

## 散逸関数に基づく粒状体の流れ則の誘導

## ON THE DERIVATION OF FLOW RULES FOR GRANULAR MATERIALS BASED ON DISSIPATION FUNCTIONS

岸野 佑次\*

By Yuji KISHINO

Motivated by Ziegler's extremum principle, the author proposed a new hypothesis which leads to flow rules for granular materials as well as stress-dilatancy relationships. In this theory, the dissipation function has some specific characters so that the dissipation mechanism of friction can be taken into account. The simplest form of the function is obtained by generalizing Roscoe's dissipation energy and it gives the identical flow rule with Lévy-Mises relation for the metal plasticity. Another type of dissipation function is introduced through the microscopical consideration of frictional energy in granular assemblies. The corresponding flow rule seems agreeable with the plastic behaviors of granular materials observed through experiments in the past.

*Keywords: granular materials, dissipation function, extremum principle, flow rule, stress-dilatancy relationship*

## 1. ま え が き

粒状体は、それを構成する粒子が相互に位置を変えることができるので、他の材料と著しく異なった力学特性を示す。たとえば、粒状体がせん断を受けるとき、少なくとも一部の粒子の間には幾何学的適合条件に支配されたすべりが生じるので、変形は必然的に塑性的なものとなる。このことは、従来の金属塑性論のように、ある降伏条件が満たされた後にはじめて塑性変形が生じるという仮定には必ずしも馴染まないのではないかと考えられる。また、金属塑性論においては塑性変形に伴う体積変化はないと仮定しているが、粒状体においては、せん断ひずみとともに体積ひずみを生じることが大きな特徴である。

粒状体の力学を構成する際には、このような力学特性の差異を認識し、単に従来の塑性論の延長上で議論を行うのではなく、少し異なった観点より見直すことが必要であろう。特に、従来の理論やそれらの修正理論を、無理に適用しようとする、意味の明確でないパラメーターが数多く出現するという問題が生じる。このような問題の中には原点に帰って論じることにより解決可能な

ものもあるのではないかと考えられる。

Hill は、金属材料結晶粒子の可能なすべり方向を平均量として把握すれば、塑性ポテンシャルと降伏関数との間の関連づけが可能であると述べている<sup>1)</sup>。このように、塑性変形を微視的な立場から考察することは、材料の巨視的な力学特性を理論的に定式化するうえで重要なことであろう。粒状体においても、すべりのメカニズムを数理的に表現することなどにより、構成則の理論的な誘導がかなりの程度可能であると考えられるが、実際に応力ダイレイタンスー関係をはじめとして種々の理論的な考察やモデルの提案が行われている<sup>2)-6)</sup>。

本文は、従来の塑性ポテンシャルに代えて、ひずみ増分を独立変数とする散逸関数を用いて流れ則を誘導する方法を論じ、粒状体への応用を示したものである。本文においては、まず、Coulomb の摩擦則を反映することの可能な散逸関数の性質について考察し、Ziegler の最大原理<sup>7)</sup>を修正した新しい仮説を提起する。次に、この仮説に基づいた流れ則の一般的誘導方法を示すとともに、共軸性が成立する場合について、Lode のパラメーターを用いた方程式を導く。さらに、Roscoe らの散逸エネルギー式<sup>4)</sup>や、より微視的な考察を通して著者が提案した散逸関数<sup>6)</sup>について、実際に流れ則や応力ダイレイタンスー関係式を誘導し考察を加える。なお、本文に

\* 正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科  
(〒980 仙台市荒巻字青葉)

においては、簡単のため、粒状体の塑性変形のみを対象としている。

2. 粒状体の流れ則の基本的考え方

本文においては、せん断に伴う摩擦性の変形にのみ着目し、弾性的変形や圧密現象、さらに、粘性に支配される挙動は考慮しないこととする。また粒子の破碎も考慮しない。粒状体の変形をこのように限定すると、応力のする仕事は粒子充填構造に規定された粒子間すべりによりすべて散逸されることになる。この制約に最も近い载荷条件は平均拘束圧一定の排水载荷試験である。平均拘束圧の変化や反転载荷等に伴う弾性ひずみが無視できない場合には、これを別途考慮したうえで重ね合わせにより全ひずみを求めればよい。以下の議論においては、変形はすべて塑性的であるので、弾性域と塑性域を区別する降伏曲面等の概念は用いない。また、扱う変量はすべて塑性変形に関連した量であるので、通常弾性変形に関する量と区別するために用いられる添字の  $p$  は省略する。

(1) 散逸エネルギーとエネルギー保存則

応力を  $\sigma_{ij}$ 、ひずみ増分を  $d\epsilon_{ij}$  (いずれも圧縮を正とする) と置く。さらに等方応力を  $p$ 、体積ひずみ増分を  $d\epsilon_v$ 、偏差成分を  $\sigma'_{ij}$ 、 $d\epsilon'_{ij}$  とすれば次式が成立する。

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \dots\dots\dots (1)$$

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_v\delta_{ij}/3 + d\epsilon'_{ij} \dots\dots\dots (2)$$

また、応力のする仕事の増分は単位体積当たり、

$$dW = pd\epsilon_v + dW' \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。ここに、

$$dW' = \sigma'_{ij}d\epsilon'_{ij} \dots\dots\dots (4)$$

は偏差応力のする仕事の増分である。

いま、ある応力状態下のある粒子充填構造をもつ粒状体に変形が加わった際の散逸エネルギー増分は、ひずみ増分の偏差部分のみを独立変数と考えた関数により十分正確に表現できると仮定する。したがって、与えられた応力を固定して考えれば、散逸エネルギー増分は

$$dD = \Phi(d\epsilon'_{ij}) \dots\dots\dots (5)$$

と表わされる。右辺の  $\Phi$  は散逸関数であり、単位体積当たりの量で与えられる。 $\Phi$  は一般に応力を係数に含む関数であるが、流れ則を誘導する際には、 $\Phi$  をひずみ増分のみ関数と考える。すなわち、ある応力状態において、ひずみ増分空間のプローブクトルを変化させることにより  $\Phi$  に基づく最適な流れ則を定めることを考える。

塑性変形の不可逆性より

$$\Phi > 0 \dots\dots\dots (6)$$

が要求される。また、摩擦のように変形に関して線形的に散逸が生じる場合の散逸関数は、従来の塑性論にお

ける降伏関数や塑性ポテンシャル関数と異なり、次のような性質をもつ。

$$|\partial\Phi/\partial(d\epsilon'_{ij})| d\epsilon'_{ij} = \Phi \dots\dots\dots (7)$$

この条件を満たす最も簡単な関数は、式(4)のような  $d\epsilon'_{ij}$  の線形な齊次関数であるが、これは式(6)を満たさない。しかし、たとえば、

$$\Phi = c\sqrt{d\epsilon'_{ij}d\epsilon'_{ij}}$$

のような関数形であれば、式(6)、(7)を同時に満たす。なお、一般に、 $\Phi$  は粒状体内の応力や粒子充填構造の変化により関数形が変化し、これにより、塑性論における硬化特性を考慮することも可能である。

式(5)に示したように、体積ひずみは  $dD$  を定めるための独立変数とはなっていないが、せん断変形に伴うダイレイタンスは当然考慮する必要がある。すなわち、散逸エネルギーは偏差成分により決定されるが、散逸の変形の結果として従属的に  $d\epsilon_v$  が生じると考えることとする。式により表わせば、次のようになる。

$$d\epsilon_v = \phi(d\epsilon'_{ij}) \dots\dots\dots (8)$$

ここで、粒状体の弾性変形を無視し、さらに重力の影響や動的効果は無視すれば、エネルギーの保存則は次式で与えられる。

$$dW = dD \dots\dots\dots (9)$$

上式はひずみ増分の成分間に1つの拘束を与える式と解釈することもでき、実際、式(3)、(9)より体積ひずみ増分が次式のように計算される。

$$d\epsilon_v = (dD - dW')/p \dots\dots\dots (10)$$

式(5)の  $\Phi$  を具体的に定めれば、体積ひずみ増分は上式で与えられ、これより式(8)の表示を得る。もし、偏差ひずみ増分に対する流れ則が求まれば、任意の応力状態下の応力ダイレイタンス関係式が得られる。

いま、ひずみ増分により粒状体内部に生じる散逸の程度が散逸エネルギー増分  $dD$  により表わされると考えることにすると、式(9)はある一定の散逸を生じるためにひずみ増分テンソルが満たすべき条件式になっているとみなすこともできよう。粒状体が他の金属材料等と異なる点は、たとえ  $dW' < dD$  であっても、体積ひずみの発生により、この条件が満たされるという点にある。

(2) 垂直性の条件と流れ則

Ziegler は、垂直性の条件より、「式(9)の拘束条件の下に、実際のひずみ速度は与えられた応力による散逸速度を最大にする」という最大散逸速度の原理を導いた<sup>7)</sup>。しかし、この原理は散逸関数が2次形式で表わされる場合には成立するが、式(7)のような性質をもつ散逸関数に適用することはできない。そこで、この原理を散逸エネルギー増分  $dD$  一定の拘束条件の下に  $dW'$  を最大にするという仮説に変更すると、上記の原理の結論を変更することなしに、一般化することが可能である。

この修正された原理は  $dD$  一定の拘束の下に  $pd\varepsilon_v$  を最小にするという条件に等価である。ところで、金属材料の塑性変形の場合、非圧縮性の仮定より  $dW=dW'$  であるので、最大原理が満たされるときには、 $dW'=dD$  が成立し、 $pd\varepsilon_v$  の最小値は実際には零になっていると解釈することもできよう。よって、以上の考察より、粒状体における流れ則を決定するために、次の仮説を設けることを提起する。

仮説：散逸エネルギー増分を一定に保つ拘束の下に、実際の偏差ひずみ増分は偏差応力のする仕事の極値を与える。このとき、体積ひずみ増分は散逸エネルギーと偏差応力のする仕事の差をもとに定めることができる。

この仮説を式で表わせれば次のようになる。

$$\partial F/\partial(d\varepsilon'_{ij})=0 \dots\dots\dots(11)$$

ここに、

$$F=dW'-\lambda dD \dots\dots\dots(12)$$

であり、 $\lambda$  は Lagrange の未定乗数である。また、体積ひずみ増分は式 (10) で与えられる。式 (4)、(5) を上式に代入すると次の流れ則を与える式を得る。

$$\sigma'_{ij}=\lambda\partial\Phi/\partial(d\varepsilon'_{ij}) \dots\dots\dots(13)$$

ここで、式 (7) を考慮すれば、両辺に  $d\varepsilon'_{ij}$  を乗じることにより次式を得る。

$$\lambda=dW'/\Phi \dots\dots\dots(14)$$

ところで、散逸エネルギーの正值性より、金属の塑性変形に対しては、常に  $dW'>0$  (載荷状態) である。しかし、式 (10) より、粒状体においては  $pd\varepsilon_v$  が十分大きい場合に  $dW'$  が負になり得る。このことから、 $dW'<0$  (除荷状態) に対しても極値問題が設定されてもよいように思われる。ただし、除荷の場合の極値は最小値として与えられる。この除荷の場合も前述の仮説や式 (11)、(12) に含まれている。なお、上記仮説において  $dW'$  の最大値や最小値が定まるためには、ひずみ増分空間における  $\Phi$  の等位面が原点より遠ざかる方向に凸である必要がある。

以上により、各応力状態に対する  $\Phi$  を式 (6)、(7) を満たす凸な関数として与えると、その応力状態におけるひずみ増分方向は式 (13) により決定されることになる。よって、応力主軸とひずみ増分主軸の共軸性や非共軸性等は  $\Phi$  の関数形に依存した特性と考えられる。

(3) 共軸性が成立する場合の方程式

主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の大小関係が

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (\text{圧縮正}) \dots\dots\dots(15)$$

であると、次の Lode のパラメーターを導入する。

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \dots\dots\dots(16)$$

$\mu = -1, 1$  は、それぞれ、三軸圧縮、三軸伸張の応力状態を表す。さらに、各主応力方向の主ひずみ増分を、

$d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$  とし、パラメーター

$$\nu = \frac{2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3} \dots\dots\dots(17)$$

を定義する。これらのパラメーターを用いると、 $dW'$  は次のように表わすことができる。

$$dW' = \pm \frac{3+\mu\nu}{\sqrt{3+\mu^2}\sqrt{3+\nu^2}} q d\gamma \dots\dots\dots(18)$$

ここに、

$$d\gamma = \sqrt{2/3} \sqrt{d\varepsilon'_{ij}d\varepsilon'_{ij}} \dots\dots\dots(19)$$

$$q = \sqrt{3/2} \sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} \dots\dots\dots(20)$$

である。なお、式 (18) 右辺の複号は上が載荷時、下が除荷時を表す。以下同様とする。また、散逸エネルギーの増分も  $d\gamma$  と  $\nu$  の関数として、

$$dD = \Phi(d\gamma, \nu) \dots\dots\dots(21)$$

と与えられる。上式中の  $\Phi$  は、式 (7) に対応して、次の性質をもつことになる。

$$\{\partial\Phi/\partial(d\gamma)\}d\gamma = \Phi \dots\dots\dots(22)$$

$dW'$  と  $dD$  が式 (18)、(21) で与えられた場合、式 (12) の  $F$  は次のように置き換えられる。

$$F = \pm \frac{3+\mu\nu}{\sqrt{3+\mu^2}\sqrt{3+\nu^2}} q d\gamma - \lambda\Phi(d\gamma, \nu) \dots\dots\dots(23)$$

上式において、まず、 $d\gamma$  に関する微分を零と置くことにより、式 (22) を考慮すれば、 $\lambda$  を与える式として、式 (14) を得る。また、 $\nu$  に関する微分を零と置いた式および式 (14) より、

$$3(\mu-\nu)\Phi - (3+\nu^2)(3+\mu\nu)\{\partial\Phi/\partial\nu\} = 0 \dots\dots\dots(24)$$

または、これと等価な次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial\nu} \left\{ \frac{\sqrt{3+\nu^2}}{3+\mu\nu} \Phi \right\} = 0 \dots\dots\dots(25)$$

これらの式より、流れ則を与える  $\mu$  と  $\nu$  の関係式が得られる。ところで、式 (17) はある  $\nu$  の値に対して 2通りの解、 $\pm(d\varepsilon'_1, d\varepsilon'_2, d\varepsilon'_3)$ 、があることを示している。これらは  $dW'$  の正負によって、載荷状態または除荷状態に対応していると考えることができよう。

(4) ひずみ増分空間  $\pi$  平面における説明

Fig. 1 は、以上の流れ則の概念をひずみ増分に対する  $\pi$  平面において示したものである。ここでは、 $\Phi$  が  $\mu$  に依存しない場合の等位曲線 ( $\nu$  の一価関数) が描かれている。一般には、流れ則を求めた後に、図のような等位曲線が得られるが、図の曲線のある 1つの  $\mu$  に対するものとみなせば、以下の最大最小の説明は成立する。

実線は載荷状態に対する  $\Phi$  等位曲線を表す。式 (13) は、 $\mu=\mu_0$  で表わされる応力ベクトルに対して、この等位曲線上に終端をもつひずみ増分ベクトルが  $dW'$  を最大にするのは、その終端における外向き法線ベクトルの方向が  $\mu=\mu_0$  の方向と一致する場合であることを示している。また、 $\Phi$  の関数形は載荷および除荷ともに共

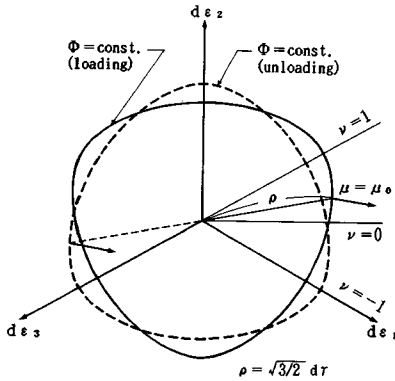


Fig. 1  $\pi$ -plane of strain-increment space.

通であるが、これを  $\pi$  平面に表示した場合、前節に述べた  $\nu$  に対する偏差ひずみの正負 2 値性に対応して、互いに点対称な 2 種類の  $\Phi$  等位曲線になると考えられる。図の破線で示される除荷の場合は、等位線の内向き法線の方向が応力ベクトルの方向と一致することになり、 $dW'$  は最小となる。

なお、粒状体の降伏曲線の動径は三軸圧縮および三軸伸張でそれぞれ極大および極小となるが、載荷時の  $\Phi$  等位曲線の大小は逆である。これは、降伏の生じ難い方向においては、塑性変形を生じるときのせん断応力のレベルが高いので、ある一定の散逸エネルギーを生じさせるためのせん断ひずみの程度が小さくて済むためである。

### 3. Roscoe らの仮定に基づく流れ則

Roscoe らが考察を行った 'Cam-clay' モデル<sup>4)</sup>におけるエネルギーの散逸に関する仮定は、式 (5) の散逸関数  $\Phi$  を定義したものであると考えられる。この定義を一般の応力状態にも適用できるように表現すれば、次式のようになる。

$$\Phi = Mpd\gamma \dots \dots \dots (26)$$

ここに、 $M$  は Roscoe らの用いている定数と同様の材料定数である。上式で与えられる散逸関数は前節の式 (6), (7) を満たしている。この散逸関数の等位曲線をひずみ増分  $\pi$  平面上で表示すれば円になる。

Rowe は、式 (26) のようにせん断ひずみにのみ関与する散逸エネルギー式を勝手に仮定した場合、式の上からは塑性変形に付随して生じるはずの体積変化が現れないという批判を行っている<sup>8)</sup>。しかし、これは Roscoe からも答えているように<sup>4)</sup>、式 (26) 右辺はあくまでも材料内部の散逸機構を表わす式であると考えることができよう。また、Burland は、上式の一般化として、圧密を考慮するために、等方応力のする仕事について修正を行うべきであるとしている<sup>9)</sup>。これは、確かにせん断

に伴うエネルギーとは独立であるが、ここでは、圧密はないものと仮定する。このように、散逸関数  $\Phi$  をあくまでも  $d\epsilon_{ij}$  の関数と考えるならば、式 (26) は  $\Phi$  の最も単純な関数形の仮定であるといえよう。以下、この散逸関数を用いた流れ則について考察する。なお、より合理的な  $\Phi$  の決め方については 4. において述べる。

式 (26) を式 (13) に代入すれば、次式を得る。

$$\sigma'_{ij} = (2\lambda Mp/3)d\epsilon'_{ij}/d\gamma \dots \dots \dots (27)$$

上式は応力主軸とひずみ増分主軸が一致することを示している。同式を辺々乗じることにより

$$q^2 = (\lambda Mp)^2 \dots \dots \dots (28)$$

を得る。一方、式 (14) より

$$\lambda = dW'/(Mpd\gamma) \dots \dots \dots (29)$$

であるので、上下の複合がそれぞれ載荷と除荷に対応するように配慮すれば、 $\lambda$  および  $dW'$  は

$$\lambda = \pm q/(Mp) \dots \dots \dots (30)$$

$$dW' = \pm qd\gamma \dots \dots \dots (31)$$

と求まる。式 (30) を式 (27) に代入すれば、最終的に次の流れ則を得る。

$$d\epsilon'_{ij} = \pm (3\sigma'_{ij}/2q)d\gamma \dots \dots \dots (32)$$

また、式 (10) より体積ひずみ増分は次式となる。

$$d\epsilon_v = (M \mp q/p)d\gamma \dots \dots \dots (33)$$

一方、式 (27) より共軸性が確認できるので、式 (24) をもとに流れ則を求めることもできる。式 (26) をこの式に代入すれば、ただちに次式を得る。

$$\nu = \mu \dots \dots \dots (34)$$

載荷状態の場合について、式 (32) や式 (34) は塑性論における Lévy-Mises の式にはほかならない。また、式 (33) は三軸圧縮や三軸伸張載荷の場合に Roscoe らが得た結果<sup>4)</sup> に一致している。Roscoe らは式の展開に共軸性等をあらかじめ仮定したが、本文の議論に従えば、これらも極値問題の結果として得られることになる。さらに、一般的な応力状態に対して、式 (32) のような一般的な流れ則を合理的に決定することができる。ただし、式 (33) は  $\mu$  に依存しない形となっており、これは多くの実験事実と異なっている<sup>10)</sup>、より一般的な流れ則を得るためには散逸関数  $\Phi$  を精密化する必要がある。

以上の結果は除荷時の流れ則も含んでいるが、本文においては弾性の影響を除外して考察を行っているので、実際の荷重反転などの際に式 (32) がそのまま全ひずみ増分を定めるという保証はない。しかし、少なくとも、塑性ひずみに対しては上式で表わされる傾向を示すものと考えられる。たとえば、式 (33) より、除荷時には  $d\epsilon_v$  が常に正となるが、このことは除荷時の全ひずみの中の塑性部分は圧縮性であることを示唆している。この傾向は、特に、せん断振幅の比較的大きな圧縮伸張繰返し試験において認められている<sup>11)</sup>。

4. 微視的考察による散逸関数と流れ則

ここでは、粒子間の摩擦エネルギーを積分することにより粒状体の散逸関数を求め、これに基づいて流れ則や応力ダイレイタンスー関係式を誘導した。ここに示す考え方は粒状体の微視的な散逸機構を構成則に取り入れる1つの有力な方法であると考えられる。なお、ここでは、応力のピーク点を過ぎた後にみられるような巨視的なすべりを伴う変形は除外し、安定な変形のみを対象とする。

(1) 平均的変形に適合したすべりに基づく散逸関数<sup>(6)</sup>

巨視的なひずみ勾配を無視し得る近傍において、各粒子重心の変位ベクトルの期待値がひずみテンソルと粒子重心の位置座標により決定されるとすると、これより粒子間の相対的すべりも必然的に求まることになる。いま、Fig. 2のように、法線ベクトル  $n_i$  をもつ接触面において接している2粒子AおよびBの間に接触力  $f_i$  が作用しているとす。また、上述のように、ひずみ増分に適合して2粒子の間に生じる相対的すべり増分を  $du_i$  と置く。粒子間のすべりに対してCoulombの摩擦則が成立するとすれば、この接触点における散逸エネルギーは接触力の法線方向成分

$$f_n = f_i n_i \dots\dots\dots (35)$$

および、相対的すべりベクトル増分の絶対値

$$du_n = \sqrt{du_i du_i} \dots\dots\dots (36)$$

に比例する。ここでは、平均的量のみに着目し、粒子回転を無視することとすれば、 $f_n$  は接触面法線方向に作用する垂直応力、

$$\sigma_n = n_i n_j \sigma_{ij} \dots\dots\dots (37)$$

に比例し、 $du_n$  は次式により与えられる接触面方向のせん断ひずみ増分  $d\gamma_n$  に比例すると考えられる。

$$d\gamma_n^2 = \langle (n_i n_j \delta_{kl} - n_i n_j n_k n_l) d\epsilon_{ik} d\epsilon_{jl} \rangle \dots\dots\dots (38)$$

上記の比例関係の係数は接触点の分布密度や粒子径などにより種々変化し得るが、粒子集合体の巨視的な性質を知るための第1次近似としては、一定と考えてもよいで

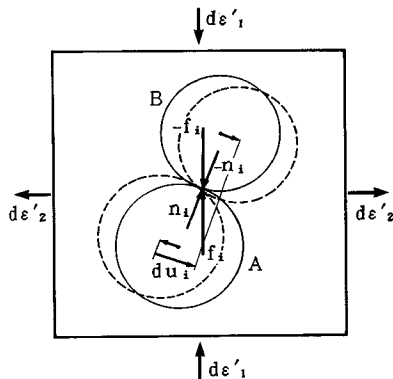


Fig. 2 Relative slip between grains.

あろう。なお、 $d\gamma_n$  には  $d\epsilon_{ij}$  の等方成分は寄与しないので、散逸エネルギーはせん断ひずみのみを独立変数として定められることになる。粒状体全体の散逸エネルギーは個々の散逸エネルギーの和で与えられ、散逸関数はこれの単位体積当たりの密度である。以上より、散逸関数は  $\sigma_n$  と  $d\gamma_n$  の方向性を考慮した平均として、次のように表現される。

$$\Phi = \int_A w(n_i) \sigma_n d\gamma_n dA \dots\dots\dots (39)$$

ここに、 $A$  は単位球面とする。また、 $w(n_i)$  は、一般に、粒子間摩擦係数および粒子充填構造により決定される重み関数である。上式において、 $\sigma_n$ 、 $d\gamma_n$  は正であるので、式(6)の条件は満たされている。また、式(38)、(39)より、式(7)の条件も満たされていることがわかる。以後の考察においては平均的に等方的な粒子充填構造のみを対象とする。このとき、式(39)は次のように表わすことができる。

$$\Phi = \frac{K}{2\pi} \int_A \sigma_n d\gamma_n dA \dots\dots\dots (40)$$

ここに、 $K$  は式(26)の  $M$  と同様の材料定数である。上式を式(13)に代入すれば、次式を得る。

$$\sigma'_{ij} = \frac{\lambda K}{2\pi} \int_A \frac{\sigma_n S_{ij}}{d\gamma} dA \dots\dots\dots (41)$$

ここに、

$$S_{ij} = n_k n_l (d\epsilon_{jk} - n_i n_j n_k n_l d\epsilon_{kl}) \dots\dots\dots (42)$$

であり、括弧は対称化記号を表わす。いま、主ひずみ増分方向に座標をとれば、 $S_{ij}$  は次式のように表わされる。

$$S_{ij} = n_{(i} n_{j)} \{ (d\epsilon_{i3} + d\epsilon_{j3}) / 2 - n_1^2 d\epsilon_1 - n_2^2 d\epsilon_2 - n_3^2 d\epsilon_3 \} \dots\dots\dots (43)$$

ここに、 $d\epsilon_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) は主ひずみ増分であるが、明らかに偏差主ひずみ増分  $d\epsilon'_i$  を用いても同一の  $S_{ij}$  を与える。なお、指標に付した括弧は総和をとらないことを示す。一方  $\sigma_n$  は次のように分解される。

$$\sigma_n = p + \sigma_{ij} n_i n_j \dots\dots\dots (44)$$

式(41)は単位球面全体の積分であるので、 $n_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) に関する奇数回の積の積分は零となる。したがって、式(43)、(44)より、式(41)は  $i \neq j$  に対して  $\sigma'_{ij} = C \sigma_{ij}$  ( $C$  は  $d\epsilon_i$  を含む式) となり、これより、 $i \neq j$  に対して  $\sigma'_{ij} = 0$  を導くことができる。すなわち、考えている座標は応力に関しても主軸となっている。このことから、式(40)で与えられる散逸関数に基づく流れ則においては、Roscoeらの場合と同様に、応力とひずみ増分間の共軸性が成立する。

(2) べき級数近似による流れ則の誘導

前項で示したように、共軸性が成立するので、2.(3)に記したパラメーターを用いて散逸関数を表わす。まず、式(38)の  $d\gamma_n$  は次のように表わすことができる。

$$d\gamma_n = \Gamma(\nu) |d\epsilon_1 - d\epsilon_3| / 2 \dots\dots\dots (45)$$

ここに、

$$\Gamma(\nu)^2 = (1-\nu)^2 n_1^2 + (1+\nu)^2 n_3^2 - [(1-\nu)n_1^2 - (1+\nu)n_3^2]^2 \dots\dots\dots (46)$$

である。上式の  $\Gamma(\nu)$  を用いれば、式 (40) の  $\Phi$  は次のように表わすことができる。

$$\Phi = (pI_0 + \sigma'_1 I_1 + \sigma'_2 I_2 + \sigma'_3 I_3) |d\epsilon_1 - d\epsilon_3| \dots\dots\dots (47)$$

ここに、 $\sigma'_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) は偏差主応力であり、 $I_0, I_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) は、次の積分を表わす。

$$I_0(\nu) = \frac{K}{4\pi} \int_A \Gamma(\nu) dA \dots\dots\dots (48)$$

$$I_i(\nu) = \frac{K}{4\pi} \int_A n_i^2 \Gamma(\nu) dA \dots\dots\dots (49)$$

明らかに、 $I_1 + I_2 + I_3 = I_0$  が成立する。これらの積分を解析的に求めることは困難であるが、 $\nu = \pm 1$  における  $I_i$  および  $dI_i/d\nu$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) は容易に積分することができる。よって、 $\nu = \pm 1$  以外の  $\nu$  に対する積分はこれらの結果を用いて、べき級数近似により求めることとした。このようにして得られた  $I_i$  の式を次に示す。

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= K(7 + \nu^2) / 12 \\ I_1 &= K(101 - 19\nu + 11\nu^2 + 3\nu^3) / 480 \\ I_2 &= K(13 + 3\nu^3) / 80 \\ I_3 &= K(101 + 19\nu + 11\nu^2 - 3\nu^3) / 480 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

これらを式 (47) に代入し、 $q, dy$  を用いて表わせば、次式を得る。

$$\Phi = K(Gp - Hq) dy \dots\dots\dots (51)$$

ここに、 $G, H$  は次式で与えられる  $\nu$  の関数である。

$$G = \frac{7 + \nu^2}{4\sqrt{3 + \nu^2}} \dots\dots\dots (52)$$

$$H = \frac{23\mu + 57\nu - 7\mu\nu^2 - 9\nu^3}{240\sqrt{3 + \mu^2}\sqrt{3 + \nu^2}} \dots\dots\dots (53)$$

この近似式は 3 軸圧縮ひずみ状態 ( $\nu = -1$ ) と 3 軸伸張ひずみ状態 ( $\nu = 1$ ) に対して厳密な値を与える。

式 (51) の  $\Phi$  を式 (25) に代入すると、 $\nu$  に関する次の 3 次方程式を得る。

$$18R\mu\nu^3 + (\mu + 81R + 7R\mu^2)\nu^2 + (6 + 42R\mu)\nu - 7\mu - 171R + 23R\mu^2 = 0 \dots\dots\dots (54)$$

ここに、 $R$  は

$$R = q / (60\sqrt{3 + \mu^2} p) \dots\dots\dots (55)$$

で与えられる定数である。この方程式より、 $\mu = \pm 1$  に対して  $\nu = \pm 1$  となることが、仮定ではなく、結果として得られる。 $-1 < \mu < 1$  の場合の解は  $-1 < \nu < 1$  の範囲より選べばよい。この方程式に材料定数  $K$  は関与していないが、せん断応力と平均応力の比  $q/p$  をパラメーターとして解を求める必要がある。

$r = q/p = 0 \sim 1.5$  に対して式 (54) の解を数値的に求めた。 $r = 0$  は等方応力状態、 $r = 1.5$  は三軸伸張の  $\sigma_3$

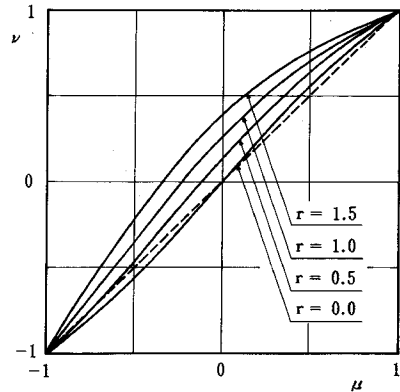


Fig. 3 Calculated  $\mu$ - $\nu$  relationship.

が零となる極端な場合である。求めた  $\mu$  と  $\nu$  の関係を Fig. 3 に示す。図中の破線は Lévy-Mises の式を表わしており、Roscoe らの散逸関数より出発した場合の関係である。この図より  $r=0$  の場合でも  $\mu$  と  $\nu$  の関係は Lévy-Mises の式と異なっている。また、 $\mu$  を固定して考えると、 $r$  の増大とともにひずみ増分ベクトルの方向が三軸伸張の方向に傾いていく傾向が観察される。この傾向は従来の実験結果とも一致している<sup>12), 13)</sup>。また、 $\mu$  と  $\nu$  の関係は、式 (54) からわかるように、材料定数  $K$  に依存しないことが注目される。なお、金属の場合も、平面ひずみおよび一軸伸張以外の  $0 < \mu < 1$  に対して、Lévy-Mises の式よりずれる傾向があると指摘されている<sup>1)</sup>。しかし、ずれの方向は同図の  $r=0$  の場合と逆である。この理由はエネルギーの散逸機構の相違によるものと考えられる。

式 (51) を変形し、上で得られた関係により  $\mu$  を消去すれば、次式が得られる。

$$dy = f(\nu) \Phi / (Kp) \dots\dots\dots (56)$$

ここに、 $f(\nu)$  は次の  $\nu$  の関数を表わす。

$$f(\nu) = 1 / (G - Hq/p) \dots\dots\dots (57)$$

式 (56) は、 $\Phi$  を一定と考えたとき、ひずみ増分  $\pi$  平面における  $\Phi$  の等位曲線を与える。上式と式 (26) を比較すると、形式的に  $K = f(\nu)M$  と置くことができる。すなわち、Roscoe らの定数をこの式により定まる変数とみなせば、本節の  $\Phi$  等位曲線となる。Fig. 4 は載荷に対する  $f(\nu)$  のグラフを Fig. 3 と同様の  $r = q/p$  の比について示したものである。 $r=0$  の場合、 $\nu = \pm 1$  において  $f=1$  でそれらの中間では若干 1 より小さな値となっている。いずれの場合もこれらの曲線は  $\pi$  平面上で外側に凸な曲線となっている。

式 (50) は、前述のように、 $\nu = \pm 1$  においては厳密な値を与えるが、その他では近似値を与える。中間の近似値の精度を確かめる目的で、式 (48) の高精度の数値積分を行い  $f$  の値を求めた。最も大きな誤差が予想さ

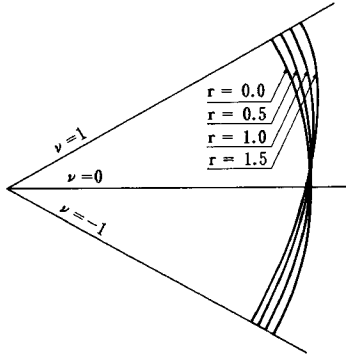


Fig. 4 Equi-dissipation curves.

れる  $\nu=0$  の場合、正解の  $f=0.973$  に対して式 (50) により定まる近似値は  $f=0.990$  と 3% 弱の誤差であった。したがって、 $\mu$  と  $\nu$  の関係式も  $\nu=\pm 1$  以外では少しずれることになる。しかし、全体的な傾向として大きく変わることはないと考えられる。

(3) 応力ダイレイタンスー関係

体積ひずみ増分は、エネルギー保存則より誘導された式 (10) に式 (18), (51) を代入することにより、次のように表わすことができる。

$$d\varepsilon_v = |KG - (KH \pm J)q/p| d\gamma \dots\dots\dots(58)$$

ここに、 $G, H$  は式 (52), (53) の関数、 $J$  は

$$J = \frac{3 + \mu\nu}{\sqrt{3 + \mu^2} \sqrt{3 + \nu^2}} \dots\dots\dots(59)$$

を表わし、式 (58) の複号は正が載荷、負が除荷に対応している。この式に前節で求めた  $\mu$  と  $\nu$  の関係を代入すれば応力ダイレイタンスー関係が求まる。

ここでは、三軸圧縮および三軸伸張の場合についての結果のみを示し、説明を加えることとする。三軸圧縮および三軸伸張の場合、 $q$  および  $d\gamma$  は、それぞれ、次の量を表わす。

$$q = |\sigma_1 - \sigma_3| \dots\dots\dots(60)$$

$$d\gamma = (2/3) |d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3| \dots\dots\dots(61)$$

式 (58) に  $\mu=\nu=-1$  および  $\mu=\nu=1$  を代入することにより、次の応力ダイレイタンスー関係式を得る。

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{\pm 1 - K/15} \left( K - \frac{d\varepsilon_v}{d\gamma} \right) \quad (\text{三軸圧縮}) \dots\dots\dots(62)$$

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{\pm 1 + K/15} \left( K - \frac{d\varepsilon_v}{d\gamma} \right) \quad (\text{三軸伸張}) \dots\dots\dots(63)$$

ここに、複号は正が載荷、負が除荷に対応している。

Fig. 5 に  $K=1$  の場合の応力ダイレイタンスー関係を示す。この図より明らかなように、Roscoe らの場合と異なり、三軸圧縮と三軸伸張とで異なった関係が導かれていることがわかる。載荷の場合、三軸伸張に比べて三軸圧縮に対するグラフの勾配が大である。この傾向は従来の実験データとも一致している<sup>5), 12)</sup>。なお、接触力や

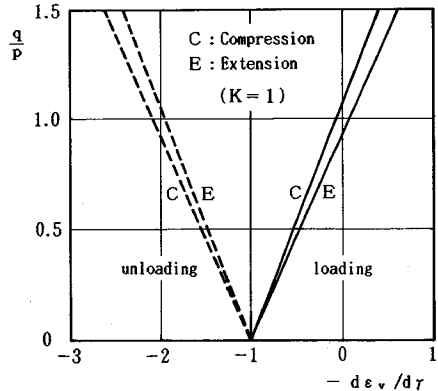


Fig. 5 Stress-dilatancy relationship.

すべりベクトルの分散を考慮して散逸関数をさらに修正すると、三軸圧縮と三軸伸張の差をより広げる結果が得られることを確認している<sup>6)</sup>。

Fig. 5 には除荷の場合の結果も含まれている。除荷の場合のグラフは  $-d\varepsilon_v/d\gamma = -K$  を対称軸として載荷のグラフを折り返したものとなっている。ただし、除荷の場合、グラフの勾配の絶対値は三軸伸張の方が大である。また、常に  $d\varepsilon_v/d\gamma > 0$  が成立している。このことは、式 (61) より  $d\gamma > 0$  であるので、除荷状態においては変形によって常に体積が減少することを示している。3. の最後にも述べたように、本文においては弾性変形を無視しているので、この結論は全ひずみに対しては成立しないが、塑性ひずみに関してはこのような傾向があるものと考えられる。この点に関してはさらに実際との対応を詳しく調べたい。

5. あとがき

粒状体が形を保つためには、外部より拘束圧が加えられる必要がある。本文において提起した仮説は、この拘束圧の等方部分のする仕事が載荷時には最小になるという極値原理と等価である。この仮説の正当性は導かれる結論により判断されることになるが、4. に示した結果は従来の実験にもよく合っているように思われる。

本理論のようにひずみ増分を独立変数とする散逸関数を用いた塑性理論は、従来の塑性ポテンシャルを用いた理論に比べて、応用上の自由度が大きいと考えられる。この理由は、塑性ポテンシャルが応力空間上で応力のみ関数として大域的に定義される必要があるのに対し、散逸関数は、応力とひずみ増分の適当な組合せにより、局所的な関数として定義されればよいからである。もちろん、本理論により得られた流れ則を用いれば、Fig. 4 のような散逸関数の等位曲線を描くことは可能である。しかし、これはあくまでも結果であって、始めからこの

関数形が明示されている必要はない。

本文に示したように、散逸関数には微視的な散逸機構を反映させやすいという利点があると考えられる。4. では Coulomb の摩擦則の統計的な考察により散逸関数を誘導し、粒状体の特性を表わし得る流れ則を得た。ここで設定した材料定数は応力ダイレイタンス式に含まれる  $K$  のみである。また、偏差成分間の流れ則には材料定数が全く含まれていないことが注目される。4. の散逸関数はやや複雑であるが、これを単純化するには SMP<sup>5)</sup> 等の概念を用いて散逸関数を誘導することも可能である。本文において対象外とした軟化現象等についても、適当な散逸関数が求まれば、流れ則が得られることになる。

粒状体の応力-ひずみ関係を完結させるためには、時間依存性を無視した場合においても、硬化特性や弾性等の影響を考慮する必要がある。硬化特性については、たとえば、せん断ひずみ  $\gamma$  と散逸エネルギー  $D$  の関係を実験等により知ることができれば、これを利用することも可能であろう。一方、硬化は粒子充填構造の変化に伴って生じると考えられるので、本文においては定数とみなした式 (39) の重み関数を粒子構造の変化に応じて定めることができれば、異方性の影響も考慮した硬化特性が微視的立場から定式化されることになる。その他、弾性変形の影響や圧密等の体積変化に伴う散逸機構については別途検討する必要がある。また、従来理論的に明確にされていない除荷に伴う塑性変形についても1つの理論づけを試みたが、なお検討の余地があると思われる。

最後に、日頃有益なご助言を頂いております東北大学工学部土木工学科教授 佐武正雄博士に深く感謝申し上げます。

#### 参 考 文 献

- 1) R. ヒル (鷲津久一郎・山田嘉昭・工藤英明共訳)：塑性学，培風館，1954.
- 2) Rowe, P. W. : The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact, Proc. Roy. Soc. A, Vol. 269, pp. 500~527, 1962.
- 3) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A. : Yielding of clays in states wetter than critical, Géotechnique, Vol. 13, No. 3, pp. 211~240, 1963.
- 4) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A. : Correspondence, Géotechnique, Vol. 15, No. 1, pp. 127~130, 1965.
- 5) Matsuoka, H. and Nakai, T. : Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses, Proc. JSCE, No. 232, pp. 59~70, 1974.
- 6) Kishino, Y. : A generalized relationship between the stress and the dilatancy in granular materials, Mechanics of Granular Materials/New Models and Constitutive Relations (J. T. Jenkins and M. Satake eds.), Elsevier, pp. 117~126, 1983.
- 7) Ziegler, H. : A possible generalization of Onsager's theory, Proc. IUTAM Symp. on Irreversible Aspects of Continuum Mechanics (H. Parkus and L. I. Sedov, eds.), Springer, Berlin, pp. 411~424, 1968.
- 8) Rowe, P. W., Barden, L. and Lee, I. K. : Energy components during the triaxial cell and direct shear tests, Géotechnique, Vol. 14, No. 3, pp. 247~261, 1964.
- 9) Burland, J. B. : Correspondence, Géotechnique, Vol. 15, No. 2, pp. 211~214, 1965.
- 10) 龍岡文夫：講座，粒状体力学の現状とその応用，2. 粒状体の変形に関する理論的研究について I (塑性論的研究)，土と基礎，Vol. 26, No. 6, pp. 82~89, 1978.
- 11) Tatsuoka, F. and Ishihara, K. : Drained deformation of sand under cyclic stresses reversing direction, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 3, pp. 51~65, 1974.
- 12) 宮森建樹：多軸応力状態における砂のせん断強さと変形特性，土木学会論文報告集，Vol. 255, pp. 81~91, 1976.
- 13) 中井照夫・三原泰司：任意三次元応力径路下の砂のせん断挙動とその解析，土木学会論文集，Vol. 346, III-1, pp. 87~96, 1984.

(1987. 9. 26・受付)