

正規分布および3母数対数正規分布のPWM解の性能について

ON RELATIVE ACCURACY OF PWM ESTIMATES OF NORMAL AND
3-PARAMETER LOGNORMAL DISTRIBUTIONS

竹内邦良*・土屋一仁**

By Kuniyoshi TAKEUCHI and Kazuhito TSUCHIYA

Following the successful derivation of PWM solutions for Normal and 3-parameter Lognormal distributions by the authors, this paper presents their relative accuracy in comparison with other parameter estimation procedures such as Moment, Maximum-likelihood, Quantile and Sextile methods through Monte Carlo simulation experiments.

Simulation results revealed that PWM estimates of quantiles are unbiased for Normal distribution and less biased than those of Moment method for Lognormal distribution with a large coefficient of skewness. It was also revealed that rmse of PWM estimates of quantiles is as small as that of Moment method for Normal distribution but larger for Lognormal distribution.

Keywords: Probability Weighted Moment (PWM), quantile, Monte Carlo simulation, normal distribution, 3-parameter lognormal distribution

1. はじめに

Probability Weighted Moment (PWM: 確率加重積率) 法は, inverse form $x = x(F)$ でしか書き表わせない Wakeby 分布の母数推定法として, 1979年, Greenwoodら¹⁾によって提案されたものである。彼らはこの手法を Wakeby 分布以外に, Weibull, Gumbel, Generalized lambda, Logistic ならびに Kappa 分布にも適用し PWM 解を導いたが, それはいずれも inverse form をもった分布であった。その後 1985年, Hoskingら²⁾はイギリスで広く使われ, やはり inverse form で表わされる Generalized extreme value (GEV: 一般化極値) 分布の PWM 解を求めている。一方 inverse form をもたない分布としては Two-component extreme value (TCEV: 2要因極値) 分布に適用した 1986年 Beranら³⁾の研究があるが, 彼らの解は無限級数を含むもので, 解析解としては不十分なものであった。これに対し竹内・土屋⁴⁾は, inverse form で書き表わせない分布の代表格である正規分布, 3母数対数正規分布および

3母数ピアソンⅢ型分布について, 完全な解析解を導いた。

PWM 解の性能の検討に関してもすでに多くの研究がある。Landwehrら⁵⁾は, 1979年洪水の頻度解析に繁用されている Gumbel 分布に対し, PWM 法, 積率法 (Mom), 最尤法 (MxL) 三者による推定精度の比較を行った。比較は Monte Carlo シミュレーションにより発生された Gumbel 分布に従うデータに対して, クオントイル^{註1)}推定量の bias および rmse をもとに行われた。ここに bias は推定されたクオントイルの真値からの偏りであり, rmse は, 推定されたクオントイルの真値まわりの分散の平方根である。この結果 PWM 法はクオントイルの bias が小さく, 1次の自己相関係数が 0でなく, 標本数が 10以下, 非超過確率 $F < 0.5$ の場合にはクオントイルの rmse も小さいが, それ以外の場合は一般に MxL に劣ることが示された。この結果は Greis & Wood^{6), 7)} (1981) によっても確かめられ, 彼らは bias が小さいことの利点を利用して regionalization 用の推定法に使うことの有効性を示し

* 正会員 工博 山梨大学教授 工学部環境整備工学科
(〒400 甲府市武田 4-3-11)

** 学生会員 工修 京都大学大学院 土木工学専攻
(〒606 京都市左京区吉田本町)

注1) 与えられた確率年 (平均再帰間隔) T あるいは非超過確率 P に対する水文学量, ここでは確率年 T のあるいは確率レベル P のクオントイルとよぶ。日本語では確率水文学量とよぶのが一般的と思われるが, 意味が漠然としているのでこの表記を選んだ。

ている。(のち Lettenmaier & Potter³⁾ (1985) は、この有効性は、地域間変動係数の平均および変動係数が小さいときに限られると指摘している。) また Hosking ら²⁾ は一般化極値 (GEV) 分布について PWM 法と MxL 法との比較を行ったが、PWM 法は MxL 法に比べ、bias が小さく、また標本数が 25 以下程度では rmse も小さくて、大いに優れていると結論している。

本論文は竹内・土屋⁴⁾ により新しく求められた正規分布ならびに 3 母数対数正規分布の PWM 解について、その性能を Monte Carlo シミュレーションを用いてチェックするものである。

2. PWM 法

詳細は 4) に譲り、ここでは骨子のみ記す。Probability Weighted Moment (PWM: 確率加重積率) $M_{l,j,k}$ は以下のように定義される。

$$M_{l,j,k} = E(X^l F^j (1-F)^k) = \int_0^1 X^l(F) F^j (1-F)^k dF \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 E は期待値演算子、 l, j, k は非負の整数、 F は確率分布関数 $F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$ である。

F に対象とする確率分布関数を代入し、その分布関数の母数に等しい数の l, j, k の組合せに対する PWM を式 (1) の積分により求める。得られた PWM は F の母数の関数である。次に、標本データより標本 PWM を算定し、これを上の関係式に代入すれば、未知母数に関する連立方程式が得られ、その解として母数を求めることができる。これが PWM 法である。

PWM 法では $l=1$ とし、 $j=0$ ないしは $k=0$ のどちらか都合のよい方を用いるが、本論文では $k=0$ の場合を用いる。PWM の表記も、

$$M_{1,j,0} = M_j \dots\dots\dots (2)$$

と簡略化する。

竹内、土屋⁴⁾ により求められた正規分布、3 母数対数正規分布に対する PWM 解を示すと以下のとおりである。

正規分布

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dt \dots\dots (3)$$

では

$$\mu = M_0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma = \sqrt{\pi} (2M_1 - M_0) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 μ, σ は正規分布 (3) の母平均および母標準偏差である。

3 母数対数正規分布

$$F(x) = \int_m^x \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}(t-m)}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t-m)-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\} dt \dots\dots\dots (6)$$

では

$$\frac{\Psi(\sigma_y/\sqrt{2})-1/3}{\Phi(\sigma_y/\sqrt{2})-1/2} = \frac{M_2-M_0/3}{M_1-M_0/2} \dots\dots\dots (7)$$

$$m = M_0 \frac{\Phi(\sigma_y/\sqrt{2})-(M_1/M_0)}{\Phi(\sigma_y/\sqrt{2})-1/2} \dots\dots\dots (8)$$

$$\mu_y = \ln(M_0 - m) - \sigma_y^2/2 \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 m は分布の下限値を表わし、 μ_y, σ_y は変数 $y = \ln(x-m)$ の母平均および母標準偏差である。また $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布であり、 Ψ は

$$\Psi(u) = \int_{-\infty}^u 2\Phi(t/\sqrt{3})d\Phi(t) \dots\dots\dots (10)$$

である。

次に、PWM M_j の標本推定量 \hat{M}_j には

$$\hat{M}_j = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{i-1}{n-1} \cdot \frac{i-2}{n-2} \dots \frac{i-j}{n-j} & (j \geq 1) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i & (j = 0) \end{cases} \dots\dots\dots (11)$$

あるいは

$$\hat{M}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{i-\alpha}{n}\right)^j \dots\dots\dots (12)$$

を用いる。ここに、 n は標本数、 x_1, \dots, x_n は n 個の標本の小さい順の順序統計量である。また、 α は選ばれたプロットイング・ポジション公式の定数である。これを式 (4)、(5) ならびに式 (7)、(8)、(9) に代入することにより各母数の PWM 推定値が得られる。なお、本報では一貫して式 (11) の \hat{M}_j を用いた。

以下 3., 4. ではこの母数推定法と比較すべき他の方法を列挙する。

3. 正規分布の母数推定法

式 (3) の正規分布の母数 μ, σ の推定法として以下の 3 つを考える。

(1) 最尤法 (MxL)

下式対数尤度関数

$$L'(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \mu, \sigma) \dots\dots\dots (13)$$

ここに $f(x)$ は確率密度関数

に対してこれを最大にする μ, σ を求め、それを $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ とする。すなわち

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \dots\dots\dots (14)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \dots\dots\dots (15)$$

(2) 不偏推定量

式 (15) は偏差を有する統計量であるので、不偏推定量として

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \dots\dots\dots (16)$$

も、比較の対象とする。

(3) PWM法

式(11)より算出される標本PWMを用いて、式(4)、(5)より母数を推定する。なお、式(4)による推定値は式(14)と同一である。

4. 3母数対数正規分布の母数推定法

3母数対数正規分布の既往母数推定法としては、最尤法、積率法、クオンタイル法およびその併用法があるが、ここではPWM法を加えた以下の5つの方法を比較する。4番目のSextile法を3母数対数正規分布に適用した例はこれまでになく、本報が初めてである。最尤法を比較の対象としなかったのは、最尤法の計算がかなり煩雑であるに加え、Hoshiら¹⁰⁾の研究でrmseでみたとき、他の推定法に比べて性能が劣ることが示されているためである。

(1) 積率法(Mom)

対数正規分布の母数と平均、標準偏差、ひずみ係数には下式のような関係がある。

$$\sigma_y = \sqrt{\ln \left[\left(1 + \frac{1}{2}(\gamma^2 + \Gamma) \right)^{1/3} + \left(1 + \frac{1}{2}(\gamma^2 - \Gamma) \right)^{1/3} - 1 \right]} \dots\dots\dots(17)$$

$$\mu_y = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\sigma_x^2}{\exp(\sigma_y^2) |\exp(\sigma_y^2) - 1|} \right] \dots\dots\dots(18)$$

$$m = \mu_x - \exp(\mu_y + \sigma_y^2/2) \dots\dots\dots(19)$$

ここに $\Gamma = \gamma(4 + \gamma^2)^{1/2}$ である。

各データから算出できる標本平均 \bar{x} 、標本標準偏差 $\hat{\sigma}_x$ および標本ひずみ係数 \hat{C}_s を、 μ_x 、 σ_x および γ の代わりに用いて式(17)、(18)、(19)より母数を推定する。本報では \hat{s} 、 \hat{C}_s に、

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \dots\dots\dots(20)$$

$$\hat{C}_s = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 / \hat{S}^3 \dots\dots\dots(21)$$

を用いた。

(2) クオンタイル法と積率法の併用(Qt & Mom)

クオンタイル法は、位置母数 m の推定のために用いられる推定法であり、1949年、岩井により提案されたものである。 m の推定値 \hat{m} は

$$\hat{m}_i = (x_i \cdot x_{n-i+1} - x_n^2) / (x_i + x_{n-i+1} - 2x_m) \dots\dots\dots(22)$$

で求められる \hat{m}_i 、 $i=1, 2, \dots, k$ の平均値として考えられる。すなわち

$$\hat{m} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{m}_i \dots\dots\dots(23)$$

ここに、 x_i 、 x_{n-i+1} は小さい方から i 番目および $n-i+1$ 番目の順序統計量。また x_m はメディアンで以下のよう

$$x_m = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ (x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})/2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \dots\dots\dots(24)$$

岩井は、 k として標本数の10%を取ることを提唱し、わが国でも長く用いられてきたが、1980年 Stedinger⁹⁾ が $k=1$ とする方法を提案し、1984年 Hoshiら¹⁰⁾ がこれを是とする判定を下している。このため本報では、 $k=1$ の場合を用いた。

クオンタイル法により m を推定後、 μ_y 、 σ_y を推定するために積率法を用いる。この場合2つの方法が考えられる。1つは式(18)、(19)を利用する方法(Qt & Mom(RS))—ここにRSはデータを何の変換もせずそのまま用いるという意味でReal Space法であることを示す)であり、もう1つは $y_i = \ln(x_i - \hat{m})$ の変数変換後、 y_i を正規分布に従う変数とみなして、式(14)、(16)を利用して母数を推定する方法(Qt & Mom(LS))—ここにLSは対数変換をするのでLog Space法であることを示す)である。本報では両手法を検討する。

(3) クオンタイル法とPWM法の併用(Qt & PWM)

クオンタイル法で m を推定後、 μ_y 、 σ_y の推定するのにPWM法を用いる。この場合でも(2)の方法と同様にQt & PWM(RS)、Qt & PWM(LS)の2つの方法がある。Log Space法では y_i への変換後、それに対する標本PWMを求め、式(4)、(5)を用いればよい。Real Space法では下のPWMと母数の関係式

$$M_0 = \exp(\mu_y + \sigma_y^2/2) + m \dots\dots\dots(25)$$

$$M_1 = \exp(\mu_y + \sigma_y^2/2) \Phi(\sigma_y/\sqrt{2}) + m/2 \dots\dots\dots(26)$$

を用いる。ここで m としては式(22)のクオンタイル法による推定値で代用し、この2式から μ_y 、 σ_y を推定する。

(4) Sextiles法

この推定法は、Jenkinson¹¹⁾ により一般化極値分布の母数推定のために提案された推定法である。1986年には、Hoshi & Leeyavanija¹²⁾ によりピアソンIII型分布への適用も試みられた。概要は以下のとおりである。確率密度関数 $f(x)$ の面積を6等分する変数 $x_i (i=1 \sim 6)$ に対し、下式で表わされる区間 $[x_i, x_{i+1}]$ の理論平均(Sextile Mean)を ν_i とすると

$$\nu_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} 6tf(t)dt \dots\dots\dots(27)$$

またこの理論Sextile Meanの平均、標準偏差、比は

$$\mu_\nu = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \nu_i \dots\dots\dots(28)$$

$$\sigma_\nu = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (\nu_i - \mu_\nu)^2} \dots\dots\dots(29)$$

$$l_\nu = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_5 - \nu_6} \dots\dots\dots(30)$$

と表わされる。次に標本データを小さい順に並べ換えて

データ数の等しい6つのグループに分ける（データ数が6等分できないときは大きいデータのグループを増やしておくのがよい）。そして、各グループから標本 Sextile Mean $\nu_i (i=1, 2, \dots, 6)$ を算出し、式 (28), (29), (30) と同様の定義に基づいた統計量 $\hat{\mu}_\nu, \hat{\sigma}_\nu, \hat{l}_\nu$ を求める。理論値と標本データの双方から算出した平均、標準偏差、比のそれぞれが等しいとして3つの連立方程式を立て、その解を推定母数とするのが Sextile 法である。

具体的には、対数正規分布の場合の Sextile Mean の理論値 ν_i は、

$$\nu_i = 6 \exp(\mu_y + \sigma_y^2/2) \{ \Phi(Z_i - \sigma_y) - \Phi(Z_{i-1} - \sigma_y) \} + m \quad (31)$$

で表わされる。ここに、 Φ は標準正規分布関数であり、 Z_i は下式を満たす定数である。

$$\Phi(Z_i) = \frac{i}{6} \quad (32)$$

よって $\nu_i, i=1 \sim 6$ の平均、標準偏差、比は、

$$\mu_\nu = \exp(\mu_y + \sigma_y^2/2) + m \quad (33)$$

$$\sigma_\nu = \exp(\mu_y + \sigma_y^2/2)$$

$$\times \sqrt{6 \sum_{i=1}^6 (\Phi(Z_i - \sigma_y) - \Phi(Z_{i-1} - \sigma_y))^2 - 1} \quad (34)$$

$$l_\nu = (\Phi(Z_2 - \sigma_y) - 2\Phi(Z_1 - \sigma_y)) / (1 - 2\Phi(Z_5 - \sigma_y) + \Phi(Z_6 - \sigma_y)) \quad (35)$$

となる。なお、式 (34) の l_ν と σ_y の関係については、本報では

$$\sigma_y = g(l_\nu) \quad (36)$$

を満たす近似多項式 $g(\cdot)$ を作成しておき、これにより l_ν に対する σ_y を求めた。

(5) PWM 法

PWM の理論値と母数の関係は、式 (7), (8), (9) に示すとおりである。標本 PWM を式 (11) より求め式 (7), (8), (9) の M_0, M_1, M_2 に代入して母数を推定する。なお本報では、式 (7) の σ_y と M_0, M_1, M_2 の関係にはあらかじめ

$$\sigma_y = h((M_2 - M_0/3)/(M_1 - M_0/2)) \quad (37)$$

を満たす近似多項式 $h(\cdot)$ を作成しておき、これより σ_y を求めた。（文献4の補遺2参照）

5. Monte Carlo シミュレーション

あらかじめ母数を設定した正規分布および対数正規分布に従う母集団から、Monte Carlo法により標本集団を採取し、その標本集団から各推定法で母数を推定する。推定された母数をパラメーターとする確率分布から確率レベル p のクオンタイルを算定し、これをあらかじめ設定した母数をパラメーターとする分布の理論クオンタイルと比較して、各推定法による母数推定の精度を比較検討する。比較の規準としては、標本数 n の標本集団

を N 組採取した後、下式、すなわち正規分布には式 (38), (39) を、対数正規分布には式 (40), (41) を用いて、真値からの偏りである bias とそのまわりの分散の平方根である root mean square error (rmse) を算出し、両統計量を比較した。

$$\text{bias} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_p - \hat{X}_{pi}) \quad (38)$$

$$\text{rmse} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_p - \hat{X}_{pi})^2} \quad (39)$$

$$\text{bias} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_p - \hat{X}_{pi}) / X_p \quad (40)$$

$$\text{rmse} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_p - \hat{X}_{pi})^2 / X_p} \quad (41)$$

ここに、 X_p は確率レベル p のクオンタイルの真値、 \hat{X}_p は推定値である。また、本論文では $N=5000$ とした。

正規分布の母集団としては、 $\mu=0, \sigma=1$ を、対数正規分布の場合は、母平均を1、変動係数を0.25, 0.50, 1.00とする3組の2母数対数正規分布(LN2)を母集団として設定した。正規、対数正規ともに、採取した標本集団の標本数 n は10刻みで10から100までの10組、確率レベル p については、10年, 100年, 500年洪水あるいは降水を想定して、0.9, 0.99, 0.998とした。

ところで、Monte Carloシミュレーションによる対数正規分布の母数推定法の精度の検討には、過去に Stedinger⁹⁾ の研究や Hoshi ら¹⁰⁾ の研究がある。これらの研究ではいずれも、採取した標本集団が次の条件式 (42), (43) の領域に入った場合には、その標本からは母数を推定せず、その標本集団を棄却し、そのうえで最終的に母数推定が可能な標本集団 N 組を確保している。

$$\hat{C}_s < 0.05 \quad (42)$$

$$\hat{m} > x_1 \quad (x_1 \text{ は最小標本値}) \quad (43)$$

条件式 (42) は、標本分布が対称あるいは負の方向へひずんだ形をもち、対数正規分布を適用すべきでない標本集団であることを意味し、条件式 (43) は、クオンタイル法と Log Space での積率法の併用法 (Qt & Mom (LS)) による母数推定が可能な標本集団であることを意味している。以上の点は本論文でも共通であるため、これにならって両式による標本集団の棄却を行った。

Sextile 法, PWM 法については下式の条件にあった場合、標本の棄却を行った。

$$\hat{l}_\nu > 0.95 \quad (44)$$

$$\hat{l}_\nu < 0.01 \quad (45)$$

$$\frac{\hat{M}_2 - \hat{M}_0/3}{\hat{M}_1 - \hat{M}_0/2} < 1 \quad (46)$$

$$\frac{\hat{M}_2 - \hat{M}_0/3}{\hat{M}_1 - \hat{M}_0/2} > 1.247 \quad (47)$$

条件式 (44) を満たす標本集団は、ひずみ度が0に極端

Table 1 Number of rejected samples before 5 000 acceptable samples obtained.

Sample Size	Skew	$\hat{c}_s < 0.05$	$\hat{m} > x_1$	$\hat{l}_v > 0.95$	$\hat{l}_v < 0.01$	* $\hat{c} < 1$	* $\hat{c} > 1.247$	Total Number of Rejected Sample Sets
10		2300	2120	373	319	2104	0	2724
20		1090	1012	313	0	955	0	1296
30		683	600	820	0	592	0	1077
40		414	361	174	0	356	0	537
50	0.766	288	256	138	0	228	0	379
60		179	163	250	0	146	0	346
70		99	91	58	0	83	0	160
80		76	65	46	0	62	0	119
90		44	41	88	0	39	0	121
100		29	34	25	0	24	0	59
10		967	885	102	431	870	9	1485
20		225	194	44	0	196	0	258
30		62	48	96	0	50	0	127
40		23	13	11	0	18	0	30
50	1.625	6	6	2	0	6	0	12
60		0	2	4	0	1	0	6
70		0	0	0	0	0	0	0
80		0	0	0	0	0	0	0
90		0	0	0	0	0	0	0
100		0	0	0	0	0	0	0
10		328	309	16	995	293	103	1401
20		21	21	6	4	17	18	48
30		2	1	3	0	2	6	9
40		0	0	0	0	0	4	4
50	4.000	0	0	0	0	0	3	3
60		0	0	0	0	0	3	3
70		0	0	0	0	0	2	2
80		0	0	0	0	0	0	0
90		0	0	0	0	0	1	1
100		0	0	0	0	0	0	0

\hat{c}_s :式(21), \hat{m} : $k=1$ とした式(23), \hat{l}_v :式(30)の標本値, \hat{M}_j :式(11)より算定

$$*\hat{c} = \frac{\hat{M}_2 - \hat{M}_0/3}{\hat{M}_1 - \hat{M}_0/2}$$

に近く、条件式(45)の場合には、作成した多項式(36)の誤差が大きくなる。条件式(46)では、標本集団から推定される σ が負になってしまい、また、条件式(47)では、多項式(37)の誤差が大きくなる(ただし、用いる多項式の精度をさらに上げればこの条件は、考慮しなくてもよい)。

Table 1には $N=5000$ 組の標本集団を用意するまでに棄却した標本集団の数が示してある。これらの標本の棄却を行いながら5000組の標本集団を用意したということである。

6. シミュレーション結果

以下に、シミュレーションの結果として得られたbias, rmseの状況を述べ、それらの数値の一部は数表化あるいは図化して報告する。

(1) 正規分布

正規分布のクオントイルの推定では、Table 2をみるとPWM法のbiasが最尤法と比較して小さいことがわかる。標本数が小さい場合、確率レベルの大きい場合にこの差は著しいが、 σ に不偏推定量(15)を用いた場合、標本数 $n > 40$ 程度でPWM法と大差がみられなくなる。一方rmseをTable 3に示した。この表では、最尤法よりPWM法のrmseが大きく、後者が幾分劣る様子のみ

せている。この原因は、PWM法のstandard errorが大きいことにあると容易に予想される。ここに

$$\text{std. err} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\hat{X}_{(i)} - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{X}_{(i)} \right) \right)^2} \dots\dots\dots(48)$$

である。PWM法による推定値は、真値との偏りは小さいが標本分散は大きいということである。

(2) 3母数対数正規分布

次に、3母数対数正規分布のクオントイルの推定精度についての結果を検討する。Table 4は $n=20$ の場合のbiasの数表であるが、他の場合も総合すると以下のようになる。 $\gamma=0.766$ での積率法は他の手法と比較して

Table 2 Bias of estimated quantile values for Normal variates.

Method	Sample Size	bias(\hat{x}_p)		
		0.90	0.99	0.998
MxL	20	0.05	0.09	0.11
Mom		0.02	0.03	0.04
PWM		0.00	0.00	0.00
MxL	40	0.02	0.04	0.05
Mom		0.01	0.01	0.01
PWM		0.00	0.00	0.00
MxL	80	0.01	0.02	0.02
Mom		0.00	0.00	0.00
PWM		0.00	0.00	0.00

biasの小さい傾向がある。逆にbiasの大きい推定法では、クオンタイル法 & PWM法 (LS) が挙げられる。 $\gamma=1.625$ のときは、クオンタイル法 & 積率法 (RS) のbiasが小さく、先の場合と異なり積率法のbiasは大きいことが目立つ。 $\gamma=4.0$ の場合では、PWM法、クオンタイル法 & PWM法 (RS) がよい結果を示し、 $\gamma=1.625$ の場合と同様、積率法のbiasが大きい。Sextile法のbiasは標本数が6の倍数のときは小さいが、そうでない場合は逆に大きく、その差は顕著に現われた。

次にrmseについてはTable 5に $n=20$ のときの数表とFig. 1(a)~(c)に積率法、クオンタイル法 & 積率法 (RS), PWM法, Sextile法の4つの手法のrmseと標本数の関係を図示した。(a)~(c)はそれぞれひずみ係数が $\gamma=0.766, 1.625$ および 4.00 のものであり、実線は100年確率、破線は500年確率の推定値に対する

Table 3 Rmse of estimated quantile values for Normal variates.

Method	Sample Size	rmse(\hat{x}_p)		
		0.90	0.99	0.998
MxL	20	0.31	0.45	0.53
Mom		0.31	0.45	0.53
PWM		0.32	0.46	0.54
MxL	40	0.22	0.31	0.37
Mom		0.22	0.31	0.37
PWM		0.22	0.32	0.38
MxL	80	0.15	0.22	0.26
Mom		0.15	0.22	0.26
PWM		0.15	0.22	0.26

Table 4 Bias of estimated quantile values for LN 2 variates (Sample Size=20).

Method	Skew	bias(\hat{x}_p)/ x_p			
		0.90	0.99	0.998	
Mom	0.766	-0.002	-0.005	-0.009	
Qt & Mom(LS)		-0.009	-0.053	-0.092	
Qt & Mom(RS)		0.000	-0.030	-0.058	
Qt & PWM(LS)		-0.016	-0.069	-0.114	
Qt & PWM(RS)		-0.009	-0.055	-0.095	
PWM		-0.009	-0.048	-0.083	
Sextile		-0.135	-0.377	-0.553	
Mom		1.625	0.001	0.057	0.087
Qt & Mom(LS)			-0.009	-0.054	-0.100
Qt & Mom(RS)			0.016	0.008	-0.009
Qt & PWM(LS)	-0.022		-0.081	-0.137	
Qt & PWM(RS)	-0.003		-0.047	-0.091	
PWM	-0.002		-0.038	-0.076	
Sextile	-0.089		-0.294	-0.445	
Mom	4.000		-0.032	0.164	0.263
Qt & Mom(LS)			-0.018	-0.085	-0.157
Qt & Mom(RS)			0.047	0.100	0.111
Qt & PWM(LS)		-0.041	-0.133	-0.233	
Qt & PWM(RS)		0.014	-0.035	-0.092	
PWM		0.016	-0.018	-0.073	
Sextile		-0.021	-0.188	-0.323	

LS : Log Space
RS : Real Space

ものである。この図から以下のことが一目瞭然である。

① 推定されたクオンタイルのrmse, すなわち確率水文量の推定誤差を大きくする要因は、

- 1) sample sizeが小さいこと。
- 2) ひずみ係数が大きいこと。
- 3) 大きい確率年を対象にすること。

である。推定方法による違いも大きいですがsample sizeが大きくなるに従って差は縮まり、ひずみ係数が4.0ときわめて大きい場合を除いては $n>60$ ではほとんど差がなくなる。

② Sextile法による推定のrmseは n の増加に対して大きな凹凸変動を示すが、これはbiasの場合も同様で、データ数が6の倍数のときには他の手法と同程度の精度を与えるが、そうでないときの精度はきわめて低くなることを示している。これはデータ数が6の倍数でないときには、正確な6等分である式(27)に基づいた理論式(34), (35)を用いることに無理が生じるということである。この傾向はひずみ係数が4.0と大きい場合にはやや不明瞭であるが、それでも他の手法のようにsample sizeに対して単調減少を示さない点で、依然顕著である。

さらに各手法による差異の詳細をみると以下のようなことがわかる。 $\gamma=0.766$ では、比較的積率法がよいと判断される。rmseの大きいものではSextile法、クオンタイル法 & PWM法 (LS) が挙げられPWM法がそれに続く。Sextile法のrmseは大きいですが、標本数が6の倍数のときは図中の3手法と同程度の値に近づく。

Table 5 Rmse of estimated quantile values for LN 2 variates (Sample Size=20).

Method	Skew	rmse(\hat{x}_p)/ x_p			
		0.90	0.99	0.998	
Mom	0.766	0.075	0.124	0.165	
Qt & Mom(LS)		0.077	0.166	0.255	
Qt & Mom(RS)		0.074	0.136	0.199	
Qt & PWM(LS)		0.080	0.181	0.279	
Qt & PWM(RS)		0.076	0.160	0.242	
PWM		0.076	0.154	0.231	
Sextile		0.156	0.425	0.649	
Mom		1.625	0.151	0.237	0.298
Qt & Mom(LS)			0.151	0.311	0.458
Qt & Mom(RS)			0.141	0.246	0.337
Qt & PWM(LS)	0.157		0.333	0.497	
Qt & PWM(RS)	0.145		0.287	0.419	
PWM	0.145		0.289	0.434	
Sextile	0.173		0.435	0.674	
Mom	4.000		0.314	0.402	0.466
Qt & Mom(LS)			0.277	0.553	0.799
Qt & Mom(RS)			0.250	0.387	0.484
Qt & PWM(LS)		0.289	0.599	0.880	
Qt & PWM(RS)		0.253	0.476	0.672	
PWM		0.252	0.490	0.726	
Sextile		0.252	0.533	0.804	

LS : Log Space
RS : Real Space

$\gamma=1.625$ でも同様、積率法のrmseが小さい。逆に、rmseの大きいものでは、クオンタイル法&PWM法(LS), PWM法, Sextile法が挙げられる。標本数が $n>50$ のころからクオンタイル法&PWM法(LS)もerrorが小さくなる(他の手法との差もそれほど顕著ではない)。また、Sextile法も、 $n>50$ かつ標本数が6の倍数のときはrmseが相対的にかなり小さい。

$\gamma=4.0$ の場合、各手法によるrmseの差は対象確率年によって違いがみられる。まず $T_r=100$ 年では、標本数が $n<50$ の範囲では、クオンタイル法&積率法

(RS), 積率法の順にrmseが小さく、PWM法, クオンタイル法&PWM法(LS), Sextile法等では大きい。 $T_r=500$ 年でも前二者は小さく、PWM, Sextile両法は大きい。前二者どうしの差はきわめて小さい。 $n>50$ になるとクオンタイル法&PWM法(LS)と積率法では、積率法のrmseが大きく全体ではSextile法が良好な結果を示している。

(3) PWM法が積率法に劣る理由

以上のクオンタイル推定誤差に関するシミュレーション結果は以下のことを示している。すなわち、PWM

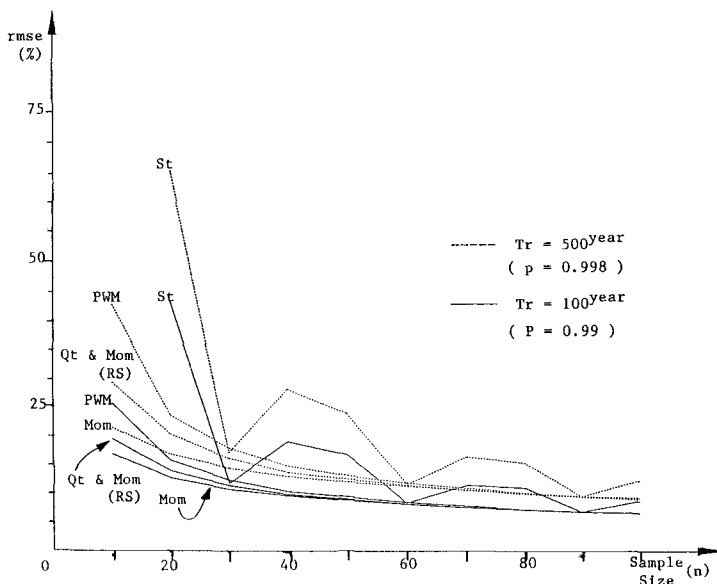


Fig.1(a) Sample size v. s. rmse of estimated quantile values for LN 2 variates ($\gamma=0.766$).

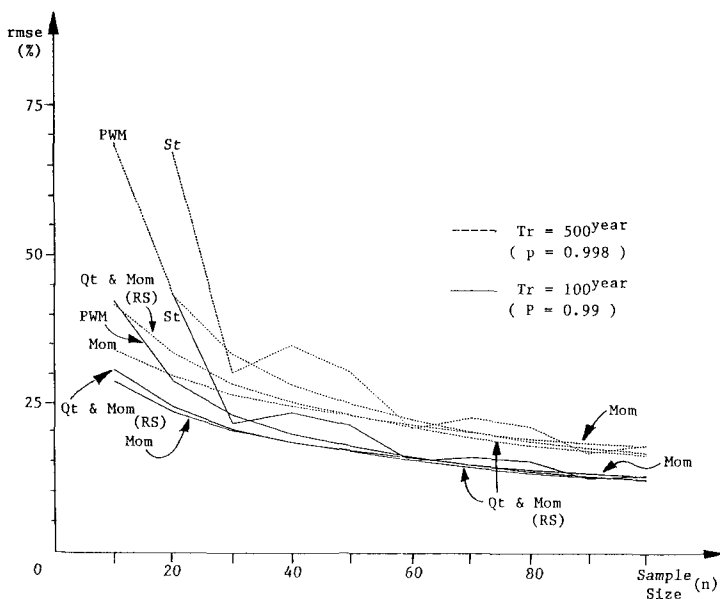


Fig.1(b) Sample size v. s. rmse of estimated quantile values for LN 2 variates ($\gamma=1.625$)

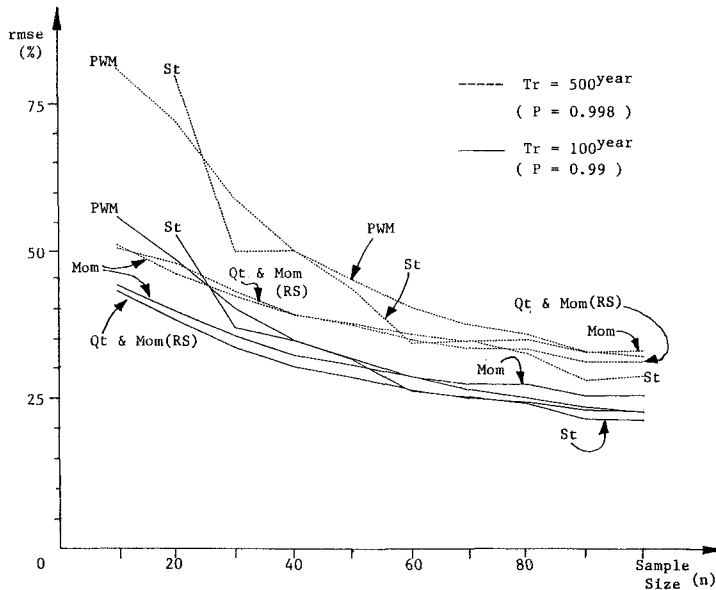


Fig. 1 (c) Sample size v. s. rmse of estimated quantile values for LN 2 variates ($\gamma=4.000$).

法は、正規分布で標本数が比較的小さいときの bias, 3 母数対数正規分布でひずみ係数が $\gamma=4.0$ というきわめて大きいときの bias において、他の手法よりも小さく、優れた推定性能をもつが、その他の場合の bias およびすべての場合の rmse についていずれも積率法（正規分布の場合には最尤法と同じ）に勝るとも劣らない。このような結果となった理由としては、以下の 2 点が考えられる。

① 式 (11) の標本 PWM は、Landwehr ら⁵⁾により証明されているとおり不偏であるが、その分散は大きいのではないかと考えられる。このため正規分布の標準偏差の PWM 解が PWM の線形和で与えられて、bias をもたず、したがってクオントイルの bias もないにもかかわらず、その std. error (48) が大きく、rmse を大きくしているのではないか。

② 対数正規分布では、bias が必ずしも小さくないという結果になっているのは、式 (7) により母数 σ を推定するために、標本 PWM ($\hat{M}_2 - \hat{M}_0/3$) を標本 PWM ($\hat{M}_1 - \hat{M}_0/2$) で除するといった非線形演算を行うので、推定量 $\hat{C} = (\hat{M}_2 - \hat{M}_0/3) / (\hat{M}_1 - \hat{M}_0/2)$ が C の不偏推定量にならないことによると考えられる。すなわち C の実用上の範囲が $1 < C < 1.247$ ($C=1$ は $\sigma_v=0$, $C=1.247$ は $\sigma_v=2.326$ に相当) に限られているのに対し、 \hat{C} の偏差が相対的に大きいものと思われる。これを標本推定量の代数的境界という点から考えてみると以下のようなになる。すなわち積率法にあっては標本ひずみ係数に代数的境界の影響で推定される母数 $\hat{\sigma}_v$ に上限が存在するのに対し標本 PWM の関数 \hat{C} の代数的境界

は明らかでなく、この境界による制約をあまり受けないのではないか。これが、積率法がひずみ係数の極端に大きな場合を除いておおむね PWM 法に勝っている理由であろう。

以上著者らは、標本 PWM の分散が大きいこと、母数が PWM に関し高次の非線形関係にあることが、PWM 法の限界をなしていると考えている。特に前者に関しては今後さらに理論的検証を行いたい。なお、 \hat{M}_j の加重にプロットイング・ポジション公式を用いる式 (12) による場合についても、2 パターン ($\alpha=0.35$ と $\alpha=0.5$) 検討してみたが、クオントイルの推定精度が向上するという結果までには至らなかった。

(4) クオントイル推定精度と標本数

Fig. 1 (a)~(c) に示された標本数と rmse の関数は、きわめて具体的、実用的意味のあるものである。それはデータ数に応じて、必要な確率レベルのクオントイル推定に避けられない推定誤差が図から読み取れるということである。

たとえば、母ひずみ係数 $\gamma=0.766$ である場合には、Fig. 1 (a) をみると、標本数が 60 と相当多くても、100 年洪水推定では rmse は 6% を下回ることはない。500 年洪水では 8% を下回ることはない。これが標本数 $n=30$ になるとそれぞれ 10%, 14% を下回ることはないということになっている。 $\gamma=4.0$ では Fig. 1 (c) から、100 年確率洪水の推定誤差が、 $n=60$ で約 30% を下回らないことがわかる。

なおこの図は、现阶段では、図を参照する際に母ひずみ係数 γ が既知であることを前提にしたものであり、

また母集団が2母数対数正規分布に従う場合についてのみ正確な $n \sim \text{rmse}$ を与えるように作図されたものである。したがって実用に供するには依然として多少の問題が残っている。今後より一般的な条件の下に同様な図を作成する研究が必要である。

7. 結 論

水文統計の分野において利用・応用範囲の広い正規分布, 3母数対数正規分布に対し, 竹内, 土屋⁴⁾はPWM法による母数推定公式を誘導した。本論文では, このPWM法と他の母数推定法によるクオントイルの推定精度をMonte Carlo法を用いて比較検討した。この結果以下の諸点が明らかになった。

(1) 正規分布のクオントイルの推定において bias を比較すると, PWM法が積率法より小さい bias を示した。これはPWM法で推定したクオントイルが理論的な不偏推定量であることによる。

(2) 正規分布のクオントイル推定値の rmse は小標本 ($n \leq 40$) ではわずかに積率法に劣るが, 全体としてほぼそれと同等の精度を示した。小標本に対してやや劣る結果となったのはPWM法により推定したクオントイルは, 不偏ではあるが, 分散が大きいということによる。

(3) 3母数対数正規分布のクオントイル推定値の bias は, ひずみ係数が $\gamma=4$ のように大きい場合には他のどの推定法に比べても小さいが, ひずみ係数が小さい場合には最小ではない。このようにPWMが不偏推定量である長所が正規分布の場合ほど顕著に現われなかったのは, 母数推定のための推定指標 $(\hat{M}_2 - \hat{M}_0/3)/(\hat{M}_1 - \hat{M}_0/2)$ に標本PWM どちらの非線形演算が行われており, この指標が不偏推定量にならないためと考えられる。

(4) 3母数対数正規分布のクオントイル推定値の rmse は, 指標 $(\hat{M}_2 - \hat{M}_0/3)/(\hat{M}_1 - \hat{M}_0/2)$ に標本ひずみ係数に存在する代数的境界のような歯止めがないため, 推定母数 $\hat{\sigma}_y$ の取り得る範囲がかなり広く, そのため Standard error が大きくなり, (3) に指摘した bias の影響も加わり PWM 法の推定精度が劣る結果になったと推測される。

以上のようにPWM法によるクオントイル推定は, bias については正規分布では不偏であり, 対数正規で

もひずみ係数が大きい場合について小さい。また, rmse についても, 正規分布の場合には積率法(最尤法)と同等ということがわかった。しかしながら対数正規分布の場合の rmse については, 積率法が PWM 法に勝っているという結論が得られた^{注2)}

なおこのほかに本研究を通じ見出された主な点は以下のとおりである。

(5) 対数正規分布に対し Sextile 法を初めて適用したが標本数が6の倍数のときを除き error は他の推定法に比べかなり大きいものであった。

(6) クオントイル法は積率法との併用が一般的であったが, PWM法との併用も可能であり標本数が多いならば ($n > 50$) error も他の推定法とほぼ同等であり簡便性に富む推定法である。

参 考 文 献

- 1) Greenwood, J.A., Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R. : Probability Weighted Moments, Water Resour. Res., Vol.15, No.5, pp.1049~1054, 1979.
- 2) Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. and Wood, E.F. : Estimation of the Generalized Extreme Value Distribution by the Method of Probability Weighted Moments, Technometrics, Vol.27, No.3, pp.251~261, 1985.
- 3) Beran, M., Hosking, J.R.M. and Arnell, N. : Comment on "Two-Component Extreme Value Distribution for Flood Frequency Analysis", Water Resour. Res., Vol.22, No.2, pp.263~266, 1986.
- 4) 竹内邦良・土屋一仁 : 正規分布, 対数正規分布およびピアソンⅢ型分布のPWM解, 土木学会論文集, 第393号/Ⅱ-9, 1988年5月.
- 5) Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R. : Probability Weighted Moments Compared With Some Traditional Techniques in Estimating Gumbel Parameters and Quantiles, Water Resour. Res., Vol.15, No.5, pp.1055~1064, 1979.
- 6) Greis, N.P. and Wood, E.F. : Regional Flood Frequency Estimation and Network Design, Water Resour. Res., Vol.17, No.4, pp.1167~1177, 1981.
- 7) Greis, N.P. and Wood, E.F. : Correction to "Regional Flood Frequency Estimation and Network Design", Water Resour. Res., Vol.19, No.2, pp.589~590, 1983.
- 8) Lettenmaier, D.P. and Potter, K.W. : Testing Flood Frequency Estimation Method Using a Regional Flood Generation Model, Water Resour. Res., Vol.21, No.12, pp.1903~1914, 1985.
- 9) Stedinger, J.R. : Fitting Log Normal Distribution to Hydrologic Data, Water Resour. Res., Vol.16, No.3, pp.481~490, 1980.
- 10) Hoshi, K., Stedinger, J.R. and Burges, S.J. : Estimation of Log-Normal Quantiles, Jour. of Hydr., 71, pp.1~30, 1984.
- 11) Natural Environment Research Council : Flood Studies

注2) 本稿投稿後, PWM法が積率法に勝る1つの重要な側面が見出された。それはLN3を母集団とする標本にあっては, PWM法によりクオントイルを推定した場合, 積率法による場合より, 真のクオントイルに対して underestimate (すなわち確率洪水を小さく見積る危険推定) の頻度が低いということである。詳細は土屋, 竹内 : 第43回土木学会年講(1988)Ⅱを参照。

- Report, Vol.1, pp.68~69, 90~92, Whitefriars Press, London, 1975.
- 12) Hoshi, K. and Leeyavanija, U. : A New Approach to Parameter Estimation of Gamma-Type Distributions, JHHE, Vol.4, No.2, pp.79~95, 1986.
- 13) Kirby, W. : Algebraic Boundedness of Sample Statistics, Water Resour. Res., Vol.10, No.2, pp.220~222, 1974.

(1987.10.20・受付)
