 - \sigma_3) \dot{\epsilon}_1$ となる。 $\sigma_1 - \sigma_3 = 2c_u$ (c_u は非排水せん断強さ) なので [1] $\dot{w} = 2c_u \dot{\epsilon}_1$ が成り立つ。2つの剛体部分が境界で不連続速度 δv をもてば境界線はすべり面であって $\tau = c_u$ となり、力 $\tau \Delta S$ (ΔS はすべり面上の面積要素) のなす仕事率 $\tau \Delta S \cdot \delta v$ が消散率を表わす。すなわち [2] $\dot{w}_s = c_u \delta v \Delta S$ である。

図一(a) は $\phi_u = 0$ 材の二次元速度場で、頂角 θ の円弧 acb と半径が共役すべり線である。微小三角形が辺に垂直に δv の速度をもつとき、各半径を介して隣接するブロックは $\delta v d\theta$ の不連続速度をもつので、奥行1の円形部分についての全消散率を [2] で計算すると $c_u \delta v \cdot R \theta$ で、これはすべり線 acb に沿っての消散率に等しい。すなわち [3] $\dot{W}(\text{内}) = \dot{W}(\text{周}) = c_u \delta v \cdot R \cdot \theta$ が得られる。しかし三次元問題では多少異なることを注意しよう。(b) 図は mn を軸とする円錐 $macbn$ (円錐



図一 扇形、円錐のキースケッチ

* 正会員 工博 東京電機大学教授 (東京工業大学名誉教授)
(〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

Keywords: bearing capacity, three dimensional, undrained failure, general factor of bearing capacity, limit analysis

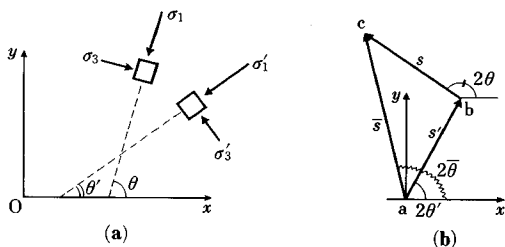


図-2 2つの応力系と合成

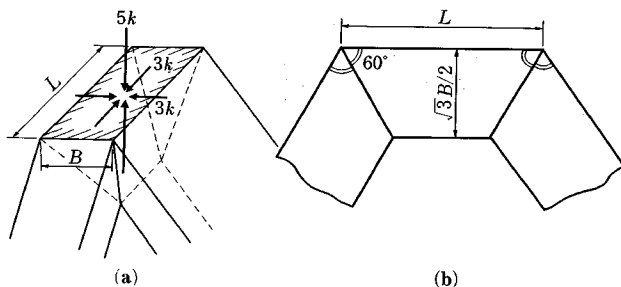


図-4 長方形基礎下の可容応力場

表面積 A_c 、半頂角 β を示すが面 man, mnb はいずれも垂直方向に δv の速度をもつとすると \dot{W} (内) は側面積の鉛直投影面積により計算する必要があり [4] \dot{W} (内) $= c_u \delta v \cdot S_c \cos \beta$, [5] \dot{W} (周) $= c_u \delta v \cdot S_c$ となる。

以上述べた上界定理に関する基本性質は $\phi_u = 0$ 材に関するもので、 ϕ 材については以下の記述に関係しないため説明を省略した。この場合の詳細は文献⁵⁾に譲る。

下界定理を適用するとき、外力境界条件を満たすいくつかの単純な応力場を重ねる手法がとられる。得られた複数の応力場のいずれの部分でも破壊条件を破らないよう調節する(このことが案外難しい) 必要があり、その際次の性質が有用である。図-2(a) に示す 2 組の応力系 $(\sigma_1, \sigma_3, \theta)$, $(\sigma'_1, \sigma'_3, \theta')$ の重ね合わせを行った結果を $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3, \bar{\theta})$ とすると [6] $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_3 = p + p' \pm \sqrt{s^2 + s'^2 + 2ss' \cos 2(\theta - \theta')}$, ただし $p = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, $p' = (\sigma'_1 + \sigma'_3)/2$, $s = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, $s' = (\sigma'_1 - \sigma'_3)/2$, [7] $\tan 2\bar{\theta} = (s \sin 2\theta + s' \sin 2\theta') / (s \cos 2\theta + s' \cos 2\theta')$, が示される。これより $\bar{\sigma}$ は (b) 図に示すような 2 ベクトル \vec{ab} , \vec{bc} の和のベクトル \vec{ac} によって表わされることが知られる。

(2) 半無限粘土地盤上の長方形基礎の支持力

a) 下 界 値

図-3 は帯基礎に対する可容応力場の一例⁶⁾である。これは水平と 60° の傾きをなす 2 つの脚 fabg, kabh と鉛直脚 labm 内に一軸圧力 $2k$ (以後 c_u の代わりに k を用いる) が働き、地盤内には水平方向に $2k$ の圧力を

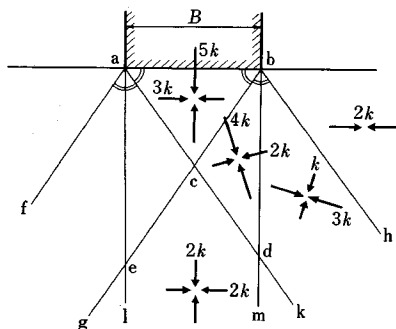


図-3 帯基礎下の可容応力場

加えたものである。[6], [7] によって合成応力を求めたものを図中に示すが、どの部分でも破壊条件 $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$ を破らない。ゆえに $\triangle abc$ 内に生ずる鉛直応力 $5k$ は支持力の下界となる。

図-4(a) は直方形基礎への拡張であって、傾角 60° で四辺から出る脚(短辺による切口は図-3と同じで長辺による切口は(b)図に示される)と周辺を通る鉛直脚内に一軸圧力 $2k$ を働かせ、水平方向に等方圧力 $2k$ を加える。その結果、基礎下の逆屋根部内には鉛直に $5k$, 水平に $3k, 3k$ の等方圧が生じ、各部分の応力は破壊条件を破らないことが確かめられる。これより帯基礎と同じ下界値 $5k$ を得る。

基礎形状が凸形をしていれば各辺から出る脚は放射状に広がり、各脚は空間的に交差することがないので、各脚の一軸圧力 $2k$ の合成は基礎下でやはり $5k, 3k, 3k$ の成分を与える。円基礎は凸多角形の極限であるので円基礎の下界値も $5k$ である。

以上の議論は土被り γD があるときにも拡張できる。地盤表面に一樣圧力 γD を与えると、これとつり合うためには地盤内に等方圧力 γD を考えればよく、この等方圧は破壊に何の影響も及ぼさないからである。ゆえに支持力の下界値として

$$q'_s = 5k + \gamma D \quad (\text{円, 長方形とも}) \dots\dots\dots (1)$$

b) 上 界 値

長方形基礎について Hill の塑性場に相当する可容速

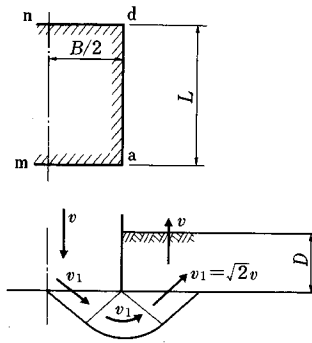


図-5 直方形基礎下の可容速度場

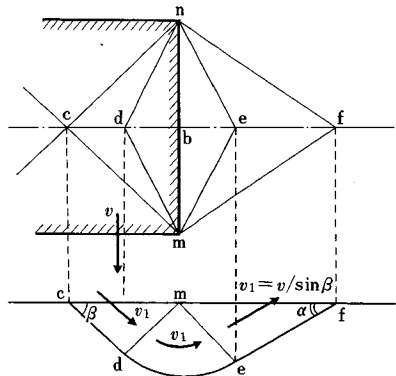


図-6 方形基礎下の可容速度場

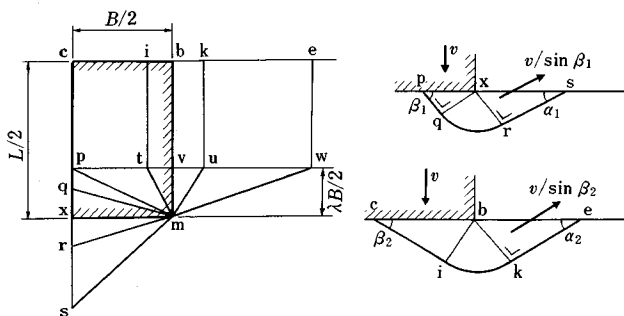


図-7 直方形基礎下の可容速度場 (図-5の改良)

度場 (図-5) を考える⁵⁾。基礎の速度を v とすると塑性場は $v\sqrt{2}$ ，根入の上昇速度は v である。底面，両側面，根入周辺壁での消散率は [2]，[3] で求められる。基礎が粗いとすると $q_y^* \tan \delta \cdot v \cdot BL$ (δ は粗さ角) の消散率が加わり，これらと外力仕事率 $q_y^* BL \cdot v - \gamma BLD \cdot v$ を等値して

$$q_y^* = \frac{k}{1 - \tan \delta} \left(5.14 + 1.26 \frac{B}{L} + 4 \frac{D^2}{BL} + \frac{\gamma D}{c} \right) \dots (2)$$

が知られる。これは Tschebotarioff⁷⁾ の解より小さい。しかし Shield ら⁶⁾ はより小さい上界値を求めている。方形基礎の速度場の平面図と中心を通る断面図は図-6 のようである。ここで mde 部分は mb を軸とする円錐で，半頂角を θ とすると $\sec \theta = \sqrt{1 + \sin^2 \beta}$ である。基礎の押し込み速度 v に対し塑性域の速度は $v/\sin \beta$ である。円錐面の周面と内部の消散率は [4]，[5] で求められる，他の平面すべり面上の消散率を [2] で評価すれば外力仕事率と等値した結果：

$$q_y^* = k \left[\alpha + \beta + (\alpha + \beta + \cot \alpha + \cot \beta) \sqrt{1 + \sin^2 \beta} \right] \dots (3)$$

となる。 $\partial q_y^* / \partial \alpha = \partial q_y^* / \partial \beta = 0$ から $\alpha = 47^\circ$ ， $\beta = 34^\circ$ となり (3) で $q_y^* = 5.80 k$ が得られる。この考え方を長方形基礎に拡張したものが図-7 ($B/2$ ， $L/2$ の4分域について示す) である。 λ ， α_1 ， α_2 ， β_1 ， β_2 を変えて q_y^* の最小値を計算した結果は

$$\left. \begin{aligned} q_y^* &= k(5.24 + 0.47 B/L) & 1 \geq B/L \geq 0.53 \\ q_y^* &= k(5.14 + 0.66 B/L) & 0.53 > B/L \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

ただし上式における $\lambda = 0.7071$ ， $\alpha_1 = 46^\circ 17'$ ， $\beta_1 = 39^\circ$ ， $\alpha_2 = 47^\circ 4'$ ， $\beta_2 = 34^\circ$ ， 下式の場合は $\lambda = 0.7071$ ， $\alpha_1 = 46^\circ 17'$ ， $\beta_1 = 39^\circ$ ， $\alpha_2 = \beta_2 = 45^\circ$ である。

(3) 有限粘土層上の方形基礎⁸⁾

a) 下界値

厚さ H の粘土層が堅い層上にある場合，帯基礎の可容応力場を図-8(a) に示す。af から右の部分は図-3 と全く同じで，このため af の左側では $5k$ ， $3k$ の応力

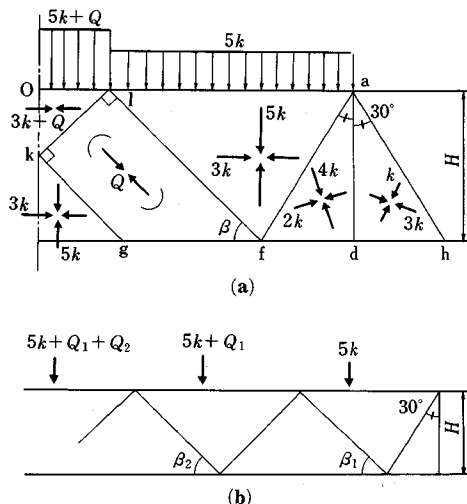


図-8 有限土層帯基礎下の可容応力場

場が出る。この部分をさらに改良するため傾角 β の脚 lfgk を考え，その中に大きさ Q の一軸圧縮を与える。上述の応力系と Q との合成値を [7] により計算すると $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2) / 2 = |s^2 + s'^2 + 2ss' \cos 2(\theta - \theta')|^{1/2}$ (ただし $s = k$ ， $s' = Q/2$ ， $\theta = 90^\circ$ ， $\theta' = 180^\circ - \beta$) である。 $\bar{\sigma} = k$ のためには $Q = 4k \cos 2\beta$ でなければならない。このとき Δlok 内の合成応力は $5k + Q$ ， $3k + Q$ となるから帯基礎下の垂直圧分布は (a) 図に示すようになり，その平均をとると下界値として

$$q_y^* = k [5 + 4 \cos 2\beta \{ 1 - 2H (\tan 30^\circ + \cot \beta) / B \}] \dots (5)$$

$Q > 0$ のためには $\cos 2\beta > 0$ または $\beta < 45^\circ$ である。このとき $\cot \beta > 1$ だから式 (5) の $\{ \}$ が正であるため $B/H > 3.154$ を必要とする。しかし $B/H > 約 8$ では2つ以上の脚が存在し得る ((b) 図参照)。 $B/H < 3.154$ では脚を考えず $q_y^* = 5k$ である。

図-9 に方形基礎における可容応力場を示す。(a) 図は中心線で切った断面図，(b) 図は4分域の平面図，(c)

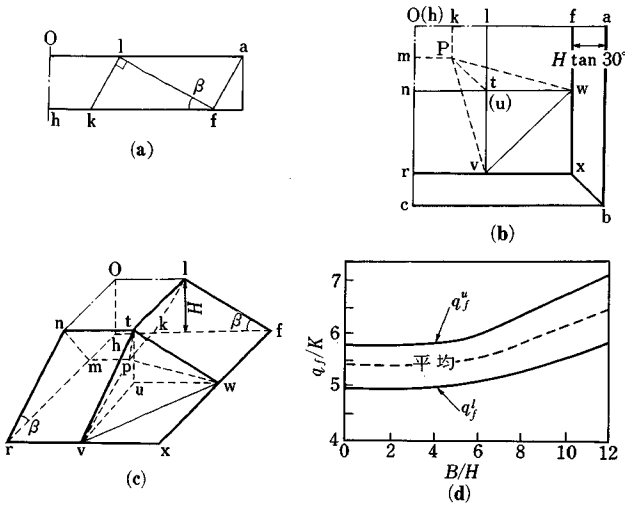


図-9 有限土層方形基礎下の可容応力場

図は同じく鳥瞰図である。脚 flk に二次元同様 $Q=4k \cos 2\beta$ を与えると $5k, 3k$ の応力係と合成した結果、主応力 $\sigma_3=3k+2k \cos 2\beta$ が出るので三次元的に破壊条件を破らないため lt 方向に同じ σ_3 を加えねばならない。このことを念頭において (i) 2つの脚 $lftw, trvpm$ 内に lt, nt に平行な圧縮 $Q=2k \cos 2\beta$ を与える、(ii) 三角錐 $twvp$ 内に tw, tv に平方な応力 S を考えると面 twv は応力の自由面となる。面 tpw で S と Q による垂直応力、せん断応力は連続せねばならず、これより $S=Q \sec^2 \beta / (1 + \sec^2 \beta)$ と決まる、と同時に面 twp, tvp 上の鉛直プリズム内に鉛直方向の圧縮 $T=Q \sec^2 \beta$ を加えねばならぬことがわかる。(iii) 前記2つの脚内 lf, nr 方向の一軸圧縮 $4k \cos 2\beta$ を与える(つり合い、 $lont$ を底とする台形域内に同じ等方圧を加えねばならぬ)。(iv) $hfwvr$ を底とする鉛直柱の側面に水平方向の水圧 $3k$ を与える。(v) $hfwvpr$ 上のプリズム内に鉛直圧縮 $5k$ を、 $pwuv$ 上のプリズム内には鉛直圧縮 $5k-T$ を加える。(vi) uvw 上のプリズムで破壊条件を破らぬため、この中に鉛直圧縮

$$R(\beta) = k \left[3 + 2 \left\{ 1 - \frac{2 \cos^2 2\beta \sin^2 2\beta}{(1 + \sin^2 \beta)^2 \cos^4 \beta} \right\}^{1/2} + \frac{2 \cos 2\beta (\cos 2\beta - \sin^2 \beta)}{(1 + \sin^2 \beta) \cos^2 \beta} \right] \dots \dots \dots (6)$$

を加えればよい。 $\beta < 25^\circ$ で $R(\beta) > 5k$ となるので $5k$ とする。

以上 (i)~(vi) の作る応力場は可容で基礎面中 $oltn$ で $5k+4k \cos 2\beta$, uvw で $R(\beta)$, 残りの部分で $5k$ の垂直応力が働くので平均した結果

$$q_j^u = 5k + 4k \cos 2\beta \left[1 - 2 \frac{H}{B} (\tan 30^\circ + \cot \beta) \right]^2$$

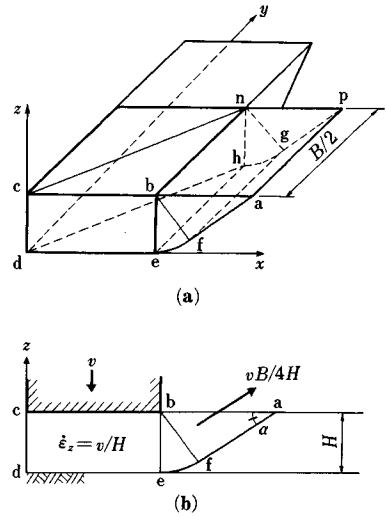


図-10 有限土層上方形基礎下の可容速度場

$-2 \left(\frac{H}{B} \right)^2 \cot^2 \beta \left[5k - R(\beta) \right] \dots \dots \dots (7)$ を得る。帯基礎と同様 $\beta < 45^\circ$, $B/H > 3.154$ で (7) が使える。(d) 図は (7) の最大値を求めた結果であって $B/H < 3.154$ では $q_j^l = 5k$ である。

b) 上界値

図-10 には方形基礎の4分域の可容速度場を示し、(a) 図は鳥瞰図、(b) 図は断面図である。ただし $B/H > 約 4.5$ である。8分域 cbn 下の域は一軸圧縮状態で $\dot{\epsilon}_z = v/H$, 他方非圧縮条件から $\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_y = -\dot{\epsilon}_z/2 = -v/2H$ 。よって単位体積内の消散率 $\dot{w} = \sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \sigma_z \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_z (\sigma_x - \sigma_y) = 2kv/H$ となり $\dot{W}(cbn) = \dot{w} \times 容積 = kB^2v/4$ 。次に底面 deh での不連続速度 $\delta v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = ((\dot{\epsilon}_x \cdot x)^2 + (\dot{\epsilon}_y \cdot y)^2)^{1/2} = v(x^2 + y^2)^{1/2}/2H$ ゆえ $\dot{W}(deh) = k \int \delta v dS = (cv/2H) \int_0^{B/2} \int_0^{B/2} (x^2 + y^2)^{1/2} dx dy = 0.192 cvB^3/8H$ 。また $behn$ 上で $\delta v = ((\dot{\epsilon}_z z)^2 + (\dot{\epsilon}_y y)^2)^{1/2} = v(y^2 + 4z^2)^{1/2}/2H$ だから $k\delta v$ を $behn$ 内で積分すれば $\dot{W}(behn)$ が知られる。円弧 ef 上の δv は e 点の x 方向速度 $\dot{\epsilon}_x \cdot B/2 = vB/4H$ に等しい。この δv は扇形側面 bef , Δabf 上の不連続値でもあるので [2] により消散率が知られる。これら全消散率を $vq_j^u B^2/8$ に等値すれば

$$q_j^u = k \left[2 + \alpha + \left(1 + \frac{H}{B} \right) (\alpha + \cot \alpha) + 0.192 \frac{B}{H} + \frac{1}{3} \left(1 + 16 \frac{H^2}{B^2} \right)^{1/2} + \frac{B}{24H} \cdot \ln \left[\frac{4H}{B} + \left(1 + 16 \frac{H^2}{B^2} \right)^{1/2} \right] + \frac{8H^2}{3B^2} \cdot \ln \left[\frac{B}{4H} + \left(1 + \frac{B^2}{16H^2} \right)^{1/2} \right] \right] \dots \dots \dots (8)$$

を得る。(8) は $\sin \alpha = (B+H)^{1/2}/(2B+H)^{1/2}$ で最小値をとる。 $B \gg H$ では $\alpha = 45^\circ$ となるので (8) は

$$q'_z = k(5.07 + 0.192 B/H) \quad (B \gg H) \dots\dots\dots (9)$$

この結果は図-9(d) に示してある。

(4) 有限粘土層上の円形基礎⁸⁾

a) 下界値

円基礎の可容応力場を求めるためには帯基礎の可容応力場として前に示した図-8を少し修正して出発しなければならない。図-11(a) がそれであって脚 flk を二等辺三角形とし、lf 方向に $Q=2k$ の圧縮を考えている。この応力と $5k, 3k$ を重ねると破壊条件が破られるから fg の左側は $3k, 3k$ の等方圧縮としなければならない。Q とつり合うため lohk 内には鉛直に $\sigma_1=2k(1+\cos\beta)$ 、水平に $\sigma_3=2k\cos\beta$ が生じ、等方圧 $3k$ を加えて基礎圧力 $5k+2k\cos\beta$ が得られる。

以上の帯基礎応力場を軸対称応力場に適用すると脚部の平面図は (b) 図の長方形 lff'f' となり、この中には等方圧 (周圧も含め) $3k$ が働く。しかし 2つの脚に挟まれた三角形 l'f'f' 上の鉛直プリズムには鉛直圧縮 $2k$ を加えても $5k, 3k, 3k$ の主応力状態にあり破壊条件を破らない。基礎下の鉛直応力の値は (b) 図に示すごとくである。 $\beta=45^\circ$ として平均圧力を計算すれば、

$$q'_z = k \left(2.72 + 0.166 \frac{B}{H} + 6.1 \frac{H}{B} - 1.76 \frac{H^2}{B^2} \right) \dots\dots\dots (10)$$

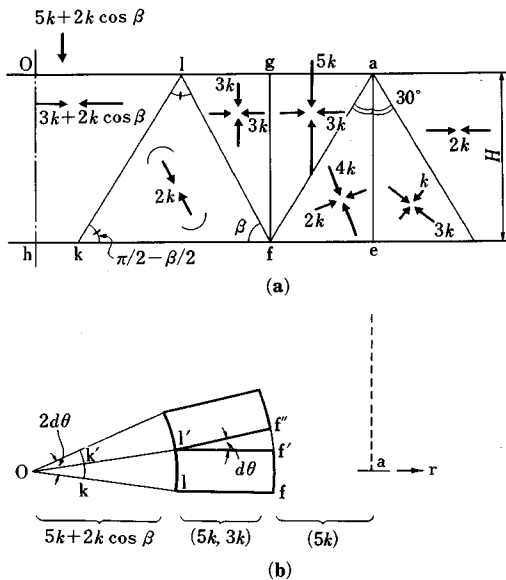


図-11 有限土層帯基礎下の別な可容応力場と円基礎への適用

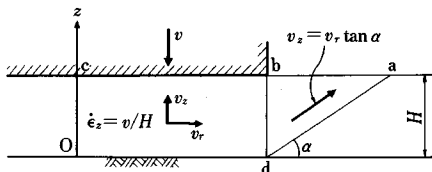


図-12 有限土層の円基礎の可容速度場

上式は $B/H > 3.154$ で使えるが、もっと大きい B/H に対しては頂角 45° の二等辺三角形を繰り返して考えることができる。その数を n とすると q'_z は式 (10) の B/H の代わりに $3.154 + 2.828n$ として与えられる。

b) 上界値

摺鉢状の可容速度場 (図-12) が考えられる。(3) b) と同様に $\dot{\epsilon}_z = v/H, \dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\theta = -v/2H$ で、対応する速度成分は $v_z = zv/H, v_r = rv/2H$ となる。abcd 内で $\dot{w} = \dot{\epsilon}_z \sigma_z + \dot{\epsilon}_r \sigma_r + \dot{\epsilon}_\theta \sigma_\theta = (\sigma_z - \sigma_r) v/H = 2kv/H$ (ただし $\sigma_\theta = \sigma_r$ とする) ゆえに $\dot{W} = kv\pi B^2/2$ である。周外部 abd で $v_r = A/r, v_z = v_r \tan \alpha = A \tan \alpha / r$ (A は定数) は非圧縮条件 $\partial v_r / \partial r + v_r / r + \partial v_z / \partial z = 0$ を満たす。bd 上で上の v_r が内部の $v_r (r=B/2) = vB/4H$ に等しいことから $A = vB^2/8H$ である。以上の速度成分から最大主ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_1$ を計算すると $\dot{\epsilon}_1 = vB^2(1+\sec \alpha)/16Hr^2$ となる。したがって [1] より $\dot{W}(abd) = 2k \int \dot{\epsilon}_1 dV$ (dV は周外環状域の体積素) で消散率が求まる。bd 上では $\delta v = zv/H + vB \tan \alpha / 4H$ 、底面で $\delta v = vr/2H$ 、斜面 ad 上で $\delta v = (v_z^2 + v_r^2)^{1/2} = v_r \sec \alpha = vB^2 \sec \alpha / 8Hr$ であるから [2] によって消散率が知られる。結局

$$q'_z(\alpha) = k \left[2 + \frac{2H}{B} + \frac{B}{6H} + \operatorname{cosec} \alpha \cdot \sec \alpha + \tan \alpha + (1 + \sec \alpha) \left\{ \left(1 + \frac{B}{2H} \tan \alpha \right) \cdot \ln \left(1 + \frac{2H}{B} \tan \alpha \right) - 1 \right\} \right] \dots\dots\dots (11)$$

となる。 $B \gg H$ では H/B の項を無視すると $\alpha = 36^\circ 16'$ で最小値をとるので

$$q'_z = k(4.83 + 0.166 B/H) \dots\dots\dots (12)$$

(5) 正規圧密粘土地盤上の方形基礎

a) 上界値

鵜飼⁹⁾は $k(z) = k_0 + k_1 z$ のように非排水せん断強さが深さに比例して増加する正規圧密粘土地盤の支持力を上界法で求めた。方形基礎は滑らかなときは Shield に

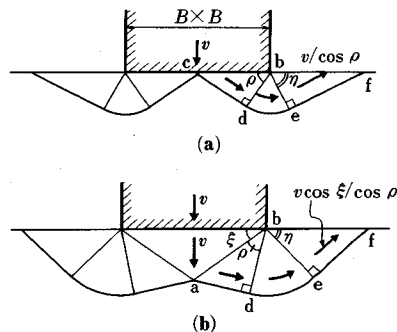


図-13 不均一地盤上の方形基礎の可容速度場 (粗・滑のケース)

做って図-13(a)を、また粗い場合として (b) 図の可容速度場を仮定している。消散率の計算を行うと滑らかな場合に

$$q_r = k_0 [\pi - \rho - \eta + (1 + \cos^2 \rho)^{1/2} (\pi - \rho - \eta + \tan \rho + \tan \eta)] + k_1 B [\cos \rho (\cos \rho + \cos \eta) + (1 + \cos^2 \rho)^{1/2} \cdot \sin^2 \rho + \cos \rho \tan \eta \sin \eta + 2 \cos \rho (\cos \rho + \cos \eta)] \dots (13)$$

ρ, η を変え q_r の最小値を求めればよく、(b) 図についても同様に計算して結果を

$$q_r^s = (5.14 + k_1 B / 4 k_0) \mu_s, \quad q_r^r = (5.14 + k_1 B / 4 k_0) \mu_r \dots (14)$$

の形に表わした。 μ_s は滑らか、 μ_r は粗い場合の係数である。下表にそれを示すが、実地盤では $k_1 B / k_0 = 0.2 \sim 30$ くらいである¹⁰⁾。

表-1

$k_1 B / k_0$	0	1	2	4	8	16	25	50
μ_s	1.13	1.18	1.22	1.27	1.31	1.33	1.31	1.24
μ_r	1.27	1.40	1.50	1.62	1.72	1.76	1.74	1.62

均一地盤 ($k_1=0$) では $q_r^s=5.8k$ (滑らか)、 $6.5k$ (粗) となり、 $k_0=0$ なら (13) は $q_r=k_1 B []$ の形となり、 $q_r^s=k_1 B/6$ (粗の場合でも同じである) となる。

b) 下界値

均一地盤の下界値は $q_r^s=5k$ であった (式 (1) 参照)。これは基礎の粗、滑に関しない。鵜飼は $k_0=0$ の場合に可容応力場を調べ $q_r^s=k_1 B/6$ を得ている。したがって、この値は正解であることがわかる。

(6) 正規圧密粘土地盤上の長方形基礎

鵜飼⁹⁾は長方形基礎についても (5) と同様な計算を行っている。基礎が滑らかであれば Shield の可容速度場 (図-7) と同様なものを用い、粗い場合は図-14 ((a) 図は長辺に直角、(b) 図は短辺に直角な断面図で $2C \tan \xi' = B \tan \xi$ の関係がある) としている。 ξ, ρ, η は帯基礎としての q_r を最小ならしめるように定め、 ξ', ρ', η' のみ変えて計算した。結果を

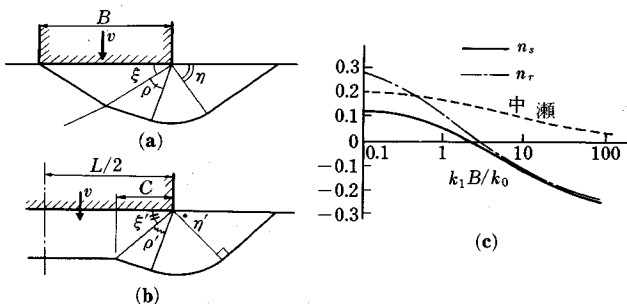


図-14 不均一地盤上の長方形基礎の可容速度場 (粗・滑のケース)

$$q_r^s = q_{s2}^s (1 + n_s B/L), \quad q_r^r = q_{r2}^r (1 + n_r B/L) \dots (15)$$

の形に表わすと n_s (滑らか)、 n_r (粗) の値は (c) 図のようになる。ここに q_{s2}^s, q_{r2}^r は帯基礎として求めた最小上界値である。また粗、滑にかかわらず $k_0=0$ のとき $q_r^s=k_1 B (1-B/3L)/4$ となるが、これは正解でもある。

一方、中瀬¹⁰⁾は三次元支持力係数を $N_c = N_{c2} (1 + n' B/L)$ の形で与えた。 N_{c2} は Davis ら¹¹⁾が帯基礎に対して剛塑性解析で求めた厳密解であり、 n' は直方基礎に対して円弧すべり計算を行って求めた係数を補正したもので式 (15) の n_s, n_r に対応するものである ((c) 図の点線で示す)。ここに述べた n は形状係数といわれるもので 4. において別の角度から論及することとした。

3. 剛塑性解析

(1) 軸対称載荷問題の静定化

円形基礎では図-15 の円筒座標で応力平衡式をかくと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \gamma \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

rz 面内の主応力を σ_1, σ_3 とすると周応力 σ_ϕ は中間主応力で $\sigma_1 > \sigma_\phi \geq \sigma_3$ である。 σ_1 の方向が r 軸となす面を θ とすれば、 $\sigma_r = p + s \cos 2\theta, \sigma_z = p - s \cos 2\theta, \tau_{rz} = s \sin 2\theta$ ($2p = \sigma_1 + \sigma_3, 2s = \sigma_1 - \sigma_3$) である。ここでたとえば σ_1, σ_3 に関してクーロン・モールの破壊条件式: $s = c \cos \phi + p \sin \phi$ (CM と記す) を考えると $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$ は s, θ の二変数で表わせるから、 σ_ϕ の値を適当に設定 ($\sigma_\phi = \sigma_3 = p - s$ とするものを Haar-Karman の仮定-HK 仮定とよばれる) すれば応力に関する未知量は s, θ の 2 個に帰着し、つり合い方程式 (16) だけで解を求めることができる。このような静定化は HK 仮定でなくてもよく $b = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ を指定しても差し支えない。それは $\sigma_\phi = \sigma_2 = \sigma_3 + b (\sigma_1 - \sigma_3) = p + (b$

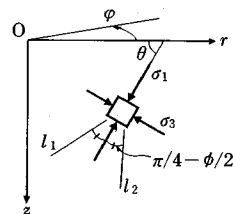


図-15 円筒座標と主応力、すべり線方向

-1) s とかけるから、(HK 仮定では $b=0$ である)

CM 材で HK 仮定の下に (16) を s, θ の式に改めると連立一階双曲型偏微分方程式となり、特性曲線の方程式は

$$dz/dr = \tan\{\theta \pm (\pi/4 - \phi/2)\} \dots\dots\dots (17)$$

となる¹²⁾。特性曲線はすべり線でもあり、すべり線に沿う関係式 (すべり線座標系に関するつり合い方程式を意味する) は

$$\left. \begin{aligned} \cot \phi \frac{ds}{dl_1} - 2s \frac{d\theta}{dl_1} &= \gamma \sin(\theta - \phi) \\ &+ \frac{s}{r} \{\sin \theta - \cos(\theta - \phi)\} \\ \cot \phi \frac{ds}{dl_2} + 2s \frac{d\theta}{dl_2} &= \gamma \cos \theta \\ &+ \frac{s}{r} \{\sin \theta - \cos(\theta - \phi)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

となる。ここに dl_1, dl_2 はすべり線に関する線素長である (図-15)。式 (18) で $r \rightarrow \infty$ としたものは二次元問題に関する Kötter 方程式にほかならず、この意味で式 (18) は軸対称応力での Kötter 方程式といってよい。境界条件の下で式 (17), (18) を差分化した式を解いてすべり線場の形状と塑性応力を求めることができる。

K. H. 仮定 ($b=0$ 仮定) の妥当性について勝見¹³⁾が実験で調べたところ $b=0.15 \sim 0.25$ であることを見出している。Hill¹⁴⁾は HK 仮定を便宜的に過ぎると批判しているが Cox ら¹⁵⁾によると HK 仮定に従う応力分布は一般性に富み、種々の問題に応用されると述べている。事実、2. (4) a) で考えている応力場は各域で $\sigma_r = \text{一定} = \sigma_3, \tau_{rz} = 0$ なので $\sigma_\phi = \sigma_r = \sigma_3$ であり HK 仮定が成り立つ例である。

$b \neq 0$ として MC 条件を使って支持力を求めた研究^{16), 13)}, MN 条件 (松岡・中井の破壊式¹⁷⁾) を用いて b の効果を調べた鶴飼¹⁸⁾の研究などがある。MN 条件は

$$\begin{aligned} &(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \\ &= (9 + 8 \tan^2 \phi_c) \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

である (ただし ϕ_c は三軸圧縮で求めたせん断抵抗角) が $\sigma_\phi = \sigma_2 = p + (b-1)s$ を (19) に用いると $\{3 + (b-1)K\} [1 - K^2 + 2\{1 + (b-1)K\}] = (9 + 8 \tan^2 \phi_c) (1 - K^2) [1 + (b-1)K] (K = s/p)$ となる。これより求めた $K(\phi_c, b)$ は $\sin \phi_{eq}$ (ϕ_{eq} は ϕ_c, b に依存する摩擦角) に等しい。したがって MN 条件についても特性曲線やそれに沿う関係式として式 (17), (18) と類似なものが得られるから差分法で応力解が知られる。

(2) 各種支持力係数の計算値

今まで得られている Kötter 式の差分解を取りまとめよう。HK 条件の下で $\gamma=0, \phi=0$ として粘着力 k のみがあるとき滑らかな円基礎について Shield¹⁹⁾は $q_r = 5.69k$ を求めた。また粗い場合に Eason ら²⁰⁾が $q_r =$

表-2

ϕ	$(q_r/k)_s$	$(q_r/k)_c$	q_{r2}/q_{r1}	s_c
0°	5.69	5.14	1.11	1.2
10°	9.98	8.34	1.20	1.3
20°	20.1	14.8	1.36	1.43
30°	49.3	30.1	1.64	1.61
40°	164.0	75.3	2.18	1.85

6.05 k を与えた。5.69 k は式 (4) の $q_r^* = 5.71 \sim 5.80k$ に、6.05 k は鶴飼による $q_r^* = 6.5k$ に対応する。二次元の $q_{r2} = 5.14k$ と比べると形状係数は 1.1~1.2 となる。Shield¹⁹⁾, Cox ほか¹⁵⁾は $\gamma=0$ であるが $k, \phi \neq 0$ で滑らかな円形表面載荷時の $q_r/k = N_{q2}$ を計算し表-2 を与えている。表中の s_c は De Beer による形状係数²¹⁾ $1 + (N_q/N_c)_2$ を示す。

Cox²²⁾は γ, c, ϕ とも 0 でない場合の滑らかな円基礎の表面載荷を解析し q_r/k を $\phi, G = \gamma B/2k$ の関数として与えているが、より詳しい計算結果を著者らが与えている (図-16)。またその中では $\gamma=0$ としてサーチャージがあるときの支持力係数 N_{q3} を表-3 のように与えている。この表には二次元の N_{q2} と de Beer の形状係数²²⁾ $s_q = 1 + \tan \phi$ も比較のため示してある。 N_{q3} については Larkin²³⁾も解析しており、 $\phi=30^\circ$ で $N_{q3}=45, \phi=40^\circ$ で $N_{q3}=167$ を得ている。この値は表-3 に比べて少し大きい、Larkin は間接的やり方で N_{q3} を求めているのも差の一因であろう。

HK 仮定に従わぬ CM 材で $\sigma_\phi = p (b=0.5)$ の場合、

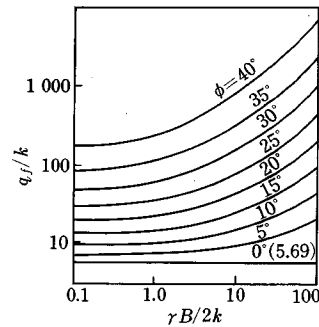


図-16 円形載荷時の $q_r - \gamma B - \phi$

表-3

ϕ	N_{q3}	N_{q2}	N_{q3}/N_{q2}	s_q
0°	1.0	1.0	1.0	1.0
10°	2.78	2.47	1.13	1.18
20°	8.39	6.40	1.31	1.36
30°	30.0	18.4	1.63	1.58
40°	146	64.2	2.27	1.84

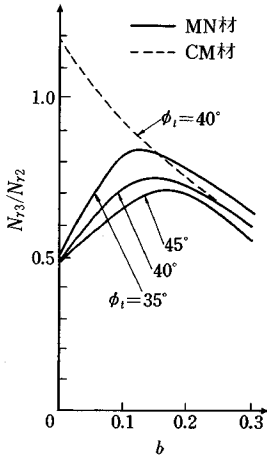


図-17 σ_ϕ の変化に応ずる支持力係数

N_{c3} や N_{r3} は $b=0$ のときと比べて $1/3 \sim 1/2$ と低下する^{16), 13)}. この問題を MN 条件として鶴飼¹⁸⁾が調べた結果が図-17である. 図の縦軸は形状係数に相当するが, $b=0.15 \sim 0.25$ では CM 材料でも MN 材料でも $s_r = 0.6 \sim 0.8$ の間にあることがわかる. CM 材に比べ MN 材では b が小さい間は N_{r3} が増加するのは b とともに $\phi_{e\phi}$ が増すためであり, b が大きくなると半径方向へ押出す分力を与える σ_ϕ が増すため N_{r3} は減少に転ずる.

4. 支持力補正係数による議論

(1) 一般支持力の表示式

現実の地盤は土質は不均一, 土層構成は単純でない. そして基礎は根入れがあり, 形状は帯や長方形だけにとどまらない. そのうえ, 載荷重は偏心, 傾斜して加わることが少なくないので, 個々の問題を純理論的に見積ることはほとんど不可能である. これを実用的立場で克服するには Br. Hansen の一般支持力表示法がある. 著者は彼の日本での講演概要しかみていないので孫引きの形で述べさせて頂きたい²⁴⁾. 三次元問題に関係する一般支持力式は

$$q_r = kN_c s_c i_c + p_0 N_q s_q i_q + \frac{\gamma B}{2} N_r s_r i_r \dots (20)$$

である. ここに q_r は有効面積 $(B-2e_1) \times (L-2e_2)$ ²⁵⁾ 上の地盤支持力である. s_c, s_q, s_r は帯基礎支持力係数を直方形基礎に適合させるための補正係数(形状係数)であり, i_c, i_q, i_r は傾斜荷重に対する補正係数(傾斜係数)である. 二次元支持力係数 N_c, N_q, N_r は

$$N_c = (N_q - 1) \cot \phi, \quad N_q = e^{\pi \tan \phi} \tan^2(45^\circ + \phi/2),$$

$$N_r = 2(N_q + 1) \tan \phi \dots (21)$$

で与えられるが, 第一の関係式は対応定理とよばれる. 対応定理はより拡張された形として

$$N_c s_c = (N_q s_q - 1) \cot \phi,$$

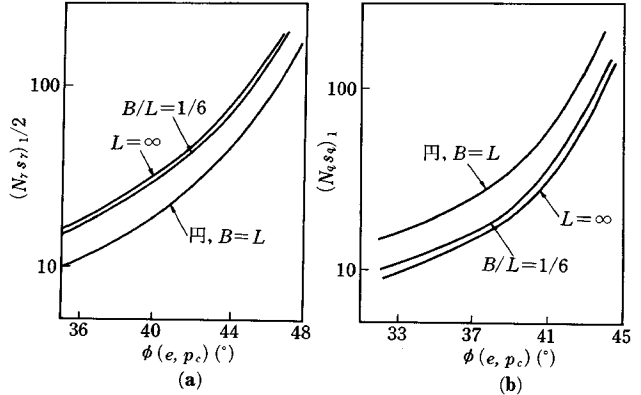


図-18 De Beer の実験結果

$$N_c s_c i_c = (N_q s_q i_q - 1) \cot \phi \dots (22)$$

と仮定される. これも単に対応定理という.

(2) 形状係数の形と誘導法

a) 実験による推定

De Beer²²⁾は砂地盤上で $B=3.6 \sim 15$ cm, $B/L=1, 1/6$ の模型基礎を用いて約 600 個の載荷試験を行った. 破壊時の沈下を w_r とすると $q_r = N_q d_q s_q w_r + N_r s_r \gamma B/2$ のように表わせる. s_r, s_q と深さ係数 d_q に, それまでに知られている経験式: $s_r = 1 - 0.4 B/L, d_q = 1 + 0.2 B/L, d_q = 1 + 0.35 w_r/B$ を初期値として測定値 q_r, w_r から逐次近似で $N_r s_r, N_q s_q$ を求めることができる. 一方, 使用した砂の間隙比 e , セル圧 p_c をパラメータとするせん断抵抗角 $\phi(e, p_c)$ をあらかじめ求めておく. $p = (q_r + 3p_0)(1 - \sin \phi)/4$ (p_0 : サーチージ圧力)で評価した地盤内平均圧力 p を p_c とみなして ϕ を推定し, 上記 $N_r s_r, N_q s_q$ の第一近似に対しプロットしたものが図-18 である. $B/L=1, 1/6$ のデータを比べると $(s_r)_1 = 1 - 0.4 B/L, (s_q)_1 = 1 + (B/L) \tan \phi$ が結論されるが, 第二近似で考えても $(s_r)_2 = 1 - 0.36 B/L, (s_q)_2 \approx (s_q)_1$ と大差ない. 以上により s_r は Terzaghi²⁷⁾あるいは鶴飼¹⁸⁾の $B=L$ に対する値とほぼ一致する. また s_q の剛塑性解との比較は表-3 に示したとおりである. s_q の値を式 (22) の第 1 式に適用して $s_c = 1 + N_q/N_c$ が得られる. 以上まとめると

$$s_c = 1 + N_q/N_c, \quad s_q = 1 + (B/L) \tan \phi,$$

$$s_r = 1 - 0.4 B/L \dots (23)$$

b) 形状係数の物理的背景²⁸⁾

直方形基礎の破壊域を円筒状と仮定する. 土被り圧 γD による支持力 $\gamma D N_q$ が分散し, 円筒側面上に $\sigma_n = \beta \gamma D N_q K_0$ の垂直応力が生ずるとすると摩擦抵抗は $\sigma_n \tan \phi$ で, 作用方向は円周に沿う. この抵抗による支持力の増加 ΔQ_r をモーメント計算で求めると $\Delta Q_r = (4/3) \pi \beta D B^2 K_0 \gamma N_q \tan \phi$. これより全支持力は

$\gamma DN_q BL + \Delta Q_r$ となり $s_q = 1 + (4/3)\pi K_0 \beta (B/L) \tan \phi$ を得る。 $\beta = 0.5, K_0 = 0.5$ とすれば式 (23) と一致する。

Meyerhof⁽²⁶⁾ は帯基礎の支持力計算には ϕ_p (平面ひずみ試験による) を、円基礎には ϕ_t ($\phi_p \approx 1.1 \phi_t$) を、直方形基礎では

$$\phi = (1.1 - 0.1 B/L) \phi_t \dots \dots \dots (24)$$

を用いることを提案している。そこで円基礎 (図-20) をすべり方向に細い帯片に分け、各部分の摩擦角が中心で ϕ_p 、周辺で ϕ_t をとる直線分布 ϕ_y であると仮定し帯片部の支持力 $dQ_r = \gamma N_\gamma (p_y) \cdot x dy$ を求める。ここに $N_\gamma (\phi_y)$ は式 (21) により算定できるから全域の支持力 Q_r が知れる。そして $Q_r = s_\gamma \pi R^2 \gamma N_\gamma (\phi_p)$ として求めた s_γ は $\phi = 30^\circ$ で 0.72, 35° で 0.7, 40° で 0.67, 45° で 0.63 となる⁽²⁸⁾ (図-17 参照)。

傾斜荷重に対する修正係数は Meyerhof⁽²⁵⁾ や Br. Hansen の提案⁽²⁴⁾ があるが、ここではすべり面を一本の対数線として支持力を計算するやり方⁽²⁹⁾ を紹介する。図-21 は傾斜荷重と鉛直荷重の二次元支持力係数を示す。 N_q, N_γ についてみると $\phi > 20^\circ$ では $i_q = (1 - \tan \delta)^2$, $i_\gamma = (1 - \tan \delta)^3$ で近似できる (これら近似値は図中○印で与えられる)。 $\tan \delta = P_h/P_v$ において粘着力の効

果は砂質土表面に一樣な圧力 $c \cot \phi$ を加えることに等価である点に留意し、 $c\phi$ 材では $P_v \rightarrow P_v + c \cdot BL \cot \phi$ とすれば

$$i_q = \left(1 - \frac{P_h}{P_v + c \cdot BL \cot \phi} \right)^2,$$

$$i_\gamma = \left(1 - \frac{P_h}{P_v + c \cdot BL \cot \phi} \right)^3 \dots \dots \dots (25)$$

となる。これは Br. Hansen の式と一致する。また対応定理式 (22) から $i_c = i_q + (i_q - 1)/(N_q - 1)$ が得られ、 $\phi > 20^\circ$ では $i_c \approx i_q$ が成り立つ ((c) 図参照)。荷重が偏心しているときは BL を $(B - 2e_1) \cdot (L - 2e_2)$ とすればよい。

5. その他の方法

紙数の関係で詳説できないが、地盤を弾完全塑性体として三次元球対称押広げの解析を行い、杭基礎の先端支持力へ適用する考え方がある。球内域は破壊条件を満たす塑性域、球外域は非塑性化するが弾性域にとどまり、応力や変位の連続条件から押広げ圧、塑性域の範囲が定められる。その結果 Vesic⁽³⁰⁾ が与えた押広げ圧力 p_u は

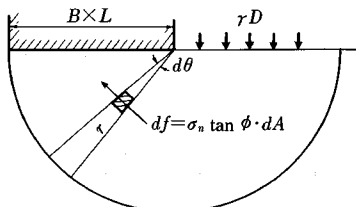


図-19 側面摩擦の支持力への寄与

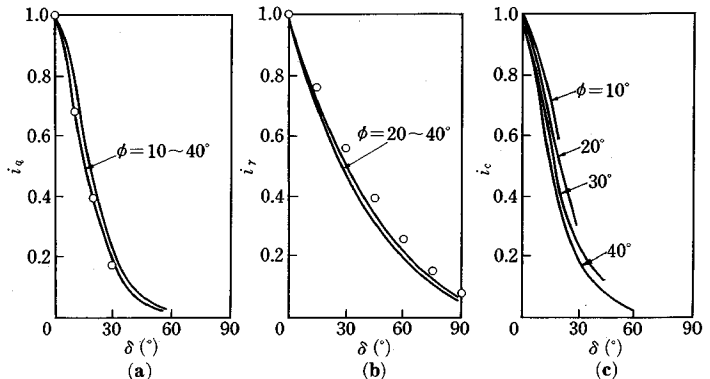


図-21 傾斜荷重の支持力係数

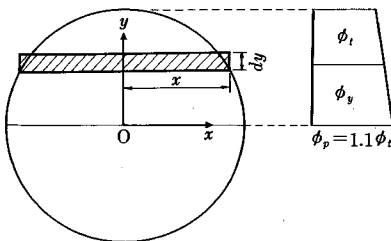


図-20 s_γ の評価法のキースケッチ

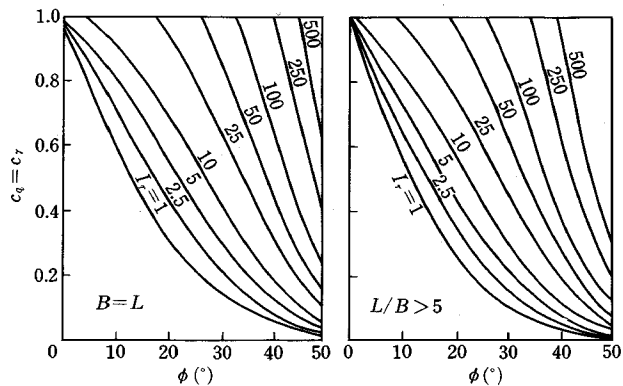


図-22 圧縮性係数

$$p_u = cF_c + p_0 F_q$$

$$\text{ここに } F_q = \frac{3(1 + \sin \phi)}{3 - \sin \phi} (I_{rr})^{1/\sin \phi / (3(1 + \sin \phi))}$$

$$F_c = (F_q - 1) \cot \phi$$

$$\text{また } I_{rr} = I_r / (1 + I_r \Delta)$$

$$\text{ただし } I_r = E/2(1 + \nu)(c + p_0 \tan \phi)$$

.....(26)

式中の Δ は塑性域中の体積圧縮ひずみであって $p_0 = \gamma D$ (D は杭長) とおくと p_u は杭の先端部分の降伏開始圧とみられる。式 (26) の適用性を明らかにした実験として堀込らの報告³¹⁾がある。式 (26) で $\Delta \rightarrow 0$ とすると著者の与えた式となり、実用的の形に改めると $p_u = 2.3\sqrt{Gp_0} = 4.5 N^{0.833} = 2.5 N$ (kg/cm^2) (ただし N は SPT における N 値) となる³²⁾。式 (26) の I_r は剛性インデックスとよばれるが Vesic^{21), 24)} は圧縮性係数 c_c , c_q , c_γ (これらは I_r , ϕ の関数で図-22 に示される) を式 (20) に導入することを提案している。

帯基礎では斜面安定解析の分割法に倣った支持力計算法が複雑な不均一性を示す地盤において有用であることが示されている³³⁾。三次元支持力問題での、このような定式化はまだ行われていないが、三次元斜面安定解析を対象とした解析手法^{34), 35)}は参考となるものと思う。

参 考 文 献

- 1) Yamaguchi, H., Kimura, T. and Fuji-i, N. : Soils and Foundations, Vol.16, No.4, pp.11~22, 1976.
- 2) 小田匡寛・古戸幸博：土木学会論文報告集, 321号, pp.113~122, 1982.
- 3) 竜岡文夫：生産研究, 36巻6号, pp.293~298, 1984.
- 4) Hansen, Br. : Proc. 4 th ICSMFE, Vol. II, pp.441~447, 1957.
- 5) Chen, W. F. : Limit Analysis and Soil Plasticity, Elsevier, 1975.
- 6) Shield, R. T. and Drucker, D. C. : J. Appl. Mech., ASCE, 75, pp.453~460, 1953.
- 7) Tschebotarioff, G. P. : Soil Mechanics, Foundations & Earth Structures, McGraw-Hill, 1957.
- 8) Shield, R. T. : Q. Appl. Math., Vol.13, 1, pp.27~46, 1955.
- 9) 鶴飼恵三：土質工学会論文報告集, Vol.25, No.4, pp.179~185, 1985.
- 10) Nakase, A. : Soils & Foundations, Vol.21, No.4, pp.101~108, 1981.
- 11) Davis, E. H. and Booker, J. R. : Geotech., Vol.23,

- No.4, pp.551~563, 1973.
- 12) 山口柏樹：土の塑性力学 (最上編), 技報堂出版, 1969.
- 13) 勝見 雅：土木学会論文報告集, No.252, pp.73~85, 1976.
- 14) Hill, R. : The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford, 1950.
- 15) Cox, A. D., Eason, G. and Hopkins, H. G. : Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol.25, pp.1~45, 1961.
- 16) 山口柏樹・木村 孟・寺師昌明：土質工学研究発表会, pp.333~338, 1968.
- 17) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Soils & Foundations, Vol.25, No.4, pp.123~128, 1985.
- 18) 鶴飼恵三：土質工学会論文報告集, Vol.27, No.4, pp.204~207, 1987.
- 19) Shield, R. T. : Proc. Royal Soc. London, Ser. A, Vol.233, pp.267~287, 1955.
- 20) Eason, G. and Shield, R. T. : J. Appl. Math. Phys. 11, pp.33~43, 1960.
- 21) Vesic, A. S. : Jour. SMFD, ASCE, SM 1, pp.45~73, 1973.
- 22) De Beer, E. E. : Geotech., Vol.20, No.4, pp.387~411, 1970.
- 23) Larkin, L. A. : Jour. SMFD, ASCE, SM 6, pp.1347~1356, 1968.
- 24) Vesic, A. S. : Bearing Capacity, Handbook of Foundation Engineering, pp.121~147, Van Nostrand, 1970.
- 25) Meyerhof, G. G. : Proc. 3 rd ICSMFE, Vol.1, pp.440~445, 1953.
- 26) Meyerhof, G. G. : Canadian Geotechnical Jour. Vol.1, No.1, pp.16~26, 1963.
- 27) Terzaghi, K. : Theoretical Soil Mechanics, John Wiley & Sons, 1943.
- 28) 山口柏樹・成田国朝：土木学会年次講演会に発表予定, 1988.
- 29) 成田国朝・山口柏樹：土質工学会研究発表会, pp.1121~1122, 1987.
- 30) Vesic, A. S. : Jour. SMFD, ASCE, SM 3, pp.265~290, 1972.
- 31) 堀込豊司・綱川祐一・横山幸満・日下部治：土質工学研究発表会に発表予定, 1988.
- 32) 山口柏樹：土質力学 (全改訂), 技報堂出版, 1984.
- 33) 今泉繁良・山口柏樹：土質工学会論文報告集, Vol.26, No.2, pp.143~150, 1986.
- 34) Hovland, H. J. : Jour. SMFD, ASCE, GT 9, pp.971~986, 1977.
- 35) 鶴飼恵三・細堀建司：土質工学研究発表会, pp.1469~1470, 1987.

(1988.3.31・受付)