
投稿論文
Paper

低・高圧下における砂の降伏特性を評価した 弾塑性構成式について

ELASTO-PLASTIC CONSTITUTIVE MODEL FOR SAND IN LOW AND HIGH PRESSURE

村田秀一*・兵動正幸**・安福規之***

By Hidekazu MURATA, Masayuki HYODO and Noriyuki YASUFUKU

An elasto-plastic constitutive model was established in order to describe the stress-strain behavior of normally and over-consolidated sand for static loading in a wide stress region. The fundamental concept herein is based on the assumption that sand can be regarded as an isotropic material. The proposed model which involves eight parameters consists of two set of the yield, plastic potential and hardening functions. These functions are expressed based on a few basic assumptions and experimental evidences obtained from the multi-step stress path tests under 0.1 MPa-10 MPa confining pressure. This model can give good qualitative prediction of shear and volumetric strains for triaxial compression tests with various stress paths on normally and over-consolidated sand in a wide stress region.

Keywords: constitutive equation of soil, yield, stress-strain curve, stress path, sand

1. ま え が き

近年、基礎地盤の変形問題において、大型計算機を使った解析を行うことが多くなった。このような解析により、地盤の破壊に至るまでの挙動を精度よく評価するためには、土の応力変形特性をうまく表現できるような応力ひずみ式（構成式）が必要となる。現実の地盤で想定される応力状態は、地表面付近における低拘束圧状態から重量構造物基礎周辺におけるような高拘束圧状態までさまざまな状態が考えられる。したがって、地盤の多様な応力状態に対応するためには、このような拘束圧の違いによる土の力学的挙動の変化に適応できる構成モデルが必要となってくる。

砂や礫などの粒状材料において、低圧域から土粒子が破砕されるような高圧域までを対象とした場合、その応力ひずみ特性は、拘束圧によって著しく変化をきたすことが Vesic¹⁾、Lee²⁾、三浦^{3),4)}をはじめ過去におけるいくつかの研究により明らかにされている。その特性は、低圧域におけるひずみ硬化軟化型の特性から、高

圧域におけるひずみ硬化型の特性へと変化し、あたかも異なる材料であるかのごとき挙動を呈する。したがって、このような広い応力域を対象とした粒状材料の構成式を考える場合には、特に拘束圧依存性をうまく表現し得ることが必須と思われる。

土の応力ひずみ関係を表現するのに有効な手段の1つであろう弾塑性構成モデルに関する研究は、Roscoe, Schofield, Wrothらを中心としたグループの研究^{5),6)}を端緒として数多く成されている。その中で、砂の挙動の評価に主眼をおいた代表的なモデルとして、Poorooshasb⁷⁾や Novaと Wood⁸⁾の示した単一降伏曲面を有するモデル、圧密による降伏曲面とせん断による降伏曲面の2つの降伏曲面を有する西と江刺⁹⁾のモデル、Lade¹⁰⁾および Vermeer¹¹⁾のモデル、さらに境界曲面の考え方に基礎をおく足立と岡のモデル¹²⁾や硬化係数場の理論に基づいた Mrozらの複数の降伏曲面を有するモデル^{13),14)}などが挙げられる。これらのモデルは、主として繰返し載荷を含む複雑な応力履歴に対する挙動の評価に主眼をおいて作られており、特に Cam-Clayモデルというところの弾性域内における塑性変形をそれぞれの目的に応じてうまく表わせる形となっている。しかし、このようなモデルは、総じて限られた応力域での応力ひずみ挙動を評価するためのものであり、上述したような広

* 正会員 工博 山口大学教授 工学部建設工学科
(〒755 宇部市常盤台 2557)

** 正会員 工博 山口大学助教授 工学部建設工学科(同上)

*** 正会員 工修 山口大学助手 工学部建設工学科(同上)

範な応力域を対象とした場合における適用性は春山、北村らの報告^{15),16)}にもみられるように十分とはいえないようである。

三浦および著者らは^{17),18)}、Roscoeらの示した考え方に新たな消散エネルギー式の仮定を導入し、粒子破砕が顕著に生じる応力域（高圧域）における砂の応力ひずみ関係をうまく表現できるような構成式の検討を行った。さらに、著者らは¹⁹⁾、このような高圧域から粒子破砕が生じないような低圧域に至るまでの広範な応力域を対象にした場合には、砂の降伏は圧密による効果とせん断による効果が互いに影響し合いながら進展するものだという考えに立って、密な砂の降伏特性に関する実験的検討を行った。そして、その結果に基づいて等方圧縮条件下における砂の降伏特性を包括的に表現できる降伏条件式の提示を行った。

本研究は、このような成果を踏まえ、広範な応力域における砂の応力ひずみ挙動、特にその拘束圧依存性をうまく表現できる構成モデルの検討を弾塑性論的立場から試みたものである。本研究ではまず、低・高圧域において単調あるいは多段階の三軸圧縮試験を種々の応力経路下で実施し、降伏特性、応力比・ひずみ増分比特性および硬化特性に関する実験的な検討を行った。そして、得られた結果を弾塑性論的な立場から考察し、2つの降伏関数、塑性ポテンシャル関数および硬化関数を有する具体的な応力ひずみ増分式を提示した。また、提示式の三軸圧縮試験結果への適合性についても検討した。

2. 応力ひずみ増分式の概要

検討する構成式は、流れ則に立脚したものであり、砂は、等方的な弾・塑性材料であると仮定する。まず、圧縮やせん断を受けることにより生じるひずみ増分、 $d\epsilon_{ij}$ は、次式で示すように弾性ひずみ増分、 $d\epsilon_{ij}^e$ と塑性ひずみ増分、 $d\epsilon_{ij}^p$ の2つの成分に分けられると仮定する。

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $d\epsilon_{ij}^e$ は、後述の式(29)によって評価できるとする。また $d\epsilon_{ij}^p$ は、流れ則によって次式で与えられる。

$$d\epsilon_{ij}^p = h \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \delta \sigma_{kl} \right) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 h は硬化関数、 g は塑性ポテンシャル関数、 f は降伏関数、 σ_{kl} は有効応力テンソルである。

後述するように、無視できない塑性ひずみが、実験的考察に基づいて定めた降伏曲線内部において生じる。そこで、このようなひずみを評価するために、 $d\epsilon_{ij}^p$ は次式のような2つの独立な成分から成るものとした。

$$d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{m,ij}^p + d\epsilon_{a,ij}^p \dots\dots\dots (3)$$

上式において、 $d\epsilon_{m,ij}^p$ は主要な塑性ひずみ増分を表わし、主要な降伏関数 f_m 、塑性ポテンシャル関数 g_m および硬

化関数 h_m によって明確にされる。なお、“主要な”という表現を用いた理由は、塑性ひずみ増分の大部分がこの項によって評価できることによる。降伏関数 f_m は、 p - q 空間においてキャップ型の降伏曲線を与え、低・高圧下において実験的に検討した降伏特性をうまく表現し得るものである。塑性ポテンシャル関数 g_m は、実験的に得られたストレス・ダイレイタンスー関係から導いたものであるが、Roscoeらの示した Cam-clay 式と修正 Cam-clay 式の塑性ポテンシャル関数を一般化し組み合わせられた形で表わされている。また、硬化関数 h_m は低・高圧下で適用可能と思われる硬化パラメーターの仮定と低・高圧下における砂の圧縮特性に基づいて誘導される。

塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{a,ij}^p$ は、降伏曲線 f_m 内部で生じるような“付加的な”塑性ひずみを表わすためのものであり、Roscoeら⁶⁾や Prevostら²⁰⁾の示した降伏関数と塑性ポテンシャル関数の導入とストレス・ダイレイタンスー特性を利用した硬化関数の誘導により明確にされる。また、この項を導入することにより、結果的にストレス・ダイレイタンスー特性の応力経路依存性を評価することもできる。

ここでは、次に示すような応力ひずみ増分パラメーターを用いて、降伏関数、塑性ポテンシャル関数、硬化関数に関する実験的検討を軸対称条件で行っている。

$$p = (\sigma_a + 2\sigma_r)/3, \quad q = \sigma_a - \sigma_r, \quad \eta = q/p \dots\dots\dots (4)$$

$$dv = d\epsilon_a + 2d\epsilon_r, \quad d\epsilon = 2(d\epsilon_a - d\epsilon_r)/3 \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 p ：平均有効主応力、 q ：軸差応力、 η ：応力比、 σ_a, σ_r は、それぞれ軸方向および半径方向有効応力、 dv ：体積ひずみ増分、 $d\epsilon$ ：せん断ひずみ増分、 $d\epsilon_a, d\epsilon_r$ は、それぞれ軸方向および半径方向主ひずみである。

3. 降伏曲線および塑性ポテンシャルの特性

(1) 降伏関数の評価

著者らは、Fig. 1 に示すような単調あるいは多段的応力経路試験を低・高圧域において行うことにより、砂の降伏特性およびその応力変形挙動について検討してき

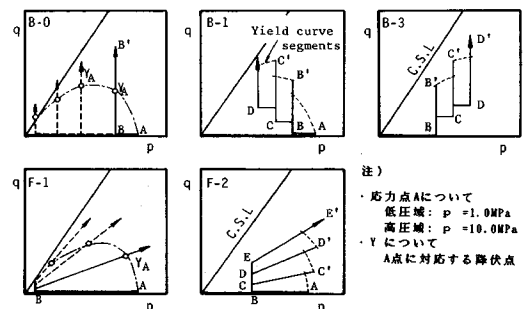


Fig. 1 Stress paths for determining of yield points.

た^{17)~19),21)}。この試験の具体的な方法や降伏応力の決定方法については、参考文献19)に詳しく述べている。この試験は、基本的には Poorooshasb⁷⁾、龍岡ら²²⁾、三浦ら²³⁾の示したものと同種のものである。実験に用いた試料は、粒径0.074~2.0 mmに粒度調整した海砂であり、その主な指数的性質は比重2.65、均等係数2.56、最大および最小間隙比はそれぞれ1.05と0.60である。本研究では直径50 mm、高さ130 mm、初期間隙比0.65~0.66の飽和供試体を作成し実験に供した。また、メンブレン貫入による体積変化量の補正は三浦らの示した手法²⁴⁾を用いて行った。Fig.2(a), (b)は、B-0およびF-1タイプの試験から得られた密な砂の代表的な降伏曲線の形状を p - q 図上に示したものであり、(a)図は低圧域 ($p_A=1$ MPa)、(b)図は高圧域 ($p_A=10$ MPa)における結果である。図中の白丸は、B-0タイプ試験から得られたA点に対応する降伏点、白四角はF-1タイプの試験から得られた降伏点を示している。これらの結果から判断すれば、低・高圧域ともにA点に対応する降伏点の応力経路依存性は少なく、降伏曲線はキャップ型の形状を呈していることがわかる。図中には、B-1、B-3およびF-2タイプの試験から得られた代表的な降伏曲線の切片群もまとめて示しているが、上述の降伏曲線の形状とうまく対応しているといえる。

三浦らおよび著者ら^{18),23)}は、緩い砂の粒子破碎領域(高圧域)における降伏曲線が、応力経路には無関係に次式で示す特性を有することを明らかにしている。

$$dq/dp = G(\eta) \dots \dots \dots (6)$$

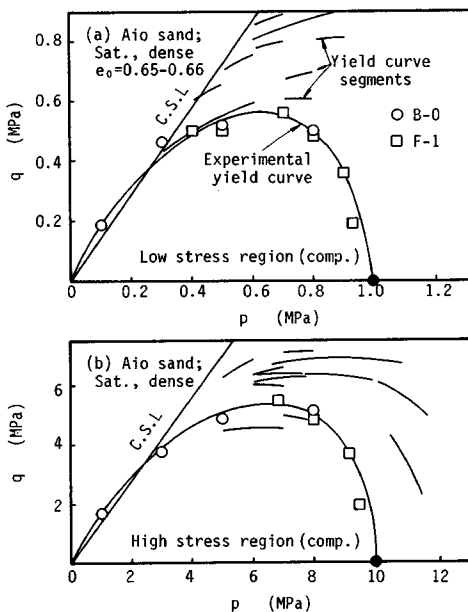


Fig.2 Experimental yield curve and yield curve segments; (a) low stress region, (b) high stress region.

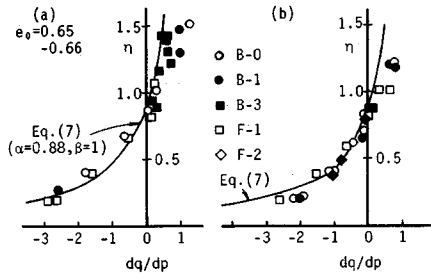


Fig.3 dq/dp - η characteristics of the yield curve and yield curve segments presented in Fig.2; (a) low stress region, (b) high stress region

式(6)は降伏曲線の勾配 dq/dp が応力比のみによって表わせることを示すものであり、もしこの関係が低・高圧域において密な砂に対しても成り立ち、 $G(\eta)$ が具体的な関数で表わせれば、主要な降伏関数 f_m は求まることになる。Fig.3は、上述の考え方に従って、Fig.2に示した密な砂の実験的に求めた降伏曲線を、その勾配 dq/dp と η の関係で整理したものである。(a)図には、低圧域における結果を、(b)図には高圧域における結果をそれぞれ示している。両応力域において、試験のタイプに関係なく、 dq/dp と η の間には、おおむねユニークな関係が存在し、式(6)の考え方が適用可能である。また、 dq/dp - η 特性の応力域による影響は比較的小さく、その関係は両応力域ともに $\eta \rightarrow 0$ で $dq/dp \rightarrow -\infty$ になるような特性を有していると判断できる。そこでFig.3に示された dq/dp - η 関係を近似する式として次式で示すような双曲線を仮定する。

$$dq/dp = -(\alpha^2 - \eta^2)/\beta\eta \dots \dots \dots (7)$$

ここに α , β は材料定数であり、 α は $dq/dp=0$ のときの η の値、 β は dq/dp の変化率を表わす定数である。Fig.3中には $\alpha=0.88$, $\beta=1.0$ を用いて、 dq/dp - η 関係をフィッティングした結果を示しているが、式(7)は、実験的に得られた dq/dp - η 特性をうまく表現し得ると考えられる。式(7)において α が Roscoe らによって提唱された限界状態における応力比 M と等しく、かつ $\beta=2$ であるならば、同式は修正 Cam-clay 式⁶⁾、 $\beta=1$ であれば橋口の式^{25),26)}に等しくなる。実験結果に基づけば、この場合 β はほぼ1.0であるが、 α は0.88で、 M 値(1.40)よりかなり小さい値となる。さて式(7)を積分すると降伏関数 f_m が次式として与えられる。

$$\beta \neq 1: f_m = \ln p/p_{co} + \frac{\beta}{2(\beta-1)} \ln \left(\frac{\beta-1}{\alpha^2} \eta^2 + 1 \right) = 0 \dots (8.a)$$

$$\beta = 1: f_m = \eta^2 + 2\alpha^2 \cdot \ln p/p_{co} = 0 \dots \dots \dots (8.b)$$

ここに p_{co} は、等価等方圧密圧力である。なお、以下の

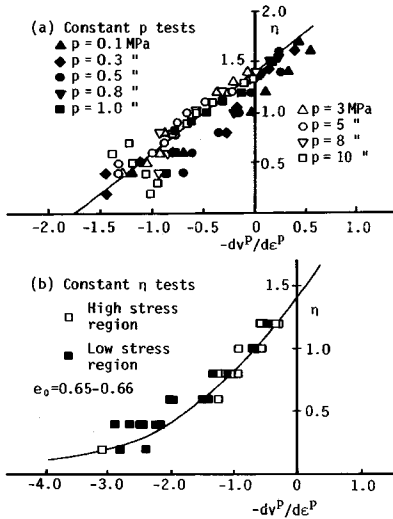


Fig. 4 Relations between dv^p/de^p and η in triaxial compression tests under wide stresses; (a) constant p tests, (b) constant η tests.

章では実験結果に基づき $\beta=1$ とした式 (8.b) を用いた構成式について検討している。

(2) 塑性ポテンシャルの特性

Fig. 4 は、低・高圧下において行った p 一定および η 一定試験から得られた密な砂の塑性ひずみ増分比 dv^p/de^p と応力比 η の関係を示したものである。砂に対する塑性ひずみ増分比の応力経路依存性はすでに多くの研究者によって報告されているが、この図から粒子破壊が顕著に生じる応力域においても塑性ひずみ増分比の応力経路依存性は認められる。傾向として p 一定試験の場合 (a) 図) には、Cam-clay 型の直線的な dv^p/de^p - η 関係を、 η 一定試験 (b) 図) では、修正 Cam-clay 型の双曲線的な dv^p/de^p - η 関係を示しているといえる。しかしながら、両者は応力比の低い領域で顕著に差が現われるものの、せん断成分の卓越する応力比の高い領域では、ほぼ同一のものとなっている。

そこで、このような応力比・塑性ひずみ増分比の応力経路依存性を上述した 2 つの独立な塑性ひずみ成分を用いて評価するために、まず主要な塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{m,ij}^p$ の生じ方を規定するストレス・ダイレイタンス式として、次式を仮定する。この式は dv^p/de^p - η 関係として、応力比 $0 \leq \eta \leq M$ の間では双曲線を、また $M \leq \eta \leq \eta_p$ では直線関係を仮定するものであり、これにより、等方圧密過程では塑性せん断ひずみが生じないという特性や $\eta > M$ において負の塑性体積ひずみ増分が生じるといった現象を比較的簡単に表現することができる。

$$\frac{dv^p}{d\epsilon_m^p} = \frac{(M^2 - \eta^2)}{c\eta} \text{ for } 0 \leq \eta \leq M \dots\dots\dots (9.a)$$

$$= \frac{2}{c}(M - \eta) \text{ for } \begin{cases} M \leq \eta \leq \eta_p \\ \eta_p \geq \eta \geq M \end{cases} \dots\dots\dots (9.b)$$

ここで、 η_p は硬化から軟化へ転ずる応力比を表わし、後述の式 (13) で定義される。 c は実験定数であり、 $2/c$ は p 一定試験の dv^p/de^p - η 関係の勾配を意味し、またこの値は式 (9.a) で与えられる双曲線において $\eta = M$ のときの接線勾配でもある。もし $c=2$ とおくと式 (9.a)、式 (9.b) はそれぞれ修正 Cam-clay モデルと Cam-clay モデルより得られるストレス・ダイレイタンス式と一致する。式 (9) を消散エネルギー式の形で書き換えると次式となる。

$$\delta W_m^p = p\sqrt{(dv^p)^2 + X \cdot dv^p \cdot d\epsilon_m^p + (M \cdot d\epsilon_m^p)^2} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $X = (2-c)\eta$ for $0 \leq \eta \leq M$

$$= \left[2\eta - \frac{c}{2}(M + \eta) \right] \text{ for } \begin{cases} M \leq \eta \leq \eta_p \\ \eta_p \geq \eta \geq M \end{cases}$$

さて式 (9) に直交則を適用すると、 f_m に対応する塑性ポテンシャル g_m は次式として誘導される。

for $0 \leq \eta \leq M$

$$c \neq 1: g_m = \ln p + \frac{c}{2(c-1)} \ln \left(\eta^2 + \frac{M^2}{c-1} \right) \dots\dots\dots (11.a.1)$$

$$c = 1: g_m = \ln p + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{M} \right)^2 \dots\dots\dots (11.a.2)$$

for $M < \eta < \eta_p$ or $\eta_p > \eta \geq M$

$$c \neq 2: g_m = \ln p + \frac{c}{c-2} \ln \left(\eta + \frac{2M}{c-2} \right) \dots\dots\dots (11.b.1)$$

$$c = 2: g_m = \frac{\eta}{M} + \ln p \dots\dots\dots (11.b.2)$$

一般には、 $c \neq 1$ 、 $c \neq 2$ であるから、ここでは g_m として式 (11.a.1)、式 (11.b.1) を用いて、モデルの作成を行っている。

(3) 付加的な降伏関数および塑性ポテンシャル

式 (8) によって得られる降伏曲線は、従来の降伏応力の決め方¹⁹⁾からすると、橋口の記述²⁶⁾にもあるように再負荷曲線群を包絡するような曲線にほぼ対応する。したがって、実験的には、式 (8) によって得られる降伏曲線内部にも、無視できない塑性ひずみが存在すること

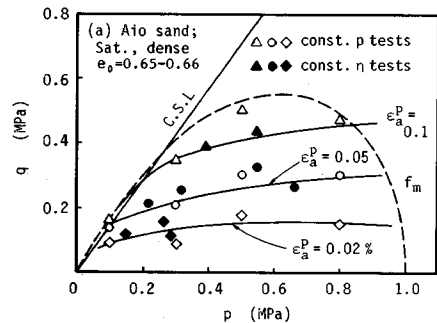


Fig. 5 Plastic shear strain beneath or on the experimental yield curve in low stress region.

になる。

Fig. 5は、B-1, F-1タイプ試験（低圧域）から、降伏曲線（降伏点）内部で生じる塑性せん断ひずみ量 ϵ_p^0 を求め、そのコンターを示したものである。ここで、 ϵ_p^0 は実験的に得られた降伏曲線内部においてB-0, F-1タイプの載荷・除荷試験を行い、その際得られる載荷時のせん断ひずみ量から除荷時のそれを差し引くことにより評価している。塑性ひずみ量の評価する基本的な考え方は、参考文献18)に示している。等 ϵ_p^0 曲線は、 η 一定の形状よりも q 一定の形状に近く、また p 一定、 η 一定タイプの試験にかかわらず、ほぼ0.1%程度の塑性せん断ひずみが降伏曲線内部に生じている。

そこで、このような塑性ひずみを評価する一手法として、ここでは式(12)、(13)で示す q 一定の付加的降伏関数および塑性ポテンシャル関数を仮定する。これらの式型はRoscoeら⁶⁾やPrevostら²⁰⁾によって報告されているものと等価であり、式(14)で示す消散エネルギー式に基づいて誘導される。

$$f_a = q - q_0 = 0 \dots\dots\dots(12)$$

$$g_a = q \dots\dots\dots(13)$$

$$\delta W_a^0 = q \cdot d\epsilon_p^0 \dots\dots\dots(14)$$

ここで、 q_0 は過去に受けた最大の q の値。この仮定は、軸差応力 q が増大するとき ($dq > 0$)に、付加的な塑性せん断ひずみは生じるが、付加的な塑性体積ひずみは生じないことを表わすことになる。また、この付加的な降伏関数の導入により、Fig. 4で示すような塑性ひずみ増分比の応力経路依存性を表現することが可能となる。

(4) 破壊包絡線

密な砂の場合、通常の排水三軸圧縮試験を行うと一般にその応力ひずみ関係（たとえば η - ϵ 関係）には、ピーク値が現われる。ここでは、このような応力比 η のピーク値を連ねた曲線を破壊包絡線と規定する。この破壊包絡線が広範な応力域においては、直線で表わせないことがすでに Vesicら¹⁾、Leeら²⁾、三浦ら^{3),4)}によって報告されている。Fig. 6は、正規圧密した密な砂に対して低・

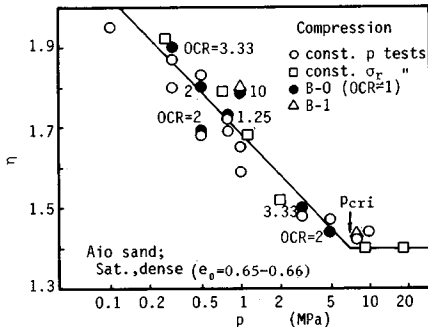


Fig.6 Relation between η_p and p in triaxial compression tests under wide stresses.

高圧下で p 一定および側圧一定三軸圧縮試験を行い、その結果得られた応力比のピーク値 η_p とそのときの平均有効主応力 p_p の関係を片対数座標で表示したものである。この図から、 η_p の値は p_p の値が0.1 MPa以上であれば p_p の増加とともに指数関数的に減少し、 p_p が7 MPa付近ではほぼ一定値 ($\eta = M$)になることがわかる。また図中には、低・高圧域で、種々の過圧密比における砂の p 一定試験結果も示しているが過圧密比が10程度以下であれば、 η_p に過圧密の影響はみられない。これらの結果から、著者らは正規または過圧密を受けた砂の低・高圧下における破壊包絡線として次式を仮定し、この式を用いて応力比のピーク値の規定を行った。

$$\eta_p = M - D \cdot \ln(p_s/p_{cri}) \text{ for } 0 \leq p \leq p_s \dots\dots(15\text{-}a)$$

$$= M - D \cdot \ln(p/p_{cri}) \text{ for } p_s \leq p \dots\dots\dots(15\text{-}b)$$

ここで、 M は $dv^0/d\epsilon^0 = 0$ に対応する応力比、 D は η_p - $\ln p$ 関係の勾配であり、 $p > p_{cri}$ のとき $D = 0$ を仮定する。また、 p_s は材料定数であり、式(13・a)は p_s 以下の p の値では、 η_p が一定となることを評価する。この仮定を支持する実験的報告として福島・龍岡の研究²¹⁾がある。 p_{cri} は η_p が一定値を示すときの p の値である。

4. 硬化関数の評価

(1) 硬化関数 k_m

降伏関数 f_m に対応する硬化パラメーター k_m ($= \int dk_m$)として次式を新たに仮定し、低・高圧下における砂の硬化軟化の特性を評価することを試みた。

$$dk_m = dv^0 + A \left(1 - \frac{p}{p_{cri}}\right) \eta \cdot d\epsilon_p^0 \text{ for } 0 \leq p \leq p_{cri} \dots\dots\dots(16\text{-}a)$$

$$dk_m = dv^0 \text{ for } p_{cri} < p \dots\dots\dots(16\text{-}b)$$

この仮定は、Fig. 7に示す p 一定、 η 一定試験に基づいて描いた等 k_m 曲線が、Fig. 3に示した降伏曲線の形状によく似ているという実験的事実に基づくものである。ここで、軟化中の応力ひずみ挙動を評価する目的で、Novaらの考え方⁹⁾にならない、式(16・a)中の A は、

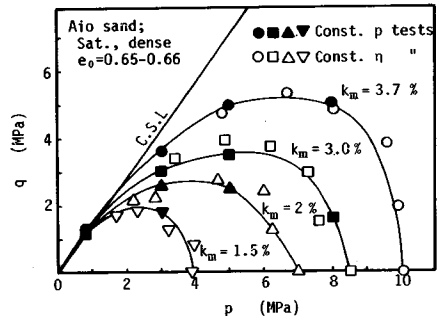


Fig.7 Contours of the hardening parameter k_m obtained by triaxial compression tests.

$0 \leq \eta \leq \eta_p$ の硬化過程中は 1, $\eta_p > \eta \geq M$ の軟化過程では 0 となるものとし、応力比は $\eta = \eta_p$ に達すると、再び $\eta = M$ まで低下することを仮定している。

式 (16-a) 中の $(1-p/p_{cri})$ の項は、硬化の仕方にせん断ひずみなどの程度関与するかを表わそうとしたものである。この項は $p=0$ で 1, $p=p_{cri}$ で 0 となり、 p が増加するにつれて $d\epsilon^p$ の関与する割合は相対的に小さくなる。そして $p=p_{cri}$ すなわち η_p が一定値 (M 値) に至る応力において、 $d\epsilon^p$ の関与率は 0 となることを表現する。ここで、 $p=0$ のとき式 (16-a) は諸戸らの示した状態量²⁸⁾と等価であり、 $p=p_{cri}$ のとき Roscoe らの用いた硬化パラメーター (式 (16-b)) と等しくなる。この項により、砂の応力ひずみ関係が拘束圧の増加とともにひずみ硬化軟化型から硬化型へ変化する様子を表現しようとしている。また、砂の応力ひずみ挙動が粒子破砕の生じるような応力域においては、粘性土とよく似た特性を示す事実^{29),30)}を考えれば、式 (16-b) の硬化パラメーターを利用することは妥当なように思われる。

硬化パラメーターとして式 (16) を用いると、降伏関数 f_m は次式で与えられる。

$$f_m = f_m(p, q, k_m) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

式 (17) に、適合条件を適用すると、式 (18) を得る。

$$df_m = \frac{\partial f_m}{\partial p} dp + \frac{\partial f_m}{\partial q} dq + \frac{\partial f_m}{\partial k_m} dk_m = 0 \dots\dots\dots (18)$$

式 (18) に、式 (16) の dk_m を代入し、 $d\epsilon_m^e$ と dv^p に式 (2) を適用し、整理すると、式 (16) に対応する硬化関数 h_m は、次式によってそれぞれ与えられる。

$$\text{for } 0 \leq p < p_{cri}$$

$$\frac{1}{h_m} = - \left(\frac{\partial f_m}{\partial k_m} \right) \left[\frac{\partial g_m}{\partial p} + A \left(1 - \frac{p}{p_{cri}} \right) \cdot \eta \cdot \frac{\partial g_m}{\partial q} \right] \dots\dots\dots (19-a)$$

$$\text{for } p > p_{cri}$$

$$\frac{1}{h_m} = - \left(\frac{\partial f_m}{\partial k_m} \right) \left(\frac{\partial g_m}{\partial p} \right) \dots\dots\dots (19-b)$$

ここに、 $\frac{\partial f_m}{\partial k_m} = \frac{\partial f_m}{\partial p_c} \cdot \frac{\partial p_c}{\partial v^p} \cdot \frac{\partial v^p}{\partial k_m}$

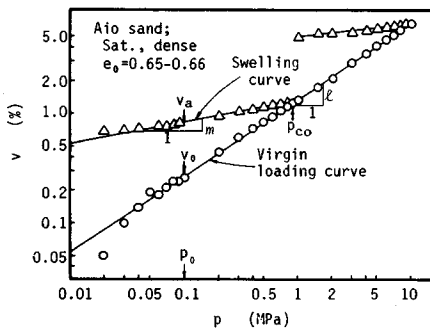


Fig. 8 $\ln v - \ln p$ relationships for isotropic consolidated test.

ここで p_c は処女等方圧密圧力であり、上式において f_m, g_m は式 (8), 式 (11) によってそれぞれ与えられており、また $\partial v^p / \partial k_m$ は、 k_m の定義から 1 に等しい。したがって式 (19) 中の偏微分値 $\partial p_c / \partial v^p$ の実験の評価がなされれば、 h_m は具体的に求めることができる。

Fig. 8 は、10 MPa までの応力域で砂の等方圧縮除荷試験を行って得られた体積ひずみ v と p の関係を両対数図上に示したものである。一般に、広範な応力域を対象にした場合には、粘性土のみられるような $e - \ln p$ 線形関係は砂ではみられない。この図は、広範な圧力域において得られた等方圧縮過程における砂の $\ln v - \ln p$ 関係が次式のような直線で近似できることを示している。

処女載荷に対しては：

$$v = v_0 \left(\frac{p_c}{p_0} \right)^l \dots\dots\dots (20)$$

除荷再載荷に対しては：

$$v^e = v_a \left(\frac{p_c}{p_0} \right)^m \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 v と v^e はそれぞれ全体積ひずみとその弾性成分を示す。 v_0, v_a は、 $p=p_0$ での v の値であり、 p_0 は単位応力を表わし、ここでは 0.1 MPa とした。また、 p_c は等方圧縮応力下での p の値である。そして、 l と m はそれぞれ $\ln v - \ln p$ 載荷・除荷曲線の勾配である。式 (20) を微分することにより、全ひずみ増分 dv は式 (22) として与えられる。また同様に式 (21) から、弾性ひずみ増分 dv^e は式 (23) によって定義される。

$$dv|_{n=0} = l \cdot v_0 \left(\frac{p_c}{p_0} \right)^l \cdot \frac{dp_c}{p_c} \dots\dots\dots (22)$$

$$dv^e = m \cdot v_a \left(\frac{p_c}{p_0} \right)^m \cdot \frac{dp_c}{p_c} \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $v_a = v_0 \left(\frac{p_{co}}{p_0} \right)^{l-m}$

さらに、式 (22) と式 (23) を、 $dv^p = dv - dv^e$ の関係に代入すると、等方圧縮過程における塑性体積ひずみ増分 dv^p は、式 (24) によって表示できる。等方圧縮条件下では $d\epsilon^p = 0$ と考えられるから、式 (24) は式 (25) のように書き換えることができる。

$$dv^p|_{n=0} = (l-m) v_0 \left(\frac{p_c}{p_0} \right)^l \frac{dp_c}{p_c} \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial p_c}{\partial v^p} = \frac{1}{(l-m)v_0} \left(\frac{p_0}{p_c} \right)^l \cdot p_c \dots\dots\dots (25)$$

それゆえ、式 (19) に、式 (8-b), 式 (11-a-1), 式 (11-b-1), 式 (25) を代入すると、硬化関数 h_m は応力比や応力域の違いによって Table 1 の式 (26) のように誘導できる。

(2) 付加的な硬化関数 h_a

f_a, g_a に対する硬化関数 h_a の具体的な評価を Fig. 4 で示した $dv^p / d\epsilon^p - \eta$ 特性に基づいて行った。まず、

Table 1 Yield functions, plastic potentials and hardening functions used in the proposed model.

応力域	$0 \leq p \leq p_{cri}$			$p > p_{cri}$
応力比域	$0 \leq \eta \leq M$	$M < \eta < \eta_p$	$\eta_p > \eta \geq M$	$0 \leq \eta \leq M$
降伏関数	$f_m = \eta^2 + 2\alpha^2 \ln(p/p_c) = 0$ $f_a = q - q_0 = 0$	$f_m = \eta^2 + 2\alpha^2 \ln(p/p_c) = 0$ $f_a = q - q_0 = 0$	$f_m = \eta^2 + 2\alpha^2 \ln(p/p_c) = 0$ $f_a = q - q_0 = 0$	$f_m = \eta^2 + 2\alpha^2 \ln(p/p_{cri}) = 0$ $f_a = q - q_0 = 0$
塑性ポテンシャル関数	$g_m = \ln p + \frac{c}{2(c-1)} \ln(\eta^2 + \frac{M^2}{c-1})$ $= \text{const. (c=1)}$ $g_a = q = \text{const.}$	$g_m = \ln p + \frac{c}{c-2} \ln(\eta + \frac{2}{c-2} M)$ $= \text{const. (c=2)}$ $g_a = q = \text{const.}$	$g_m = \ln p + \frac{c}{c-2} \ln(\eta + \frac{2}{c-2} M)$ $= \text{const. (c=2)}$ $g_a = q = \text{const.}$	$g_m = \ln p + \frac{c}{2(c-1)} \ln(\eta^2 + \frac{M^2}{c-1})$ $= \text{const. (c=1)}$ $g_a = q = \text{const.}$
硬化関数	$h_m = \frac{X(M^2 + (c-1)\eta^2)p}{M^2 + (c-1)\eta^2 - c\eta^2(p/p_{cri})}$ (26-a) $h_a = \frac{Xc\eta(\eta - \eta_p)}{p(M^2 + (c-1)\eta^2 - c\eta^2(p/p_{cri}))}$ (28-a)	$h_m = \frac{X(2M + (c-2)\eta)p}{2M + (c-2)\eta - c\eta(p/p_{cri})}$ (26-b) $h_a = 0$ (28-b)	$h_m = \frac{X(2M + (c-2)\eta)p}{2(M - \eta)}$ (26-c) $h_a = 0$ (28-c)	$h_m = \frac{X(M^2 + (c-1)\eta^2)p}{M^2 - \eta^2}$ (26-d) $h_a = \frac{Xc\eta}{p(X + \eta)}$ (28-d)
where, $X = \frac{(\ell - m)v_0}{2\alpha^2} (p/p_c)^\ell$, $p_c = p \exp(\eta^2/2\alpha^2)$				
破壊包絡線	$\eta_p = M - D\ln(p_s/p_{cri})$ for $0 \leq p \leq p_s$	$\eta_p = M - D\ln(p/p_{cri})$ for $p_s \leq p \leq p_{cri}$	$\eta_p = M$	

Fig. 4 に示すせん断過程 (p 一定試験) における $dv^p/d\varepsilon^p - \eta$ 関係が、式 (9-b) で与えられる直線によって近似できると仮定する。

ここで、塑性せん断ひずみ増分 $d\varepsilon^p$ が、主要な成分と付加的な成分の和によって表わされることを考慮すると、式 (9-b) は、次式となる。

$$dv^p = \frac{2}{c} (M - \eta) (d\varepsilon_m^p + d\varepsilon_a^p) \dots \dots \dots (27)$$

いままでの議論から、上式において未知量は、 $d\varepsilon_a^p$ を評価するための硬化関数 h_a だけなので、式 (2) に基づいて式 (8-b)、式 (11-a-1)、式 (11-b-1)、式 (26)、式 (12) および式 (13) から導かれる dv^p , $d\varepsilon_m^p$, $d\varepsilon_a^p$ を式 (27) に代入し、 h_a に関して若干の整理を行うと、Table 1 中の式 (28) に示す硬化関数 h_a を最終的に得ることができる。

(3) 弾性ひずみ増分

せん断ひずみ増分中の弾性成分 $d\varepsilon_{ij}^e$ は、無視できるものとし、弾性ひずみ増分を次式で評価する。

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{3} dv^e \delta_{ij} \dots \dots \dots (29)$$

これにより、式 (1) で定義した全ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ の具体的な評価が可能となる。Table 1 には、応力域、応

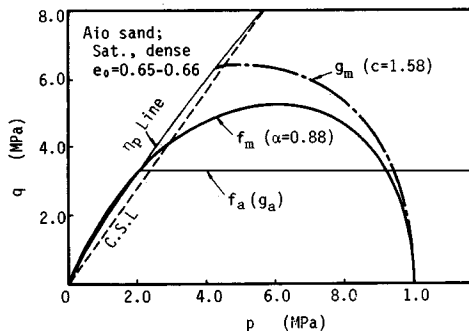


Fig. 9 The shapes of proposed yield curves and plastic potential curves.

力比別にここで示したモデルの降伏関数、塑性ポテンシャル関数、硬化関数をまとめて示している。

また、Fig. 9 は、式 (8)、式 (11)、式 (12)、式 (13) を用いて、 $p-q$ 図上に描いた降伏曲線および塑性ポテンシャル曲線を示したものである。以下、このように求められた降伏関数、塑性ポテンシャル関数を用いて、低・高圧下における砂の応力ひずみ関係の予測を試みる。

5. 応力ひずみ関係の予測

(1) 材料定数の評価

上述した構成式において、応力ひずみ関係を予測するために必要な 9 つの材料定数を Table 2 にまとめて示す。表において、 l , m , v_0 および p_0 は、上述したように広範な応力域における砂の圧縮特性を規定する定数であり、1 つの等方圧縮試験から簡単に求めることができる。また、せん断特性を表わす定数 M , c と破壊包絡線 (最大応力比線) の特性を表わす定数 D , p_{cri} は、2, 3 の側圧一定または p 一定試験から求めることが可能である。 α は、降伏特性を規定する定数であり、B-0 タイプの試験を行うことにより決定できる。また他の材料で求めた α の値¹⁴⁾ から考えれば、 α は、ほぼ $0.6M \sim 0.7M$ で近似できる。以下、Table 2 に示した定数を用いて提案式の三軸圧縮試験結果との適合性について検討を行った。また、側圧一定試験の場合比較のために、修正 Cam-clay 式を用いた実験結果の予測も行なった。その際、用いた材料定数 (λ , κ , M) も Table 2 にまとめて示し

Table 2 Soil constants for Aio sand (dense).

Constants			
l	0.699	α	0.88
m	0.206	M	1.40
v_0	0.0027	c	1.58
D	0.148	λ_1	0.0110
p_{cri}	7.0(MPa)	λ_2	0.0905
p_s	0.1(MPa)	κ	0.0077

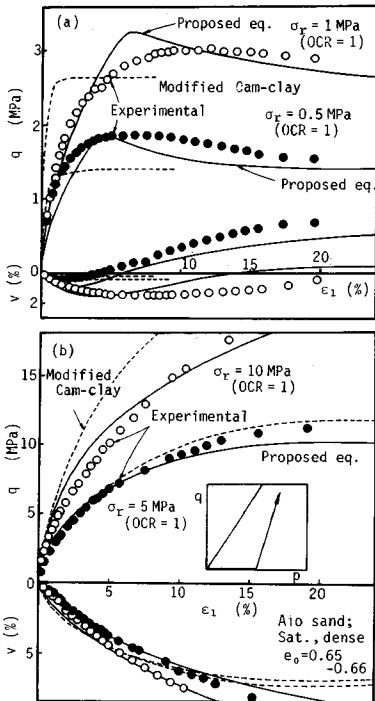


Fig. 10 Prediction of stress-strain curves of normally consolidated sand for constant σ_r tests; (a) low stress region, (b) high stress region.

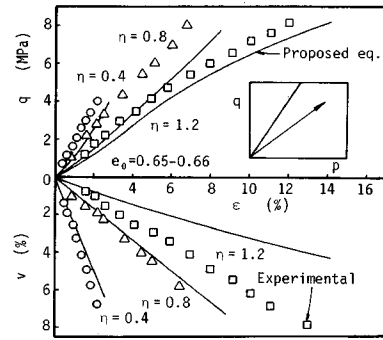


Fig. 12 Prediction of stress-strain curves of normally consolidated sand for constant η tests.

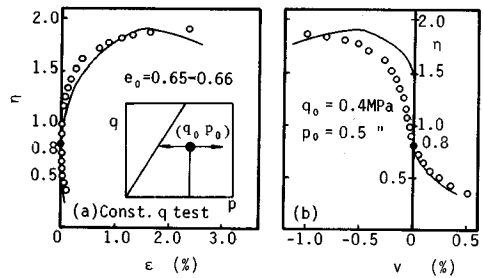


Fig. 13 Prediction of stress-strain curves of constant q tests; (a) η - ϵ curves, (b) η - v curves.

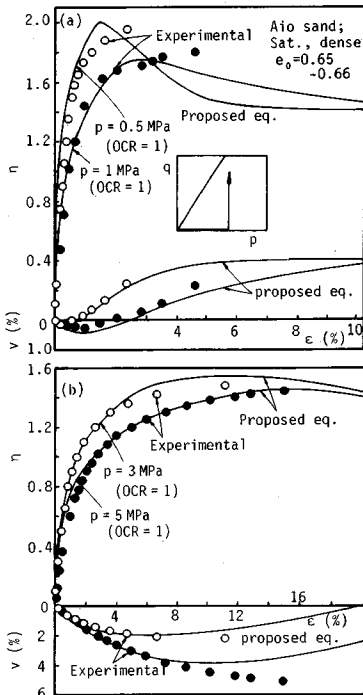


Fig. 11 Prediction of stress-strain curves of normally consolidated sand for constant p tests; (a) low stress region, (b) high stress region.

ているが、 λ は低圧域の場合 $\lambda = \lambda_1$ を、高圧域の場合 $\lambda = \lambda_2$ を用いた。ここに λ_1, λ_2 はそれぞれ低圧域、高圧域における e (間隙比)- $\ln p$ 処女圧縮曲線の勾配、 x は $e - \ln p$ 膨潤曲線の勾配を与える。

(2) 応力ひずみ関係の予測

図一〇(a), (b)は、低および高圧下において正規圧密した密な砂の代表的な側圧一定三軸圧縮試験結果 (q - ϵ_1 - v 関係) を提案式を用いて予測し、実測値と比較したものである。予測結果は q - ϵ_1 , ϵ_1 - v 関係ともに修正 Cam-clay 式に比べ、実験結果との対応性はよく、特にせん断中に生じる体積ひずみ量が側圧の増加に伴って増大している様子をうまく表わしている。次に、Fig. 11(a), (b)は、正規圧密した密な砂の p 一定条件の代表的な三軸圧縮試験結果とその予測結果を比較したものである。(a) 図は、低圧域 ($p = 0.1, 0.5$ MPa), (b) 図は高圧域 ($p = 3.0, 5.0$ MPa) における結果をそれぞれ示している。全体的に予測式は、低・高圧域ともに実験結果の特性をうまく表わしているといえる。Fig. 12は、応力比一定の応力経路で $p = 10$ MPaまで異方圧密した試験の結果を、Fig. 13は図中に示した応力状態から q 一定試験を行った結果を予測したものである。これらの図からも、予測曲線は実験結果とよい対応関係があることが認められる。

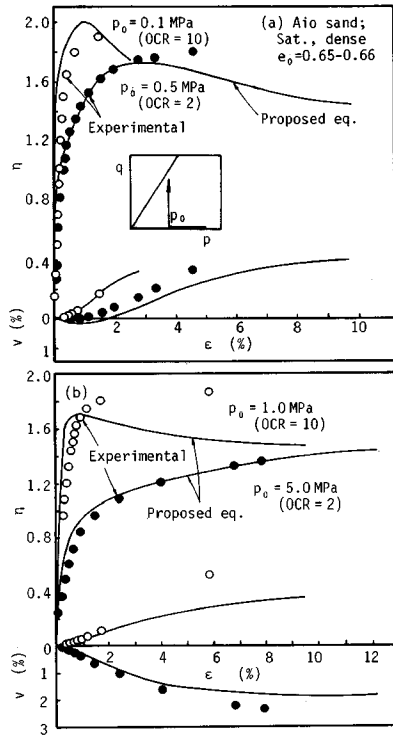


Fig. 14 Prediction of stress-strain curves of over-consolidated sand for constant p tests; (a) low stress region, (b) high stress region.

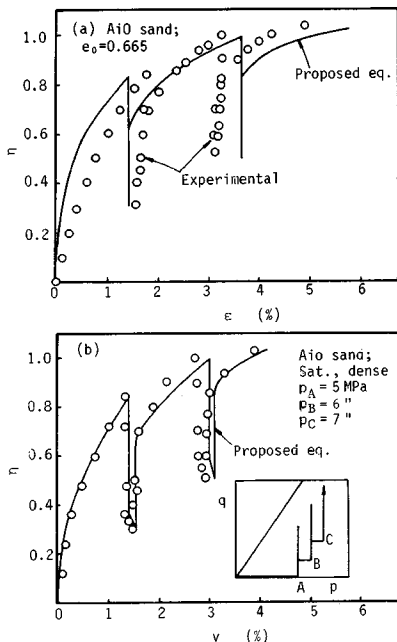


Fig. 15 Prediction of stress-strain curve for multi stage stress path test (B-3 type); (a) η - ϵ curve, (b) η - v curve.

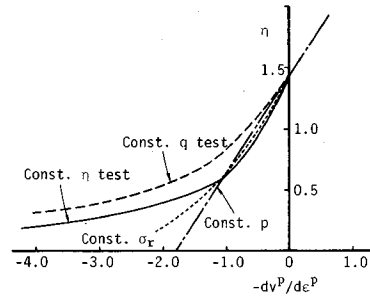


Fig. 16 Predicted relationships between η and dv^p/de^p in triaxial compression tests.

Fig. 14(a), (b) は、予測式の過圧密砂への適用性を調べたものであり、(a) 図は、1 MPa (低圧域) まで等方圧密した後、0.1, 0.5 MPa まで除荷し、 p 一定の条件で三軸圧縮試験を行った結果を示し、(b) 図は、同様の試験を高圧域 (先行圧密圧力 $p_0=10$ MPa) において行った結果を示している。これらの図より、予測式は過圧密比が 2.0, 10.0 の場合の応力ひずみ関係の特性を低・高圧域ともに比較的うまく表現している。Fig. 15 は、B-3 タイプの多段的応力経路試験 (高圧域) に対する実験結果と予測結果との比較を示している。図中には応力経路を示しているが、予測式は、上述の結果と同様、全体的な応力ひずみ関係の特性をうまく評価している。また、Fig. 16 には η - dv^p/de^p 関係の代表的な予測結果を示しているが、予測結果と Fig. 4 に示した実験結果の対応はよいように思われる。このように、提案式は三軸圧縮条件下における静的な載荷除荷過程であれば、低・高圧域において正規圧密および過圧密状態における砂の応力ひずみ挙動をうまく表現できるといえる。

6. 結 論

本研究では、広範な応力域において砂の応力ひずみ関係を評価するための応力ひずみ増分関係式 (構成式) を、低・高圧下における砂の降伏特性、ストレス・ダイレイタンス特性、硬化特性に関する実験的考察を踏まえ、等方硬化則の概念に基づいて構成した。提案した構成式を用いて応力ひずみ関係を予測する場合、9 つの材料定数を必要とするが、これらの材料定数は比較的簡単に決定できる。この構成式は Table 1 に具体的に示しているが、その特徴を簡単にまとめると以下のようである。

(1) 提案式により予測した降伏曲線は、実験的に定めた降伏曲線の特性をうまく表わす。また、提案式は応力比ひずみ増分比特性の応力経路依存性を評価できる。

(2) 提案式は、正規圧密を受けた砂の σ_r 一定、 p 一定および η 一定といった種々の三軸圧縮試験での応力ひずみ関係を低・高圧下において、うまく予測し得る。

(3) 提案式は、正規圧密を受けた砂ばかりでなく、過圧密砂に対する応力ひずみ関係の特性も低・高圧下においてうまく評価し得る。

謝 辞：日頃から暖かい励ましとご指導を賜っている佐賀大学 三浦哲彦教授に感謝の意を表します。また、本研究は文部省科学研究費の補助によるものである。

参 考 文 献

- 1) Vesic, A. S. and Clough, G. B. : Behavior of Granular Materials under High Stresses, Proc. ASCE, Vol. 94, No. SM 3, pp. 661~688, 1968.
- 2) Lee, K. L. and Seed, H. B. : Drained Strength characteristics of Sands, Proc. ASCE, Vol. 93, No. SM 6, 1967.
- 3) 三浦哲彦・山内豊聡：高拘束圧下における標準砂の排水せん断特性について，土木学会論文報告集，No. 193, pp. 69~79, 1971.
- 4) 三浦哲彦・山内豊聡：砂のせん断特性に及ぼす粒子破砕の影響，土木学会論文報告集，No. 260, pp. 109~118, 1977.
- 5) Schofield, A. N. and Wroth, C. P. : Critical State Soil Mechanics, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1968.
- 6) Roscoe, K. H. and Burland, J. B. : On the Generalized Stress Strain Behaviour of "Wet" Clay, Engineering Plasticity, Cambridge Univ. Press, pp. 535~609, 1968.
- 7) Poorooshasb, H. B. : Deformation of Sand in Triaxial Compression, Proc. 4th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 1, pp. 63~66, 1971.
- 8) Nova, R. and Wood, D. M. : A Constitutive Model for Sand in Triaxial Compression, Int., Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics, Vol. 13, pp. 255~278, 1979.
- 9) Nishi, K. and Esashi, Y. : Stress-Strain Relationships of Sand based on Elasto-Plasticity Theory, Proc. of JSCE, No. 280, pp. 111~122, 1978.
- 10) Lade, P. V. : Elasto-plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless soils with Curved Yield Surfaces, Int. J. Solids and Structure, Vol. 13, pp. 1019~1035, 1977.
- 11) Vermeer, P. A. : A Double Hardening Model for Sand, Geotechnique, Vol. 28, No. 4, pp. 413~433, 1978.
- 12) Adachi, T. and Oka, F. : Constitutive equations for sands and over-consolidated clays, and assigned works for sand, Int. Workshop on Constitutive Relations for Soils, Grenoble, pp. 141~157, 1982.
- 13) Mroz, Z. and Pietruszczak, S. T. : A Constitutive Model for Sand with Anisotropic Hardening Rule.
- 14) Mroz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C. : Application of an Anisotropic Hardening Model in the Analysis of Elasto-plastic Deformation of soils, Geotechnique, Vol. 29, pp. 1~34, 1979.
- 15) 春山元寿・北村良介・川原克朗：砂質土の構成式について，土木学会第 38 回年次学術講演概要集，pp. 35~36, 1983.
- 16) 北村良介・春山元寿・高橋秀一：Two-Surface モデルによる地盤材料の構成式について（第 2 報），土木学会第 39 回年次学術講演概要集，pp. 5~6, 1984.
- 17) 三浦哲彦・安福規之：砂，礫の応力ひずみ特性について，山口大学工学部研究報告，Vol. 34, No. 1, pp. 47~54, 1983.
- 18) Miura, N., Murata, H. and Yasufuku, N. : Stress-Strain Characteristics of Sand in a Particle-Crushing Region, Soils and Foundation, Vol. 24, No. 1, pp. 77~89, 1984.
- 19) 村田秀一・兵動正幸・安福規之：低・高圧下における密な砂の降伏特性，土木学会論文報告集，No. 382, pp. 183~192, 1987.
- 20) Prevost, J. H. and Hoeg, K. : Effective Stress-Strain-Strength Model for Soils, Proc. ASCE, Vol. 101, No. GT 3, pp. 259~278, 1975.
- 21) Miura, N., Yasufuku, N. and Yamamoto, T. : Yielding Characteristics of Sand under Triaxial Compression and Extension Stresses, Technology Reports on the Yamaguchi University, Vol. 3, No. 1, 1982.
- 22) Tatsuoka, F. and Ishihara, K. : Yielding of Sand in Triaxial Compression, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 2, pp. 63~76, 1974.
- 23) 三浦哲彦・山本紀之：粒子破砕領域における砂の降伏曲線について，土木学会論文報告集，No. 326, pp. 83~90, 1982.
- 24) 三浦哲彦・山本哲朗：砂の高圧三軸圧縮試験の結果に及ぼす 2, 3 の要因について，土質工学論文報告集，Vol. 16, No. 3, pp. 123~128, 1976.
- 25) 橋口公一：摩擦性塑性体の降伏について一硬化塑性法則一，土木学会第 21 回年次学術講演会概要集，pp. 105~108, 1972.
- 26) 橋口公一：土の構成式に関する現況総括 7 弾塑性のアプローチ，土質学会論文報告集，Vol. 18, No. 4, pp. 131~142, 1978.
- 27) Fukushima, S. and Tatsuoka, F. : Strength and Deformation Characteristics of Saturated Sand at Extremely Low Pressures, Soils and Foundations, Vol. 24, No. 4, pp. 30~48, 1984.
- 28) Moroto, N. : A New Parameter to Measure Degree of Shear Deformation of Granular Material in Triaxial Compression Tests, Soils and Foundation, Vol. 16, No. 4, pp. 1~9, 1976.
- 29) 三浦哲彦・岡田 進：砂の応力-ひずみ挙動について，山口大学工学部研究報告，Vol. 26, No. 1, pp. 35~42, 1975.
- 30) 三浦哲彦：高圧下の砂の応力-ひずみ関係に関する考察，土木学会論文報告集，No. 282, pp. 127~130, 1979.

(1987. 6. 26・受付)