

水文頻度解析における確率分布モデルの評価規準

CRITERIA FOR EVALUATING PROBABILITY DISTRIBUTION MODELS IN HYDROLOGIC FREQUENCY ANALYSIS

宝 馨*・高棹琢馬**

By Kaoru TAKARA and Takuma TAKASAO

This paper proposes a new framework for evaluating probability distribution models used in hydrologic frequency analysis. In the framework, the variance (standard deviation) in estimation of T -year events (quantiles) obtained by the model is incorporated as an evaluation criterion as well as some goodness-of-fit criteria; resampling methods such as the jackknife and the bootstrap are also incorporated to quantify the variance. Using the existing extreme data (annual maxima of k -day precipitation, $k=1, 2, 3$), the authors reveal the insufficiency of the conventional model evaluation which is based on only the goodness of fit. The proposed framework evaluates ten distributions with two or three parameters. Additionally, the relation between the amount of data and the variance (estimation accuracy) is investigated through bootstrap-type resampling.

Keywords: frequency analysis, model evaluation criteria, goodness of fit, variance of T -year events, jackknife, bootstrap

1. まえがき

本論文の究極の目的は、水文頻度解析における1変数確率分布モデルの評価の手順を確立し、より合理的な水工計画の策定に資することである。ここでは、降水量の極値データに多数の確率分布モデルをあてはめた結果を示すとともに、各モデルによって得られる確率水文学の変動性（推定誤差）を明らかにする。「適合度がよく、かつ、確率水文学の変動の小さいモデルが良いモデルである」という観点からモデル評価を試みる。

2. 確率分布モデルのあてはめとその評価の手順

当該水文学のデータが与えられたとき、その水文学量に従う確率分布を決定するには、大略以下のような手順を踏むのが通例である。

- ① データの等質性・独立性などに関して、水文学的あるいは確率統計学的観点から検討する [データの吟味]。
- ② ヒストグラムや分布曲線を描き大体の分布形状を

把握したのち、適当と思われる確率分布モデルをいくつか選ぶ [候補モデルの列挙]。

- ③ データにそれらのモデルをあてはめる。この際、何らかの方法で母数を推定する [母数推定]。
- ④ モデルの良否を何らかの規準により比較検討し、最も良いと思われるモデルを選ぶ [モデル評価]。

これら一連の手順は必ずしも確立されたものではなく、種々の解決すべき問題を残している¹⁾が、ここでの検討の便宜上、次のような取扱いをする。

年最大 k 日降水量 ($k=1, 2, 3$) という極値データを対象とするので、データの等質性・独立性は満足されるものと仮定する。候補モデルとして、次の10種を挙げる。正規分布 (2母数)、対数正規分布 (2母数, 3母数)、Pearson III型分布 (2母数, 3母数)、対数 Pearson III型分布 (3母数)、平方根指数型最大値分布 (2母数)²⁾、Gumbel分布 (2母数)、対数 Gumbel分布 (2母数, 3母数)。なお、データの対数変換には常用対数を用いる。また、母数推定はすべての分布について最尤法によることとする。

問題は、上記の手順④である。従来はデータとモデルの適合度をモデルの評価規準としてきた。たとえば、確率紙上にプロットしたデータが直線上に並んでいるかどうか、目視による一致性 (visual consistency) やデー

* 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学科
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科 (同上)

たと公平線 (fair curve) との誤差二乗和によって判断したり、 χ^2 検定や Kolmogorov-Smirnov 検定のような適合度検定手法を用いたりすることもある。このように適合度によりモデルを評価しようとする場合、適合度の優れたモデルがただ1つだけ定まればよい。ところが、当該水流量に対して同程度の適合度を示すモデルが複数個存在し、それらが異なる確率水流量を与えることがある。また、規準ごとに最良とみなされるモデルが異なることがある。こうした場合、どのモデルを最終的に採用すればよいのかについて、明確な提示がなされてこなかった。すなわち、適合度はモデル評価の規準としては不十分であり、何らかの新たな規準が必要である。

本研究の主眼はまさにこの点にあり、確率水流量の変動性をモデル評価の規準とすることを提案する。ここで著者らが強調したいのは、データの蓄積が進んでも確率水流量が大きく変動しないような確率分布モデルが望ましいということである。なぜならば、データの蓄積により確率水流量が大きく変動すると、その都度水工計画の大幅な見直しを要請されることになるからである。

したがって、ここでは次のようなモデル評価の手順を考えてみた。

- ① データの吟味 (前述)
- ② 候補モデルの列挙 (前述)
- ③ 母数推定 (前述)
- ④ 候補モデルの screening (適合度の悪いモデルを候補モデルから除外する。)
- ⑤ 確率水流量の変動性の検討 (④で除外されなかったモデルについて、リサンプリング手法 (後述) を用いて確率水流量の変動性を調べる。)
- ⑥ 最終モデルの決定 (確率水流量の変動が最も小さいモデルを採択する。)

以下、3. では上記③④について、4. では⑤⑥について詳述する。

3. 母数推定と適合度評価

確率分布モデルの母数推定法には、確率紙を用いる図式法や、最尤法・積率法などの解析的方法があり、成書に詳しい^{3)~5)}。ここでは、すべてのモデルに対して最尤法を用いる。推定量に望まれる性質として不偏性・有効性・一致性・十分性がある。最尤法は、標本が大きい (データ数が多い) 場合、これら4つの性質を近似的に満足する推定量を与える。小標本の場合には最尤法は必ずしも良い推定量を与えない。こうした場合に有効な方法として PWM (Probability Weighted Moments) 法が提案されている⁶⁾。Jain and Singh⁷⁾ は、Gumbel 分布に対して積率法・最尤法・PWM 法など7種の推定法を比較検討し、最尤法が一番優れているが積率法や

PWM 法も最尤法に比べて顕著な差異があるわけではないと結論している。

変数 X の確率密度関数を $f(x; \theta)$ とし (θ : p 個の母数からなるベクトル)、 N 個の独立な観測データ (変数 X の実現値) を x_1, x_2, \dots, x_N とするとき、

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i; \theta) \dots \dots \dots (1)$$

とおく。この $L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta)$ を θ の関数とみなして尤度関数といい、これを最大にするような母数 $\hat{\theta}$ を求めるのが最尤法である。 $\hat{\theta}$ を θ の最尤推定値といい、解析的には、次の p 元連立方程式を解いて求める。

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta)}{\partial \theta_j} = 0; j=1, \dots, p \dots \dots \dots (2)$$

θ_j は母数ベクトル θ の要素 (それぞれの母数) である。

分布形によっては式 (2) は複雑になる。ほぼ30年前のことになるが、Gumbel は「最尤法は極値分布の場合非常に複雑であり、日常業務には好ましくないほど余計な数字の仕事を必要とする」と述べている⁸⁾。しかしながら、計算機の発達した今日、最尤法は容易に実現できるようになった。尤度関数の最大化問題は、計算機上で基本的な最適化プログラムをコールすることにより瞬時に解くことができるのである。たとえば、改訂準ニュートン法による多変数関数の極小化プログラム DMINF 1⁹⁾ を利用して、大阪の年最大日降水量のデータ (1889~1980年の92年間)⁵⁾ に前述の10個の分布モデルすべてをあてはめるのに要する計算時間は、京都大学大型計算機センターの FACOM M-382 で約6s、M-780 で約3sであった。以下、最尤法にはすべて DMINF 1 を用いた。その際、収束判定条件は同プログラムの標準値を採用した。

(1) 目視による適合度評価

あてはめた分布の適合度の良否をみるには、確率紙を利用したり、データのヒストグラムと確率密度曲線を描けばよい。確率紙の場合は、分布ごとに異なる確率紙上にデータをプロットし、各確率紙を見比べることになる。また、3母数の分布の確率紙の作成は多少煩雑である。一方、ヒストグラムと確率密度曲線を描く場合は、1枚の図面上で複数の分布を比較できる。

前述の大阪のデータにあてはめた結果を Fig. 1 に示す。適合度のよくない正規分布、Pearson III型分布 (2母数)、対数 Gumbel 分布 (2母数) は図示していない。Fig. 1 に示した7つの分布のうち、ピーク付近でよく適合しているようにみえるのは、対数正規分布 (3母数)、平方根指数型最大値分布 (2母数、SQRT-ET-max と記した)、対数 Pearson III型分布 (3母数) であるが、目視からだけではこれらの優劣をつけがたい。また、水工計画立案上この場合問題となる非超過確率の大きい部

分(分布の右裾の部分)の適合度についても同じく優劣をつけがたい。

(2) 適合度の数値化による評価

適合度を数値化して比較評価してみる。ここでは、以下に述べる SLSC, MLL, AIC の3つの規準を用いる。

a) SLSC (標準最小二乗規準) 著者らは、最小二乗法によって確率分布モデルをあてはめた場合の適合度規準として次式で与えられる SLSC (standard least-squares criterion) を提案している¹⁰⁾。

$$SLSC = \frac{\sqrt{\xi^2_{\min}}}{|S_{0.99} - S_{0.01}|} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $S_{0.99}, S_{0.01}$:それぞれ非超過確率 0.99, 0.01 に対応する当該分布の標準変量 (standardised or reduced variate), ξ^2 : 順序統計量データ y_i に対応する標準変量 s_i と適当な確率 q_i に対応する標準変量 r_i との差の二乗平均で

$$\xi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s_i - r_i)^2 \dots\dots\dots (4)$$

である (N はデータの個数)。確率 q_i は、プロットイング・ポジション公式として Hazen 公式を用いると、

$q_i = (i-0.5)/N$ である。 ξ^2_{\min} は式 (4) を最小化した値であり、適合度の指標とみなせる。分布形によって標準変量のとり得る値が異なるので、異なる分布相互の比較のために ξ^2_{\min} を標準化したものが式 (3) である。

SLSC の値が小さいほどよく適合していることになる。また、SLSC は、適合度の相対的評価の規準としてだけでなく絶対的評価にも有用である。SLSC ≈ 0.02 であれば良い適合度を示す。SLSC > 0.03 であれば他の分布を試みるべきである¹⁰⁾。すなわち、確率紙にデータをプロットしたり、データのヒストグラムと確率密度曲線を描いたりすることなく、その値を計算するだけで適合度の良否の判定ができるという利点をもつ。

最小二乗法でなく最尤法であてはめを行った場合には、順序統計量 y_i を最尤推定値 $\hat{\theta}$ を用いて変換した標準変量 s_i から式 (4) によって ξ^2 を求め、この ξ^2 を式 (3) に代入して SLSC を求める。

b) MLL (最大対数尤度) 最尤法によって確率分布モデルをあてはめを行った場合には尤度の大きさ自身が適合度の良否の指標となる。最尤法では尤度関数そのものよりもその対数をとったもの(対数尤度)を最大化する方が計算上都合がよいことが多い。こうして得た最大対数尤度 (MLL, maximum log-likelihood) は次のように書ける。

$$MLL = \sum_{i=1}^N \log f(x_i; \hat{\theta}) \dots\dots\dots (5)$$

同じデータに対して、異なる確率分布モデルを最尤法であてはめたとき、MLL の値の大きいモデルが適合度が良いということになる。

さて、対象とする変量の真の分布がわかっているとき、その真の分布を近似するモデルの良し悪しを比較する規準として Kullback-Leibler 情報量と呼ばれるものがある。一般には真の分布は未知であり、その場合には、対数尤度を Kullback-Leibler 情報量の代用とできる¹¹⁾。MLL は単に対数尤度を最大化したものであるだけでなく、情報理論的立場からみた評価規準の1つである。

c) AIC (赤池の情報量規準) 一般に、母数の個数の多い確率分布モデルの方が適合度がよくなることに留意しなければならない。すなわち、母数の個数が増えると、SLSC は小さくなっていくし、MLL は大きくなっていく。したがって、SLSC や MLL などをモデルの評価規準とすると、母数の個数の多いモデルが“良いモデル”であると評価されることになる。モデルを評価する際には、モデルの簡潔さ(式形が複雑でなく計算が簡単なこと、母数の個数が多すぎないこと)も、適合度と同じく基本的な要件である。赤池¹²⁾は、モデル評価に際して母数の個数をも考慮することのできる情報量規準 (AIC, Akaike's information criterion) を提案してい

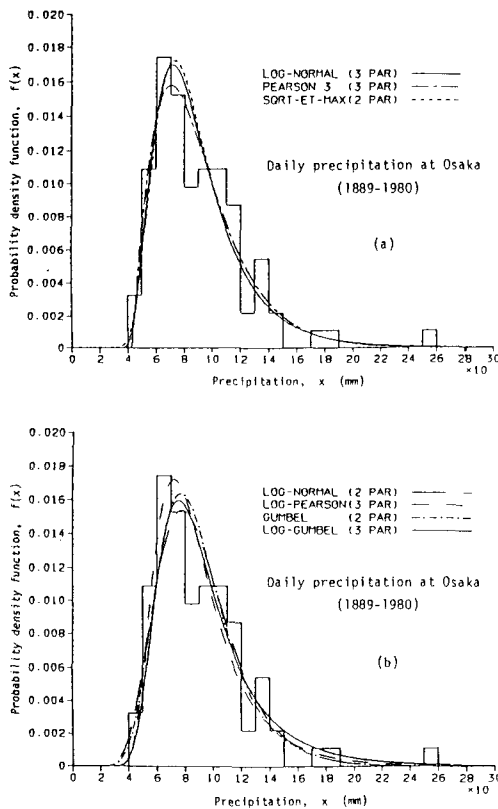


Fig. 1 Distributions fitted by the maximum likelihood method for the annual maxima of daily precipitation at Osaka, for the period 1889-1980 (92 years).

る。

$$AIC = -2 \log(\text{最大尤度}) + 2p = -2 \text{MLL} + 2p \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 p は母数の個数である。母数が増えたと式(6)第2項は大きくなるが、適合度は良くなるので第1項は小さくなる。このトレードオフ関係の中で、AICを最小とするようなモデルが最も“良い”モデルである、とするのが赤池の考え方である。AICも前述の情報理論的考え方から導かれたものであり、その誘導過程や応用例は坂元らの成書¹¹⁾に詳しい。水文流出系への応用としては、時系列モデルの最適次数の決定¹³⁾や流出モデルの評価¹⁴⁾などがある。

大阪のデータの場合、これらの評価規準の値を求めるとTable 1のようになった。表中丸つき数字①, ②, ③は、各評価規準について適合度のよい順位を表わしている。3母数対数正規分布はどの評価規準についてもベスト3に入っており、SLSC, MLLについてはともに第①位、AICについては第②位である。その他の3母数の分布(Pearson III型, 対数 Pearson III型, 対数 Gumbel)はどれかの規準でベスト3に入っている。2母数の分布では、平方根指数型最大値分布はAICが第①位であり、SLSC, MLLについてはともに第4位である。SLSC = 0.02423 であるからまずまずの適合度を示しているといえる。他の2母数の分布はどれもベスト4にも入らず、適合度が相対的に悪い。Table 1をみると、このように、良い評価を得るモデルが規準ごとに異なることがわかる。

結局、モデルの良否を適合度によって評価するのは非常に難しいといえる。適合度は、“良いモデル”のための必要条件であり、モデル群を screening する(適合度の悪いモデルをふるい落とす)規準として有用である。Fig. 1やTable 1に示したように同程度に良い適合度を示すモデルが2つ以上存在する場合には、適合度以外の別の規準が必要となるわけである。

4. 確率水文学の変動性を規準としたモデル評価

年最大値などの極値水文学を取り扱う場合、データと分布全体の適合度も重要であるが、分布の裾の部分の形状や適合度がより重要視される。というのは、分布の裾、すなわち非超過確率の大きい部分(渇水などの場合のように小さな値を対象とするときは、超過確率の大きい部分)のちょっとした形状の違いによって確率水文学の値がかなり異なってくるからであり、実際の種々の水工計画の立案はこの確率水文学の値を基礎としてなされるからである。したがって、2.でも述べたように、データの蓄積が進んでも(言い換えると、データの組合せが異

Table 1 Comparison of ten distributions by SLSC, MLL, and AIC for the annual maxima of daily precipitation at Osaka, for the period 1889-1980 (92 years), fitted by the maximum likelihood method.

Prob. distribution		SLSC	MLL	AIC
Normal	(2p)	0.07937	-450.151	904.301
Log-normal	(3p)	0.01666①	-432.818①	871.636②
Log-normal	(2p)	0.02996	-434.914	873.828
Pearson III	(3p)	0.03765	-432.902②	871.803③
Pearson III	(2p)	0.06116	-438.172	880.344
Log-Pearson III	(3p)	0.01749②	-432.910③	871.819
SQRT-ET-max	(2p)	0.02423	-433.091	870.182①
Gumbel	(2p)	0.04769	-434.414	872.829
Log-Gumbel	(3p)	0.01859③	-433.167	872.335
Log-Gumbel	(2p)	0.03496	-434.531	873.062

① denotes the best distribution for each criterion;
② and ③ the second and the third, respectively.

なっても) 確率水文学の推定値が大きく変動しないような確率分布が望ましい。こうした考え方に立って、確率水文学の変動性をモデル評価の規準としてはどうかというのが著者らの提案である。

確率水文学の変動性(推定精度)を調べるために、2つのリサンプリング手法—jackknife法とbootstrap法—を適用する。リサンプリング手法とは、簡単にいうと、現在手元にある1組のデータセット(標本)から、部分的にデータを抽出したり、繰返しを許して元の標本と同じデータ個数だけ抽出したりという操作を反復して多数個のデータセットを作り出し、元の標本から得られる統計量の偏倚を補正したり、統計量の推定誤差を求めたりする手法である。こうして生成される多数のデータセットの統計処理は、近年計算機の発達とともに急速に進展しつつある。

(1) jackknife法とbootstrap法の概説

Quenouilleは統計量の偏倚を推定・補正するためのノンパラメトリックな方法を1949年に発表したが、その後(1958年)、その方法は偏倚だけでなく分散(すなわち統計量に含まれる誤差の程度)をも推定し得ることがTukeyによって指摘されjackknife法と名づけられた。“jackknife”とは、Efron¹⁵⁾によれば、「はば広いいろいろな状況の中で有用な大雑把な道具」といった意味あいをつけられたものである。1974年にMiller¹⁶⁾によってjackknife法に関する詳細なレビューがなされている。

bootstrap法は、1979年にEfronが発表した方法で、jackknife法と同様、統計量に含まれる誤差の程度を推定するものである。ただし、jackknife法よりも多数回の繰返し計算を必要とする。“bootstrap”という名前は、そのアルゴリズムの中で元の標本自身が新たな標本をいくつも作り出して誤差推定を行うという自動的性質(self-help nature)があるところから名づけられた¹⁵⁾(「他人の助けを借りないで自分でやる」ことを英語で

は pull oneself up by one's own bootstraps という)。

水文学の分野でのこれらの手法の適用例としては以下のようなものがある。Bardsley (1977)¹⁷⁾ は、極値データに対して、3つの極値分布のうちどれを選ぶかという問題に jackknife 法を適用している。Tung and Mays (1981)¹⁸⁾ は、流量資料の少ない地点において洪水頻度分析を行う際に、対数 Pearson III型分布で用いる頻度係数を、標本ひずみと Water Resources Council が作成したひずみマップ (skew map) によるひずみの分散から推定する問題に jackknife 法と bootstrap 法を適用している。データ数の多寡にかかわらず、また、マップの精度の良否にかかわらず、jackknife 法が頻度係数を精度よく推定し得ることを示している。Cover and Unny (1986)¹⁹⁾ は、年流量時系列に ARMA モデルをあてはめ、パラメーター推定誤差をこれらのリサンプリング手法を用いて議論している。わが国においては、水文学関係の研究で jackknife 法や bootstrap 法を用いたものは見当たらないが、一般のデータ解析の分野で徐々に用いられ始めているようである²⁰⁾。

以下に、これら2つの方法の概略を示す。N個のデータ x_1, x_2, \dots, x_N を用いてその母集団の特性を表わす量を推定する構造 (統計量) を $\phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ と記すことにする。

a) jackknife 法

i) N個のデータすべてを用いて統計量を求め、それを

$$\hat{\phi} = \phi(x_1, x_2, \dots, x_N) \dots \dots \dots (7)$$

と記す。

ii) i番目のデータを除いた N-1個のデータを用いて統計量を求めそれを次のように記す。

$$\hat{\phi}_{(i)} = \phi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \dots \dots \dots (8)$$

$\hat{\phi}_{(i)}$ は全部で N個 ($i=1, 2, \dots, N$) 求められる。

iii) 次式により $\hat{\phi}_{(i)}$ の平均 $\hat{\phi}_{(\cdot)}$ を求める。

$$\hat{\phi}_{(\cdot)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\phi}_{(i)} \dots \dots \dots (9)$$

iv) Quenouille の偏り推定値は次式で与えられる。

$$\widehat{\text{Bias}} = (N-1)(\hat{\phi}_{(\cdot)} - \hat{\phi}) \dots \dots \dots (10)$$

結局、偏りを補正した jackknife 推定値 $\tilde{\phi}_J$ は、

$$\tilde{\phi}_J = \hat{\phi} - \widehat{\text{Bias}} = N\hat{\phi}_{(\cdot)} - (N-1)\hat{\phi} \dots \dots \dots (11)$$

統計量 ϕ の分散の jackknife 推定値 \hat{s}_J^2 は、

$$\hat{s}_J^2 = \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\phi}_{(i)} - \hat{\phi}_{(\cdot)})^2 \dots \dots \dots (12)$$

によりそれぞれ求められる。なお、 $\tilde{\phi}_J$ は N^{-2} のオーダーの偏りをもつことが知られている²¹⁾。

b) bootstrap 法

i) N個のデータ x_1, x_2, \dots, x_N から繰返しを許して N個取り出し、それを $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$ と記す。この1

組のデータを bootstrap 標本という。bootstrap 標本を用いて統計量を求め、それを次のように記す。

$$\hat{\phi}^* = \phi(x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \dots \dots \dots (13)$$

ii) i) の操作を独立に多数回 (B回) 繰返す。すなわち、全部で B個の bootstrap 標本それぞれに対して、 $\hat{\phi}^*$ を求める。第 b番目の bootstrap 標本に対して得られた統計量を便宜上 $\hat{\phi}^{*b}$ と記す ($b=1, 2, \dots, B$)。

iii) 次式により $\hat{\phi}^{*b}$ の平均 $\hat{\phi}^{**}$ を求める。

$$\hat{\phi}^{**} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\phi}^{*b} \dots \dots \dots (14)$$

これは統計量 ϕ の bootstrap 推定値である。

iv) 統計量 ϕ の分散の bootstrap 推定値を

$$\hat{s}_B^2 = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\phi}^{*b} - \hat{\phi}^{**})^2 \dots \dots \dots (15)$$

により求める。

(2) モデル評価へのリサンプリング手法の適用

変量 X の確率密度関数を $f(x; \theta)$ 、累積分布関数を $F(x)$ とすると、

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t; \theta) dt \dots \dots \dots (16)$$

であり、 x が指定されたとき、 $F(x)$ を x の非超過確率、 $1-F(x)$ を超過確率という。水文学のある値 x_a の非超過確率 (場合によっては超過確率) を q とするとき、

$$T = \frac{1}{n(1-q)} \dots \dots \dots (17)$$

を水文学量 $x = x_a$ に対応するリターンピリオドと呼ぶ。ここに、 n は $F(x)$ の推定に用いた水文学量 x の年間平均生起度数で x_a を「T年確率水文学量」と呼ぶ。

年最大値系列を考えるときは、式 (17) で $n=1$ であり、また、 $q=F(x_a)$ であるから、T年確率水文学量は 100q% 分位値 (percentile, パーセンタイル) に相当する。たとえば、50年確率水文学量は 98% 分位値、2年確率水文学量は 50% 分位値 (すなわちメジアン) である。

さて、データに確率分布モデルをあてはめた際の確率水文学量 (分位値) の変動性 (推定誤差) を種々の分布について求めるのは一般には容易でない。しかしながら、jackknife 法や bootstrap 法を適用することにより比較的容易にそれが実現できる。すなわち、前述の統計量 ϕ として確率水文学量をとればよい。想定する分布モデルそれぞれについて、式 (7)、(8) あるいは式 (13) において最尤法によりあてはめ (母数推定) を行い T年確率水文学量を求めるのである。こうして式 (12) または式 (15) が想定した分布モデルを用いた場合の確率水文学量の変動の大きさを与えることになる。これが、2. の最後に提案した手順の⑤の内容である。

それぞれの分布モデルについて式 (12) または式 (15) で得られた \hat{s}_J または \hat{s}_B の値を比較し、最も小さい値

を与えるモデルを選択するのが、2.の手順⑥である。

(3) 大阪の年最大日降水量への適用例

3. でみたように、大阪の年最大日降水量に10種の確率分布モデルをあてはめたところ、ある程度よい適合度を示すモデルが複数個あった。そこで、SLSC, MLL, AICの3つの評価規準の少なくともどれか1つにおいてベスト3に入ったモデルに対してリサンプリング手法を適用する。Table 1によれば、そのようなモデルは、3母数対数正規分布, 3母数 Pearson III型分布, 対数 Pearson III型分布, 平方根指数型最大値分布, 3母数対数 Gumbel 分布である。

これらの5つの分布に jackknife 法を適用した結果を Table 2 に示す。50, 100, 200年確率水水量とその推定誤差 δ_i , (式 (12), これが変動の大きさを表わす) が記されている。この表から次のことがいえる。

i) 確率水水量の変動が最も小さいのは平方根指数型最大値分布であり、ここで提示した著者らの評価法によれば、大阪のデータに対してはこの分布が最も良いモデルである(なお、他の4分布はすべて3母数の分布であった。参考のため、2母数の Gumbel 分布, 対数正規分布の場合どうなるか調べてみた。Table 2の破線の下に結果を示す。これら2つの分布は、小さい変動性を示すが、確率水水量の値がそれぞれかなり小さい値となっている。この2つの分布は、Table 1 でみたように、適合度の悪かったものである)。

ii) 3母数 Pearson III型分布の確率水水量の変動も残りの3つの分布と比べるとかなり小さい。しかし、確率水水量の値は、この分布の場合のみ特に小さく、たとえば200年確率水水量は平方根指数型最大値分布の100年確率に相当する。他の4分布と比べて危険側に過ぎるようである。

Fig. 2には、平方根指数型最大値分布, 3母数 Pearson III型分布, 3母数対数正規分布について、jackknife 法による補正後の密度関数の形状を示した。補正前の図 (Fig. 1(a)) と比べると興味深い。平方根指数型最大値分布と3母数 Pearson III型分布は補正による形状の変

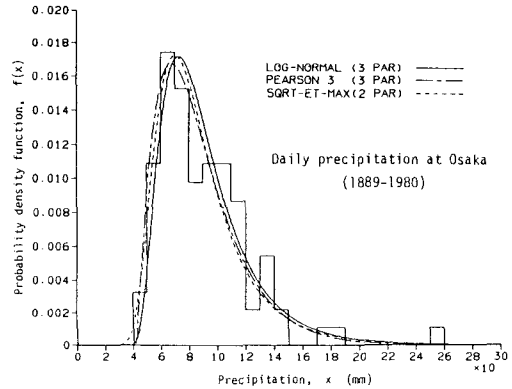


Fig. 2 Distributions obtained by the jackknife method for the annual maxima of daily precipitation at Osaka.

化が大きく、特にピーク付近がヒストグラムの形状に近づいたようにみえる。3母数 Pearson III型分布は他の2つに比べて右にひずんでおり、相対的に小さな確率水水量を与えている Table 2の結果(上述 ii) が確認できる。

bootstrap 法を適用する場合、生成する bootstrap 標本の個数 B をどの程度にするかという問題がある。大阪のデータ ($N=92$) に対して、 $B=100, 1000, 10000$ を試みた。どの場合も、jackknife 法によって得た推定誤差におおむね近い値を得た。 $B=100$ と $B=1000$ とを比べると若干その値に差があったが、 $B=1000$ と $B=10000$ とではほぼ同じであった。後に示す他の適用例でも検討したところ、100個程度のデータに対して $B=1000$ 程度でよさそうであるとの結論を得た。

5. 琵琶湖流域の極値降水量データへの適用

同様の手順を琵琶湖流域のデータに適用した結果を示す。ここでは、大津、彦根の地点降水量 (1912~1985年の74年間) と琵琶湖流域面積平均降水量 (1912~1981年の70年間)¹¹⁾の年最大 k 日降水量 ($k=1, 2, 3$) を対象とする。なお、bootstrap 法は jackknife 法と同様の評価結果を与えるので、jackknife 法の結果のみを示すことにする。

(1) 大津地点降水量

a) 適合度の比較 Table 3に大津の年最大 k 日降水量に対する各分布の適合度を示した。

【 $k=1$ の場合】 SLSC, MLL, AICについて、3母数 Pearson III型分布がそれぞれ②①①位, 3母数対数正規分布は①②4位であり、ともによい適合を示す。平方根指数型最大値分布は AIC は②位であるが SLSC 値が悪い。

【 $k=2, 3$ の場合】 適合する分布は $k=2, 3$ で同じような傾向を示す。2母数 Pearson III型分布が2日降水量, 3日降水量のどちらに対しても③②①位でありよく適合

Table 2 The estimates* of T -year event of daily precipitation at Osaka, for the period 1889-1980 (92 years) and the standard deviations** (in mm), obtained by the jackknife method.

Prob. distribution	Return period, T (years)		
	50	100	200
SQRT-ET-max (2p)	180.46(11.25)**	203.56(13.58)	227.85(16.08)
Pearson III (3p)	172.82(14.67)	189.34(17.34)	205.51(20.36)
Log-normal (3p)	179.94(17.83)	201.66(23.69)	224.17(30.44)
Log-Pearson III (3p)	181.99(19.58)	205.69(27.06)	230.87(36.13)
Log-Gumbel (3p)	182.95(21.07)	207.62(30.35)	233.86(43.03)
Gumbel (2p)	167.19(9.13)	183.18(10.49)	199.10(11.85)
Log-normal (2p)	165.63(11.77)	180.71(14.00)	195.70(16.31)

する。他の2母数の分布のうちでは対数正規分布がよい ($k=2$ で②4②位, $k=3$ で44②位)。Gumbel分布は, $k=2$ のときのSLSCがかなり悪く, 2日降水量のデータをGumbel確率紙にプロットしても直線上に乗らない。3母数対数正規分布, 3母数Pearson III型分布の適合度はまずまず良好である。なお, 対数Pearson III型分布の場合, 母数推定がうまくいかない場合があった。

Table 3 Comparison of ten distributions by SLSC, MLL, and AIC for the annual maxima of k -day precipitation at Ohtsu, for the period 1912-1985 (74 years), fitted by the maximum likelihood method.

k	Prob. distribution	SLSC	MLL	AIC
1	Normal (2p)	0.05384	-364.832	733.663
	Log-normal (3p)	0.02120①	-357.207②	720.415
	Log-normal (2p)	0.02732	-358.297	720.593
	Pearson III (3p)	0.02385②	-356.390①	718.780①
	Pearson III (2p)	0.03205	-359.601	723.201
	Log-Pearson III(3p)	0.02489③	-357.466③	720.932
	SQRT-ET-max (2p)	0.03562	-357.668	719.336②
	Gumbel (2p)	0.02666	-358.060	720.120③
	Log-Gumbel (3p)	0.02882	-357.804	721.608
	Log-Gumbel (2p)	0.04661	-359.047	722.095
2	Normal (2p)	0.03634	-384.026	772.052
	Log-normal (3p)	0.02696①	-382.257③	770.514
	Log-normal (2p)	0.02882②	-382.480	768.959②
	Pearson III (3p)	0.03137	-381.948①	769.896
	Pearson III (2p)	0.02941③	-382.036②	768.072①
	Log-Pearson III(3p)	---	---	---
	SQRT-ET-max (2p)	0.06684	-384.607	773.214
	Gumbel (2p)	0.04289	-382.838	769.676③
	Log-Gumbel (3p)	0.04403	-382.961	771.923
	Log-Gumbel (2p)	0.07514	-389.554	783.108
3	Normal (2p)	0.03710	-391.944	787.889
	Log-normal (3p)	0.01732①	-389.143③	784.287
	Log-normal (2p)	0.01994	-389.328	782.656②
	Pearson III (3p)	0.01855②	-388.994①	783.988
	Pearson III (2p)	0.01894③	-389.106②	782.213①
	Log-Pearson III(3p)	---	---	---
	SQRT-ET-max (2p)	0.05437	-391.526	787.051
	Gumbel (2p)	0.02728	-389.616	783.232③
	Log-Gumbel (3p)	0.02912	-389.746	785.492
	Log-Gumbel (2p)	0.07079	-396.690	797.380

① denotes the best distribution for each criterion;
② and ③ the second and the third, respectively.

Table 4 The estimates* of T -year event of k -day precipitation at Ohtsu, for the period 1912-1985 (74 years) and the standard deviations** (in mm), obtained by the jackknife method.

k	Prob. distribution	Return period, T (years)		
		50	100	200
1	Gumbel (2p)	189.84(10.73)**	207.72(12.27)	225.54(13.80)
	SQRT-ET-max (2p)	208.28(13.55)	234.44(16.23)	261.32(19.24)
	Pearson III (3p)	190.38(15.81)	206.40(19.36)	221.85(23.28)
	Log-normal (3p)	202.47(16.58)	224.86(22.20)	247.81(28.83)
	Log-Pearson III (3p)	203.52(18.98)	227.17(26.72)	251.77(36.44)
	Pearson III (2p)	182.58(10.22)	195.53(11.52)	207.87(12.80)
2	Log-normal (2p)	189.04(11.81)	205.46(13.60)	221.73(15.68)
	Log-Gumbel (3p)	200.63(17.43)	223.06(25.21)	245.95(35.19)
	Pearson III (2p)	243.92(11.42)	261.66(12.90)	278.53(14.38)
	Gumbel (2p)	264.74(12.81)	290.90(14.76)	316.96(16.76)
	Log-normal (2p)	257.24(14.11)	280.92(16.76)	304.47(19.58)
	Pearson III (3p)	243.76(15.59)	261.51(20.86)	278.45(26.91)
3	Pearson III (3p)	240.08(17.47)	256.44(22.40)	271.94(27.63)
	Pearson III (2p)	269.82(14.12)	289.26(16.05)	307.81(17.96)
	Gumbel (2p)	282.35(14.09)	310.19(16.32)	337.94(18.56)
	Log-normal (2p)	283.64(16.71)	309.34(19.52)	334.86(23.32)
	Log-normal (3p)	272.74(19.35)	293.62(24.74)	313.76(30.75)
	Pearson III (3p)	267.77(19.88)	286.44(24.75)	304.18(29.86)

探索の途中で母数の値が, プログラム中のガンマ関数の許容範囲を出してしまうのである。プログラム改善の余地を残している。

b) 確率水水量の変動性 Table 4 に jackknife 法で求めた確率水水量とその推定誤差 $\hat{\delta}_j$ を示す。

【 $k=1$ の場合】 $k=1$ の欄で破線より上の5つの分布は, Table 3 においてどれかの適合度規準でベスト3に入ったものであり, これらのうちではGumbel分布の確率水

Table 5 Comparison of ten distributions by SLSC, MLL, and AIC for the annual maxima of k -day precipitation at Hikone, for the period 1912-1985 (74 years), fitted by the maximum likelihood method.

k	Prob. distribution	SLSC	MLL	AIC
1	Normal (2p)	0.05238	-363.597	731.193
	Log-normal (3p)	0.01543①	-357.073②	720.146
	Log-normal (2p)	0.01603②	-357.171③	718.343①
	Pearson III (3p)	0.01897③	-356.890①	719.781
	Pearson III (2p)	0.02870	-358.101	720.203
	Log-Pearson III(3p)	---	---	---
	SQRT-ET-max (2p)	0.03630	-357.776	719.553③
	Gumbel (2p)	0.02015	-357.198	718.396②
	Log-Gumbel (3p)	0.01969	-357.190	720.380
	Log-Gumbel (2p)	0.05539	-361.265	726.530
2	Normal (2p)	0.06474	-384.554	773.107
	Log-normal (3p)	0.02071①	-376.259②	758.517
	Log-normal (2p)	0.02154②	-376.378③	756.755①
	Pearson III (3p)	0.03391	-376.165①	758.330
	Pearson III (2p)	0.04515	-377.592	759.183
	Log-Pearson III(3p)	---	---	---
	SQRT-ET-max (2p)	0.03096	-376.968	757.937③
	Gumbel (2p)	0.03089	-376.480	756.959②
	Log-Gumbel (3p)	0.02554③	-376.433	758.866
	Log-Gumbel (2p)	0.05479	-380.325	764.649
3	Normal (2p)	0.06146	-390.249	784.497
	Log-normal (3p)	0.01945①	-382.500①	771.000
	Log-normal (2p)	0.02047②	-382.621	789.243①
	Pearson III (3p)	0.03061	-382.500①	771.000
	Pearson III (2p)	0.04119	-383.783	771.567
	Log-Pearson III(3p)	---	---	---
	SQRT-ET-max (2p)	0.03139	-383.186	770.372③
	Gumbel (2p)	0.02745	-382.653	769.307②
	Log-Gumbel (3p)	0.02372③	-382.618③	771.237
	Log-Gumbel (2p)	0.05483	-386.646	777.291

① denotes the best distribution for each criterion;
② and ③ the second and the third, respectively.

Table 6 The estimates* of T -year event of k -day precipitation at Hikone, for the period 1912-1985 (74 years) and the standard deviations** (in mm), obtained by the jackknife method.

k	Prob. distribution	Return period, T (years)		
		50	100	200
1	Gumbel (2p)	182.11(10.18)**	209.12(11.70)	218.08(13.22)
	Log-normal (2p)	180.95(12.26)	198.10(14.58)	215.19(17.05)
	Pearson III (3p)	182.33(13.29)	198.70(15.91)	214.60(18.50)
	SQRT-ET-max (2p)	204.68(13.59)	232.48(16.54)	261.79(19.73)
	Log-normal (3p)	184.46(14.73)	202.97(18.73)	221.55(23.23)
	Gumbel (2p)	229.39(12.97)	252.29(14.90)	275.11(16.84)
2	Log-Gumbel (3p)	220.32(15.01)	236.25(18.98)	250.48(23.88)
	Log-normal (2p)	233.79(16.99)	256.19(20.30)	278.54(23.79)
	SQRT-ET-max (2p)	284.07(17.23)	300.13(20.91)	339.17(24.89)
	Pearson III (3p)	232.25(23.41)	252.38(26.89)	271.88(34.52)
	Log-normal (3p)	239.50(26.21)	263.93(31.33)	288.40(43.38)
	Gumbel (2p)	256.91(14.32)	282.23(16.49)	307.46(18.67)
3	Log-Gumbel (3p)	261.15(15.87)	286.32(19.75)	311.14(24.56)
	Log-normal (2p)	256.17(18.10)	280.15(21.57)	304.04(25.22)
	SQRT-ET-max (2p)	289.98(19.48)	329.09(23.72)	370.31(28.31)
	Pearson III (3p)	257.18(22.14)	279.70(26.83)	301.52(31.63)
	Log-normal (3p)	262.04(25.80)	288.14(33.50)	314.28(42.08)

水量の変動が最も小さいことがわかる。破線より下の3分布は参考のために挙げたものである。この3つのうち、2母数 Pearson III型分布は Gumbel 分布よりも小さい δ_j を与えるが、確率水文学の値をみると、特に $T=100, 200$ 年のところで他の分布と比べて極端に小さな値を与える。この2母数 Pearson III型分布は、Table 3でもみたように、 $k=1$ の場合には適合度が悪かったものである。大阪の日降水量に対してはよい評価を得た平方根指数型最大値分布は、Gumbel 分布に次いで変動が小さいが、相対的にかなり大きい確率水文学を与える。結局、 $k=1$ の場合、Table 3でも適合度が悪くなく(46③位)、かつ、確率水文学の変動の小さい Gumbel 分布が最も良いと考えられる。

【 $k=2, 3$ の場合】2母数 Pearson III型分布がどちらの場合も適合度がよく、かつ、確率水文学の変動も最も小さいので、最良のモデルであるとしてよい。

(2) 彦根地点降水量

a) 適合度の比較 Table 5 に適合度を示した。 $k=1, 2, 3$ のどの場合も似たような傾向を示しているといえる。2母数対数正規分布, 3母数対数正規分布, 3母数対数 Gumbel 分布は、どの場合も $SLSC \approx 0.02$ でありよく適合している。Gumbel 分布, 平方根指数型最大値分布は、MLL 値は悪くなく、2母数の分布であるから AIC ではそれぞれ②位, ③位に浮上している。しかし、平方根指数型最大値分布は SLSC 値がかなり悪い。2母数 Pearson III型分布は、大津の場合 $k=2, 3$ でよい適合を示したが彦根の場合よくない。

b) 確率水文学の変動性 Table 6 によれば、 $k=1, 2, 3$ のどの場合も Gumbel 分布の変動が一番小さい。3母数対数 Gumbel 分布は、 $k=2$ のとき、他の分布に比べて過小な確率水文学を与える。平方根指数型最大値分布は、逆に、過大な確率水文学を与える。2母数対数正規分布は、Table 5 でみたようにデータに対する適合度はかなりよく、確率水文学の変動も比較的小さい(適合度のよい3母数対数正規分布, 3母数 Pearson III型分布の変動と比べるとかなり小さい)。確率水文学の値を Gumbel 分布と2母数対数正規とで比較すると、両者に大きな差はない。結局、確率水文学の変動という観点からは Gumbel 分布が最良であるといえるが、 $k=2$ のときは Gumbel 分布の適合度が不満 ($SLSC=0.03089$) である。データへの適合を重視するならば、2母数対数正規分布を採用しても、Gumbel 分布と大差ない確率水文学を与えるので、実用上差し支えない。

(3) 琵琶湖流域平均降水量

a) 適合度の比較 Table 7 に適合度を示した。 $SLSC \approx 0.02$ となる分布が多数あり、どの分布も比較的好く適合するデータであるといえる。適合度の優劣は

つけにくい。

b) 確率水文学の変動性 Table 8 によれば、確率水文学の変動の最も小さいのは Gumbel 分布であり、その次は2母数対数正規分布である。彦根の地点降水量の場合とはほぼ同様の評価結果となる。

(4) まとめ

以上の結果から次のようなことがいえる。

Table 7 Comparison of ten distributions by SLSC, MLL, and AIC for the annual maxima of k -day precipitation in the Lake Biwa basin for the period 1912-1981 (70 years), fitted by the maximum likelihood method.

k	Prob. distribution	SLSC	MLL	AIC
1	Normal (2p)	0.06175	-342.854	689.708
	Log-normal (3p)	0.01721①	-333.668①	673.335
	Log-normal (2p)	0.02476	-334.557	673.113③
	Pearson III (3p)	0.02068③	-333.668①	673.336
	Pearson III (2p)	0.03806	-336.246	676.492
	Log-Pearson III(3p)	0.01831②	-333.754③	673.507
	SQRT-ET-max (2p)	0.02676	-333.790	671.579①
	Gumbel (2p)	0.02890	-334.387	672.774②
	Log-Gumbel (3p)	0.02252	-333.876	673.752
	Log-Gumbel (2p)	0.04306	-335.565	675.130
2	Normal (2p)	0.05635	-364.446	732.893
	Log-normal (3p)	0.02720	-356.746②	719.493
	Log-normal (2p)	0.02498	-357.342	718.683③
	Pearson III (3p)	0.01678①	-356.175①	718.350①
	Pearson III (2p)	0.03045	-358.555	721.110
	Log-Pearson III(3p)	0.02250	-356.976③	719.951
	SQRT-ET-max (2p)	0.02845	-357.194	718.388②
	Gumbel (2p)	0.02136②	-357.549	719.098
	Log-Gumbel (3p)	0.02193③	-357.305	720.611
	Log-Gumbel (2p)	0.04890	-359.060	722.119
3	Normal (2p)	0.05243	-373.300	750.601
	Log-normal (3p)	0.01619①	-366.516②	739.033
	Log-normal (2p)	0.01890②	-366.850③	737.701①
	Pearson III (3p)	0.02024③	-366.030①	738.060③
	Pearson III (2p)	0.02773	-367.876	739.751
	Log-Pearson III(3p)	--	--	--
	SQRT-ET-max (2p)	0.03726	-366.947	737.895②
	Gumbel (2p)	0.02389	-367.031	738.061
	Log-Gumbel (3p)	0.02448	-366.902	739.804
	Log-Gumbel (2p)	0.05212	-369.377	742.754

① denotes the best distribution for each criterion; ② and ③ the second and the third, respectively.

Table 8 The estimates* of T -year event of k -day precipitation in the Lake Biwa basin for the period 1912-1981 (70 years) and the standard deviations** (in mm), obtained by the jackknife method.

k	Prob. distribution	Return period, T (years)		
		50	100	200
1	Gumbel (2p)	172.83(11.06)**	189.73(12.68)	206.56(14.30)
	Log-normal (2p)	172.76(12.72)	189.06(15.08)	205.32(17.55)
	Pearson III (3p)	175.17(13.56)	191.10(16.11)	206.59(18.71)
	SQRT-ET-max (2p)	189.98(14.18)	215.10(17.21)	241.56(20.46)
	Log-normal (3p)	181.68(16.57)	201.84(21.60)	222.40(27.47)
Log-Pearson III (3p)	183.75(17.91)	205.66(24.42)	228.41(32.45)	
2	Gumbel (2p)	239.64(13.81)	263.58(15.84)	287.43(17.87)
	Log-normal (2p)	236.13(16.74)	259.44(19.87)	282.78(23.17)
	SQRT-ET-max (2p)	260.96(18.77)	296.86(22.87)	334.32(26.87)
	Pearson III (3p)	228.79(24.48)	245.18(30.98)	262.85(37.79)
	Log-normal (3p)	243.39(27.71)	269.30(38.39)	295.22(51.03)
Log-Gumbel (3p)	243.23(26.78)	269.76(39.22)	295.98(55.06)	
3	Gumbel (2p)	289.30(15.77)	296.43(18.11)	323.48(20.46)
	Log-normal (2p)	269.78(18.97)	296.89(22.55)	323.64(26.34)
	Pearson III (3p)	270.11(20.62)	295.06(24.85)	319.31(29.23)
	SQRT-ET-max (2p)	300.10(21.60)	341.61(26.18)	385.43(31.10)
	Log-normal (3p)	280.25(24.41)	311.57(32.03)	343.39(40.89)
Log-Gumbel (3p)	270.15(24.99)	297.27(35.36)	323.68(48.50)	

i) データに対する適合度がよく、かつ、確率水文学の変動が小さい、という観点から評価すると、彦根地点および琵琶湖流域平均の年最大1, 2, 3日降水量、大津地点の年最大日降水量については、Gumbel分布が最もよい。次善は、2母数対数正規分布である。大津地点の年最大2, 3日降水量には、2母数 Pearson III型分布がよい。

ii) 確率水文学の変動性をモデルの評価規準とすると、2母数の分布の方が有利である。というのは、データの組合せが変わるごとに、3母数の分布は毎回よく適合するが、よく適合する分だけ確率水文学の値が毎回大きく異なることになるからである。したがって、ここで提示した評価手順で3母数の分布が最終的に選ばれることはまれであると判断される。3母数の分布が選ばれることがあるとすれば、それは2母数の分布のどれを用いてもよい適合度が得られない場合に限られる。さらにいえば、母数を4つも5つももつような分布は単峰とみなせるデータに対してはほとんど無意味である。

iii) 以上の考察から、極値データに確率分布モデルをあてはめる際には、まず Gumbel 分布を試み、よい適合度が得られたら Gumbel 分布を採用すればよいといえる（このとき $SLSC \approx 0.02$ が一応の目安となろう）。Gumbel 分布の適合が不十分な場合、2母数対数正規分布、2母数 Pearson III型分布を次に試す。これら3つの分布が、 $SLSC < 0.03$ で同程度の適合を示したら、jackknife 法を適用し、確率水文学の変動の小さいものを選ぶ。多くの場合、ここまでの手順でけりがつくものと思われる。

iv) 江藤が最近提案した平方根指数型最大値分布²⁾は、上記 iii) の手順でけりのつかないような場合に有用かもしれない。3. でみた大阪の年最大日降水量の場合は典型的な例である。平方根指数型最大値分布は、2, 3日降水量には適合しにくいようである。この分布は、右方に長く尾を引く分布であり、相対的に飛び抜けて大きな値の生じ得る日降水量の場合にはよい適合度を示すことがあるが、2日以上になると降水量の値が相対的に平滑化される（右方に長く尾を引かなくてもよくなる）ので適合が悪くなるものと思われる。右方に長く尾を引く分布であるため、確率水文学の値が常に大きめに与えられることに留意する必要がある。

v) 2母数のどの分布に対してもよい適合度が得られない場合には、3母数の分布をあてはめ適合度の悪いものを除去する。残った分布に対して jackknife 法を適用し確率水文学の変動の小さい分布を選ぶ。

vi) 適合度至上主義の立場に立てば、Table 1, 3, 5, 7 でみてきたように、3母数の分布の方がよい。特に、3母数対数正規分布はほとんどすべてのデータによく適合

する。3母数 Pearson III型分布は、SLSC 値の悪い場合が少しあるが、MLL 値はいつも①位（大阪のデータの場合のみ②位）であり、Pearson III型分布や対数 Pearson III型分布が海外で多用される事情が理解できる。

6. データ個数と確率水文学の推定精度

確率水文学が水工計画立案上の基本となるわけであるが、今までみてきたように、データの組合せによってその推定値は変動する。すなわち、確率水文学の推定精度というものを認識し、定量的に把握しておくことが重要である。寒川ら²²⁾は、長野県下の3地点（長野、松本、上田）について年最大日降水量が Gumbel 分布に従うとして、データ数を10から90個程度まで経年的に増加させた場合に50年、100年確率水文学の値がどのように変化していくか調べている。データ数が30~40個以上になるとその値が安定していくことを示した。

ここでは、データの経年的な出現順序に影響を受けないような方法で、データ数と確率水文学の変動性（推定値だけでなく推定精度も）を定量的に評価してみよう。現在手元にある N 個のデータが、われわれのもつ情報のすべてであり、それを有効に利用しなければならない。そのデータの独立性を仮定すれば、それぞれのデータは等確率 ($1/N$) で生じたものとするのが自然である。そこで、 N 個のデータから無作為に繰返しを許して M 個抽出することにより仮想のデータセットを多数 (B 個) 作り出し、各データセットに分布をあてはめ確率水文学を求める。こうして得た B 個の確率水文学について平均と分散を求める。 $N=M$ のとき、これは bootstrap 法にほかならない。

このような bootstrap 型のリサンプリング手法によりデータ数 M と確率水文学の推定精度との関連を調べ

Table 9 T-year events* of the daily precipitation (in mm) in the Lake Biwa basin and standard deviations** estimated by the bootstrap-type resampling (M is the number of resampled data; $B=1\ 000$ iterations).

M	Return period, T (years)		
	50	100	200
20	169.3 (20.9)**	185.6 (23.9)	201.7 (27.0)
30	169.8 (16.6)	186.2 (19.0)	202.5 (21.4)
40	169.9 (14.4)	186.3 (16.4)	202.7 (18.5)
50	170.1 (13.2)	186.5 (15.2)	202.9 (17.1)
60	170.1 (11.9)	186.6 (13.6)	203.0 (15.3)
70	170.1 (10.9)	186.6 (12.5)	203.0 (14.1)
80	170.2 (10.5)	186.7 (12.0)	203.1 (13.5)
90	170.3 (9.5)	186.8 (10.8)	203.3 (12.2)
100	170.6 (9.1)	187.1 (10.5)	203.6 (11.8)
110	170.7 (8.7)	187.2 (9.9)	203.7 (11.2)
120	170.7 (8.1)	187.3 (9.3)	203.8 (10.5)
130	170.7 (7.9)	187.2 (9.0)	203.7 (10.2)
140	170.7 (7.7)	187.3 (8.8)	203.8 (9.9)

た。用いたデータは琵琶湖流域平均年最大日降水量であり、前章の結果からこれがGumbel分布に従うものと考えられる。 $N=70$ に対して、 $M=20, 30, \dots, 140$ (増分は10)とした。結果をTable 9に示す。

M が増加するにつれて推定誤差(標準偏差)は減少する。元の標本($M=70$)による推定誤差に対し、 $M=140$ で約3割減、 $M=110$ で約2割減となる。すなわち、あと40年分データが追加されると確率水文学の推定精度は2割よくなり、70年分追加されると3割よくなる。逆に、 $M=50$ では推定誤差は約2割増、 $M=20$ では約2倍になることがわかる。結局、この場合、50~200年確率水文学量は、データ数が20, 70, 140のとき、それぞれ13~14%, 6~7%, 4~5%の推定誤差をもつ。10%以内の推定誤差に抑えようとすれば少なくとも30~40個のデータが必要であるといえる。なお、3母数の分布の場合にはさらに大きな推定誤差となる。

7. あとがき

確率水文学の変動性という問題は実用上きわめて重要であり、それをモデル評価の規準とすることは直観的にも理解しやすい。本論文により、適合度のみを規準とする従来のモデル評価の難点が明らかにされるとともに、現在よく用いられている種々の分布の適合性および確率水文学の変動性が、現実の極値降水量データを用いて実証的に明らかにされた。また、jackknifeやbootstrapなどのリサンプリング手法は、現在手元にあるデータを有効に利用しながら確率水文学量や母数の変動性を比較的簡単に調べることができ、非常に有用であるといえる。

今日、種々の水文データがかなりの程度蓄積されるとともに、新しい統計技術の開発、計算処理の高速化がなされた。ここで提示した確率分布モデルの評価手順は容易に実現できるものである。こうした考え方・方法について、実務的な立場からの批判を待ちたい。

最後に、数値計算や結果の整理に協力してくれた清水章君(京都大学大学院)に謝意を表す。

参考文献

- 宝 馨・高棹琢馬・清水 章：水文統計解析における確率分布モデルの評価，京大防災研年報，第30号B-2，pp.283~297，1987。
- 江藤剛治・室田 明・米谷恒春・木下武雄：大雨の頻度，土木学会論文集，第369号/II-5，pp.165~174，1986。
- 角屋 睦：水文統計論，土木学会水理委員会，水工学シリーズ，64-02，1964。
- Kite, G.W. : Frequency and Risk Analyses in Hydrology, Water Resources Pub., 1977。
- 神田 徹・藤田睦博：水文学—確率論的手法とその応用，技報堂出版，1982。
- Greenwood, J. A. et al. : Probability weighted moments—Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form, Water Resour. Res., Vol.15, No.5, pp.1049~1054, 1979。
- Jain, D. and Singh, V.P. : Estimating parameters of EV1 distribution for flood frequency analysis, Water Resour. Bull., Vol.23, No.1, pp.59~71, 1987。
- E. J. ガンベル(河田竜夫他監訳)：極値統計学，1962。
- 富士通(株)：FACOM FORTRAN SSL II 使用手引書，pp.403~406，1980。
- 高棹琢馬・宝 馨・清水 章：琵琶湖流域水文データの基礎的分析，京大防災研年報，第29号B-2，pp.157~171，1986。
- 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎：情報量統計学，共立出版，1983。
- Akaike, H. : A new look at the statistical model identification, IEEE Trans. Autom. Cont., AC-19, pp.716~723, 1974。
- Hipel, K.W., McLead, A.I. and Lennox, W.C. : Advances in Box-Jenkins modeling, 1. Model construction, Water Resour. Res., Vol.13, No.3, pp.567~575, 1977。
- 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨：流出モデル評価への情報量規準の導入について，京大防災研年報，第27号B-2，pp.275~290，1984。
- Efron, B. : Computers and the theory of statistics—Thinking the unthinkable, SIAM Review, Vol.21, No.4, pp.460~480, 1979。
- Miller, R.G. : The jackknife—a review, Biometrika, Vol.61, No.1, pp.1~15, 1974。
- Bardsley, W.E. : A test for distinguishing between extreme value distributions, J. Hydrology, Vol.34, pp.377~381。
- Tung, Y.-K. and Mays, L.W. : Generalized skew coefficients for flood frequency analysis, Water Resour. Bull., Vol.17, No.2, pp.262~269, 1981。
- Cover, K.A. and Unny, T.E. : Application of computer intensive statistics to parameter uncertainty in streamflow synthesis, Water Resour. Res., Vol.22, No.3, pp.495~507, 1986。
- 奥村晴彦：パソコンによるデータ解析入門，技術評論社，pp.215~224，1986。
- Efron, B. : The jackknife, the bootstrap and other resampling plans, SIAM Monograph, No.38, 1982。
- 寒川典昭・荒木正夫・渡辺輝彦：確率分布の推定母数の不確定性評価法，土木学会論文集，第375号/II-6，pp.133~141，1986。

(1987.7.27・受付)