

正規分布, 対数正規分布およびピアソンⅢ型分布のPWM解

PWM SOLUTIONS TO NORMAL, LOGNORMAL AND PEARSON-III DISTRIBUTIONS

竹内邦良*・土屋一仁**

By Kuniyoshi TAKEUCHI and Kazuhito TSUCHIYA

It has been considered that a new statistical parameter estimation method using probability weighted moments (PWM) is difficult to be applied for the distributions that cannot be expressed in an inverse form, i. e., $x=x(F)$. The authors show in this paper that it has been successfully applied and that the analytical PWM solutions were obtained for the representative distributions of non-inverse type, that is, Normal, 3-parameter Lognormal and 3-parameter Pearson-III distributions. The PWM estimate of the standard deviation of the Normal distribution turned out to be unbiased and having a form of a linear combination of samples.

Keywords: Probability Weighted Moment (PWM), non-inverse form distribution

1. はじめに

洪水の頻度解析は, 水害防除のための基本作業の1つである。この作業には, 気候変動とその影響の評価, 人為の加わった流域での流出量の扱い方など, 水文現象の非定常性, 不均質性に関連した, きわめて困難な問題がかかわっているが, それをとりあえずしておくとしても, いま1つ重要な問題が残されている。それは母集団の分布として何を選択すべきかということと, 分布を決めた場合でもそのパラメータをいかに推定すべきかという, 時系列解析の統計手法上の問題である。この問題の基本的命題はデータ数が限られている中でいかに合理的に母集団の確率特性を推定するかということであり, 本質的には解のあり得ない問題である。そのため何を合理的と考えるかにより, 各種の提案と解が生まれてくる。本論文で取り上げる Probability Weighted Moment (PWM) 法も, その1つである。

PWM法は1979年Greenwoodら¹⁾により提案されたもので, パラメータ推定の規準として通常の積率に替

えて, 確率で加重した積率 (Probability Weighted Moment) を用いるという新しい手法である。この方法には各種の利点があるが, 反面 inverse form (確率変数が非超過確率の陽型式で表わされた形) で書き表わせる分布への適用は容易であるが, inverse form で書き表わせない分布には適用困難という難点がある。このため後者への適用例はこれまで発表されていない。これに対し, 著者らは後者に属する代表的な分布である正規分布, 3母数対数正規分布ならびに3母数ピアソンⅢ型分布に本法を適用することに成功した。ここに示すのはその解と解の特徴についてである。本論に入る前に, まず PWM法なる推定方法が考案された経緯とその方法について概観しておきたい。

2. PWM法出現の経緯

洪水の頻度解析の母分布として多くのものが提案され, 一国の計画にばらばらに用いられていることの不都合が指摘され, それを行政目的では一本化してはどうかということ, 1967年, アメリカ水資源審議会の水文委員会 (Benson委員長)²⁾ が対数ピアソンⅢ型分布 (LPⅢ) を提案した。このときパラメータの推定方法として Bensonらはデータの対数変換値にピアソンⅢ型分布をあてはめる積率法を採用し, $\log Q = M + KS$ (ここ

* 正会員 工博 山梨大学教授 工学部環境整備工学科
(〒400 甲府市武田4-3-11)

** 学生会員 工修 京都大学大学院土木工学専攻
(〒606 京都市左京区吉田本町)

に M は水文量の対数の平均値, S はその標準偏差, K はそのひずみ係数と求めたい確率年ごとに表に与えられた係数) という形でクオンタイル Q を求められるようにした。

LPⅢを唯一の分布形として共通に用いるという方針に対しては当然異論が出たが, ほかにもより実際的な問題が指摘された。それは短期間しかない年最大洪水資料から, ひずみ係数を推定するとばらつきが大きくなり, それを信頼して確率洪水を算定するのでよいのかという点である。これに対しては2つの対応が取られた。1つは, 標本ひずみ係数のバイアスを係数を用いて補正するものである。これには, Wallis ら³⁾の補正係数や, Bobee and Robitaille⁴⁾が提案した標本数および分布形ごとに違った補正係数などがある。もう1つは1点の水文観測を用いるのではなく, 流域の地形・気象等物理要因とパラメーターとの関係が周辺地域では類似しているはずであるとの仮定に立って, 周辺情報を利用して観測期間の短さを補うという考え方である。この手法は, regionalization とよばれ, 標本パラメーターをもとにデータの模擬発生を行う方法が提案された。1967年, Benson and Matalas⁵⁾により導入されたものである。

ところで1975年 Matalas ら⁶⁾は, regionalization の効果を各種分布を用いて検討するうちに興味深い事実を発見した。それは対数正規分布 (LN) やピアソンⅢ型分布 (PⅢ) を仮定して, その分布に従うようシミュレーションにより発生した多地点データのひずみ係数の標準偏差は, 実際各地で観測される標本のひずみ係数の標準偏差より小さい, すなわち実測値が仮説理論値から乖離しているという事実である。これを彼らは condition of separation とよんだ。1978年, Landwehr ら⁷⁾は, LPⅢでも condition of separation がみられることを示した。1980年になって星, 山岡⁸⁾は, LPⅢでは condition of separation を表現できることを示しているが, 当時はそれが知られていないこともあって, LN や PⅢ等通常の分布ではなく, condition of separation を表現できる分布はないか, それを探そうということになった。ここで H. Thomas, Jr. の Wakeby 分布が注目を浴びることになった。

Houghton^{9), 10)} は, 1978年5個パラメーターをもつ Wakeby 分布が, condition of separation を表現できるとともに LN よりもよく年最大洪水量の実測値に fit することを示した。ところがこの分布は, 積率法でも最尤法でもパラメーターの推定をすることができず, したがって incomplete mean algorithm とよばれる煩雑な方法を用いねばならなかった。これははじめに2つのパラメーターを仮定して他を上記アルゴリズムで推定し, 徐々に全部を決めていく繰返し法である。そこでこれに

代わるより有効な方法が求められたが, そこに登場したのが, Greenwood ら¹¹⁾による Probability Weighted Moment (PWM) 法である。PWM 法は Wakeby 分布の有効な解法であるのみならず, 後述するように標本の (高次)モーメントを用いることによる積率法の難点を, 標本そのものではなくその非超過確率 (F) のモーメントを用いることで回避するという, きわめてユニークな方法である。しかしながら一方, Wakeby 分布のように $x = x(F)$ の形で表わされる分布のパラメーター推定には適しているが, その形では表わせない分布には適用の難しい方法でもある。

Greenwood ら¹¹⁾は inverse form で表わされる各種分布の PWM 解を求めた。それらは Weibull, Gumbel, Generalized Lambda, Logistic, Wakeby ならびに Kappa 分布である。また, Hosking ら¹¹⁾は一般化極値分布 (GEV: Generalized extreme value distribution) にも適用した。inverse form で書き表わせない分布への適用例としてはこれまでに, Beran ら¹²⁾が, Rossi ら¹³⁾により提案された二要素極値分布 (TCEV: Two-component extreme value distribution) に適用したものがあつた。しかしながらこれは, PWM 解が級数の形で与えられたもので, 解析解としては不十分なものである。

つづいて以下に PWM 法の概要を説明する。

3. PWM 法

Probability Weighted Moment (PWM: 確率加重積率) $M_{l,j,k}$ は以下のように定義される。

$$M_{l,j,k} = E [X^l F^j (1-F)^k] = \int_0^1 x^l F^j (1-F)^k dF \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに, E は期待値演算子, l, j, k は非負の整数, F は確率分布関数 $F(x) = \text{Prob}(X \leq x)$ である。

F に対象とする確率分布関数を代入すれば, l, j, k の定まった組合せに対し式 (1) の積分を実行することができる。積分結果は F の母数の関数になっている。したがって未知母数に等しい数の l, j, k の組合せに対する PWM を求めれば, 未知母数に関する連立方程式が得られ, その解として母数を求めることができる。これが PWM 法である。

上記方法を実行するためには, まず l, j, k の組合せを決めなくてはならない。PWM 法では $l=1, j=0$ ないしは $l=1, k=0$ のどちらか都合のよい方を用いる。したがって x に対する次数は常に1次であり, F ないしは $(1-F)$ のどちらか一方は omit されることになる。本論文では $k=0$ の場合を用いるのでそれを例に議論を進める。用いる PWM は母数が2つのときは, $j=0, 1$

であり, 3つのときは $j=0, 1, 2$ と, 母数が増すにつれ高次のものまで利用することになる. なお, この場合のPWMの表記は,

$$M_j = M_{l,j,0} \dots \dots \dots (2)$$

と簡略化するのが通例であり, 本文でも以降これを用いる.

ところで確率加重積率 (PWM)

$$M_j = \int_0^1 x F^j dF \dots \dots \dots (3)$$

と, 通常の積率

$$m_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \dots \dots \dots (4)$$

とは大きな違いがある. それは式(4)の積率には, 観測値 x の r 乗の operation が含まれているため, 高次のものでは観測値の誤差や異常値を強調しすぎてしまうことになるのに対し, 式(3)のPWMでは, そのoperationが非超過確率 F に対してなされるため, 誤差や異常値によるサンプリングエラーの増幅が少なからうということである. もっともこの効果は積率の定義の形式から推測されるもので, その実体についての厳密な検討はいまだなされていない.

さて, データが与えられた場合, そのデータにフィットする母数を推定するためには, まず与えられたデータから標本PWMを算定して, 連立方程式に代入し, 母数を求めねばならない. すなわちPWM M_j の推定量 \hat{M}_j が必要である. そのための最も簡単な方法は x_i の生起確率に適当なプロットングポジション F_i を仮定し

$$\hat{M}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i F_i^j \dots \dots \dots (5)$$

とする方法である. これにはLandwehrら¹⁴⁾やHoskingら¹¹⁾がWakeby分布, GEV分布のクオンタイル推定に

$$F_i = \frac{i-0.35}{n} \dots \dots \dots (6)$$

を用いた例がある. この場合にはプロットングポジション公式として何を選択するかに重大な問題がある. そこで, より理論的な方法として以下の方式をLandwehrら¹⁵⁾が導いている. それには, $M_{l,j,k}$ が $E[X_{j+1,k+j+1}^l]$ に比例するという関係

$$M_{l,j,k} = B(k+1, j+1) E[X_{j+1,k+j+1}^l] \dots \dots \dots (7)$$

を用いる (証明略). ここに $B(\cdot, \cdot)$ はベータ関数を表わし, $X_{j+1,k+j+1}^l$ は ∞ 個よりなる母集団から取り出した任意の $k+j+1$ 個の標本の第 $j+1$ 位最小順序統計量の l 次の積率である. $l=1, k=0$ のときは

$$M_j = B(1, j+1) E[X_{j+1,j+1}] \dots \dots \dots (8)$$

であるから, その推定量 M_j を得るためには, $E[X_{j+1,j+1}]$ すなわち, ∞ 個よりなる母集団から取り出した任意の $j+1$ 個標本の最大値の期待値の推定量が必要

である. これには, n 個の標本の順序統計量 x_1, \dots, x_n の中から, 任意の $j+1$ 個を取り出したとき, その最大値が x_i である確率が $\binom{i-1}{j} / \binom{n}{j+1}$ であることに基づいた

$$E[X_{j+1,j+1}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i \binom{i-1}{j} / \binom{n}{j+1} \dots \dots \dots (9)$$

なる関係を用いて,

$$\hat{M}_j = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \frac{(i-1)(i-2)\dots(i-j)}{(n-1)(n-2)\dots(n-j)} & (j \geq 1) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i & (j=0) \end{cases} \dots \dots \dots (10)$$

とする. これによって n 個の標本があるときその小さい順の順序統計量 x_1, \dots, x_n をつぐれば, 式(5)あるいは(10)より M_j の推定量として \hat{M}_j が求められ, それを母数の連立方程式に代入することにより母数のPWM解が得られる. 以上がPWM法の概要である.

以下に inverse form で書き表わせない分布関数である正規分布, 3母数対数正規分布ならびに3母数ピアソン分布の, PWM解析解を示す (ただし, 正規分布ならびに3母数対数正規分布の解については一部, 16), 17)に既報).

4. 正規分布のPWM解

正規分布

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dt \dots (11)$$

のPWM解は, 以下のとおりである.

$$\mu = M_0 \dots \dots \dots (12)$$

$$\sigma = \sqrt{\pi} (2M_1 - M_0) \dots \dots \dots (13)$$

この公式を用いて正規分布のパラメーター μ, σ を推定するには, 与えられた標本から, 式(5)あるいは(10)により \hat{M}_0, \hat{M}_1 を計算して, それぞれ式(12), (13)の M_0, M_1 に代入し, 求められたものを $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ とすればよい. 略解)

$$M_0 = \int_0^1 x dF = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu \dots \dots \dots (14)$$

より式(12)は明らか.

$$M_1 = \int_0^1 x F dF = \int_{-\infty}^{\infty} x F(x) f(x) dx \dots \dots \dots (15)$$

ここで, $z = (x-\mu)/\sigma$ とおくと,

$$M_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma z + \mu) \Phi(z) \phi(z) dz = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} z \Phi(z) \phi(z) dz + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) \phi(z) dz = \sigma I_1 + \mu I_2 \dots \dots \dots (16)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} z \Phi(z) \phi(z) dz = -\phi(z) \Phi(z) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(z) dz = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \dots \dots \dots (17)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z)\varphi(z)dz = \frac{1}{2} \Phi^2(z)|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (18)$$

したがって

$$M_1 = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} + \mu \right) / 2 \dots\dots\dots (19)$$

となり、式 (14) を考慮することにより、式 (12), (13) が得られる。ここに、 $\Phi(\cdot)$: 標準正規分布関数、 $\phi(\cdot)$: 標準正規分布の密度関数である。

5. 3 母数対数正規分布と PWM 解

3 母数対数正規分布

$$F(x) = \int_m^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}(t-m)} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t-m)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dt \dots\dots (20)$$

の PWM 解は、以下のとおりである。

$$\left\{ \Psi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{3} \right\} / \left\{ \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \right\} = (M_2 - \frac{M_0}{3}) / (M_1 - \frac{M_0}{2}) \dots\dots (21)$$

$$m = M_0 \frac{\Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - (M_1/M_0)}{\Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - 1/2} \dots\dots (22)$$

$$\mu = \ln(M_0 - m) - \frac{\sigma^2}{2} \dots\dots (23)$$

ここに、

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^x 2\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)d\Phi(t) \dots\dots (24)$$

公式の用い方は、4. の正規分布に対する場合と同様であるが、式 (21) の σ については、陽の形では与えられないためその推定は逐次計算、あるいは近似式の利用が必要である。補遺 2 に著者らの作成した近似式を示す。

略解)

$$F(x) = \Phi((\ln(x-m)-\mu)/\sigma) \text{ であるから}$$

$$M_j = \int_0^1 x F^j dF = \int_m^{\infty} x \Phi^j((\ln(x-m)-\mu)/\sigma) \cdot \varphi((\ln(x-m)-\mu)/\sigma) dx \dots\dots (25)$$

ここで、 $z = (\ln(x-m)-\mu)/\sigma$ とおくと、

$$M_j = \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(\mu + \sigma z) + m) \Phi^j(z) \varphi(z) dz = \exp(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma z) \Phi^j(z) \varphi(z) dz + m \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^j(z) \varphi(z) dz = \exp(\mu) I_j + \frac{m}{j+1} \dots (26)$$

3 母数対数正規分布の母数推定には、 M_0, M_1 および M_2 が必要であり、したがって I_0, I_1 および I_2 を順次求める。

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma z) \varphi(z) dz = \exp(\sigma^2/2) \dots\dots (27)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma z) \Phi(z) \varphi(z) dz \dots\dots (28)$$

式 (28) の両辺を σ で微分する。

$$\frac{dI_1}{d\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} z \exp(\sigma z) \Phi(z) \varphi(z) dz = -\varphi(z) \exp(\sigma z) \Phi(z) |_{-\infty}^{\infty} + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \exp(\sigma z) \Phi(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \exp(\sigma z) \varphi(z) dz = \sigma I_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma z) \varphi^2(z) dz \dots\dots (29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma z) \varphi^2(z) dz = \exp\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) / 2\sqrt{\pi} \dots\dots (30)$$

したがって I_1 は微分方程式

$$\frac{dI_1}{d\sigma} = \sigma I_1 + \exp\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) / 2\sqrt{\pi} \dots\dots (31)$$

の解として求められる。

$\sigma=0$ のときは、

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) \varphi(z) dz = \frac{1}{2} \dots\dots (32)$$

であるが、これを境界条件として式 (31) の微分方程式を解けば、

$$I_1 = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \dots\dots (33)$$

が得られる。

I_2 についても同様に微分する。

$$\frac{dI_2}{d\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} z \exp(\sigma z) \Phi^2(z) \varphi(z) dz = -\varphi(z) \exp(\sigma z) \Phi^2(z) |_{-\infty}^{\infty} + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \exp(\sigma z) \Phi^2(z) dz + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \exp(\sigma z) \Phi(z) \varphi(z) dz = \sigma I_2 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma z) \Phi(z) \varphi^2(z) dz \dots\dots (34)$$

ここで、

$$N_0 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma z) \Phi(z) \varphi^2(z) dz \dots\dots (35)$$

とおくと、 N_0 に対し下の微分方程式が成立する。

$$2 \frac{dN_0}{d\sigma} = \sigma N_0 + \exp\left(\frac{\sigma^2}{6}\right) / \sqrt{3} \pi \dots\dots (36)$$

$\sigma=0$ のとき、 $N_0 = 1/2\sqrt{\pi}$ (補遺 1 参照) であり、これを境界条件として式 (36) の微分方程式を解けば、

$$N_0 = \exp\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{6}}\right) / \sqrt{\pi} \dots\dots (37)$$

となる。この N_0 を式 (34) へ代入すれば、

$$\frac{dI_2}{d\sigma} = \sigma I_2 + \exp\left(\frac{\sigma^2}{4}\right) \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{6}}\right) / \sqrt{\pi} \dots\dots (38)$$

が得られる. $\sigma=0$ のとき,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(z) \varphi(z) dz = \frac{1}{3} \dots\dots\dots (39)$$

であり, これを境界条件下として式 (38) の微分方程式を解けば,

$$I_2 = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \left\{ \frac{1}{3} + \int_0^{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} 2 \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) d\Phi(t) \right\} \dots\dots\dots (40)$$

$$\int_{-\infty}^0 \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) d\Phi(t) = \frac{1}{6} \dots\dots\dots (41)$$

となり, ここで

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^x 2 \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) d\Phi(t) \dots\dots\dots (42)$$

とおくと,

$$I_2 = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \Psi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \dots\dots\dots (43)$$

が得られる. よって式 (26) より

$$M_0 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) + m \dots\dots\dots (44)$$

$$M_1 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \frac{m}{2} \dots\dots\dots (45)$$

$$M_2 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \Psi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \frac{m}{3} \dots\dots\dots (46)$$

となり, これを μ, σ, m について解くことにより, 式 (21), (22), (23) が得られる.

6. 3母数ピアソンⅢ型分布のPWM解

3母数ピアソンⅢ型分布

$$F(x) = \int_m^x \frac{1}{a\Gamma(b)} \left(\frac{t-m}{a}\right)^{b-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t-m}{a}\right)\right] dt \dots\dots\dots (47)$$

のPWM解は, 以下のとおりである.

$$2B_{\frac{1}{2}}(b, 2b)/B(b, 2b) = \left(M_2 - \frac{M_0}{3}\right) / \left(M_1 - \frac{M_0}{2}\right) \dots\dots\dots (48)$$

$$a = 4^b B(b, b) \left(M_1 - \frac{M_0}{2}\right) \dots\dots\dots (49)$$

$$m = M_0 - ab \dots\dots\dots (50)$$

ここに, $B(\cdot, \cdot)$: ベータ関数, $B_{\frac{1}{2}}(\cdot, \cdot)$: 不完全ベータ関数

この公式の利用方法も 4. で述べたとおりであるが, 対数正規分布の場合の σ 同様, 式 (48) の b についても陽の形では与えられないため, その推定は逐次計算あるいは近似式の利用が必要である. 補遺 3 に著者らの作成した近似式を示す.

略解)

PWM の定義式 (2) は, $z=(x-m)/a$ とおくと以下のようになる.

$$\begin{aligned} M_j &= \int_0^1 x F^j dF = \int_0^{\infty} (az+m) P^j(z) p(z) dz \\ &= a \int_0^{\infty} z P^j(z) p(z) dz + m \int_0^{\infty} P^j(z) p(z) dz \\ &= a I_j + \frac{m}{j+1} \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

ここに,

$$P(z) = \int_0^z \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-t) dt \dots\dots\dots (52)$$

$$p(z) = \frac{1}{\Gamma(b)} z^{b-1} \exp(-z) \dots\dots\dots (53)$$

3母数ピアソンⅢ型分布の母数推定には, M_0, M_1 および M_2 が必要であり, したがって I_0, I_1 および I_2 を順次求める.

$$I_0 = \int_0^{\infty} z p(z) dz = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b)} z^b \exp(-z) dz = b \dots\dots\dots (54)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} z P(z) p(z) dz \\ &= \int_0^{\infty} z \left\{ \int_0^z \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-t) dt \right\} \frac{1}{\Gamma(b)} z^{b-1} \\ &\quad \cdot \exp(-z) dz = - \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-t) dt \right\} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\Gamma(b)} z^b \exp(-z) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^z \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} \right. \\ &\quad \cdot \exp(-t) dt \Big\} \frac{b}{\Gamma(b)} z^{b-1} \exp(-z) dz \\ &\quad + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(b)}\right)^2 z^{2b-1} \exp(-2z) dz \\ &= \frac{b}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2b} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma(b)}\right)^2 z^{2b-1} \exp(-z) dz \\ &= \frac{b}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2b} \dots\dots\dots (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\infty} z P^2(z) p(z) dz \\ &= \int_0^{\infty} z \left\{ \int_0^z \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-t) dt \right\}^2 \frac{1}{\Gamma(b)} z^{b-1} \\ &\quad \cdot \exp(-z) dz = - \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-t) dt \right\}^2 \\ &\quad \cdot \frac{1}{\Gamma(b)} z^b \exp(-z) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^z \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} \right. \\ &\quad \cdot \exp(-t) dt \Big\}^2 \frac{b}{\Gamma(b)} z^{b-1} \exp(-z) dz \\ &\quad + \int_0^{\infty} 2 \left\{ \int_0^z \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-t) dt \right\} \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{\Gamma(b)}\right)^2 z^{2b-1} \exp(-2z) dz = \frac{b}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2b-1} \\ &\quad \cdot \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\frac{z}{2}} \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-t) dt \right\} \left(\frac{1}{\Gamma(b)}\right)^2 z^{2b-1} \\ &\quad \cdot \exp(-z) dz \dots\dots\dots (56) \end{aligned}$$

ここで,

$$w(b) = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\frac{z}{2}} \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-t) dt \right\}$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\Gamma(b)}\right)^2 z^{2b-1} \exp(-z) dz \dots\dots\dots(57)$$

とおき、 $\int_0^z \frac{1}{\Gamma(b)} t^{b-1} \exp(-t) dt$ の、積分区間上端の $z/2$ をパラメーター s を用いて sz に置き換える。また $w(b)$ を b と s の2変数の関係 $w(b, s)$ とみなし、これを s で微分する。

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{s^{b-1}}{(s+1)^{2b}} / (B(b, b) \cdot B(b, 2b)) \dots\dots\dots(58)$$

$w(b, s)$ は $w(b, 0)=0$ の境界条件を満たすので、この条件下で式 (58) を解き、 $w(1/2, b)$ を求めると、

$$w = \int_0^{1/2} \frac{s^{b-1}}{(s+1)^{2b}} / (B(b, b) B(b, 2b)) ds$$

$$= B_{\frac{1}{2}}(b, 2b) / (B(b, b) \cdot B(b, 2b)) \dots\dots\dots(59)$$

が得られる。したがって (56) より

$$I_2 = \frac{b}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2b-1} B_{\frac{1}{2}}(b, 2b) / (B(b, b) \cdot B(b, 2b))$$

$$\dots\dots\dots(60)$$

以上式 (54), (55), (60) を式 (51) へ代入すれば、 $M_0 = ab + m \dots\dots\dots(61)$

$$M_1 = a \left(\frac{1}{2}\right)^{2b} / B(b, b) + \frac{M_0}{2} \dots\dots\dots(62)$$

$$M_2 = a \left(\frac{1}{2}\right)^{2b-1} B_{\frac{1}{2}}(b, 2b) / (B(b, b) \cdot B(b, 2b)) + \frac{M_0}{3}$$

$$\dots\dots\dots(63)$$

これより a, b, m を解いて式 (48), (49), (50) が得られる。

7. 正規分布のパラメーター σ の PWM 推定量

正規分布のパラメーター σ の PWM 解は式 (13) によって与えられた。観測値の順序統計量 x_1, \dots, x_n が与えられたときの σ の推定値 $\hat{\sigma}$ は、式 (10) の \hat{M}_0, \hat{M}_1 を用いると、

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\pi} (2\hat{M}_1 - \hat{M}_0) = \sum_{i=1}^n x_i \left\{ \sqrt{\pi} \frac{2i-n-1}{n(n-1)} \right\} \dots\dots(64)$$

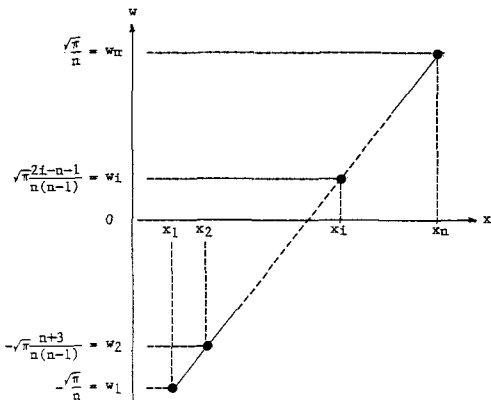


Fig.1 Estimate of σ as a weighted sum of sample order statistics.

すなわち、 n 個の標本の順序統計量の加重平均になっている。加重 w_i は Fig.1 のように標本順序統計量 x_1, x_2, \dots, x_n に対し、直線的に変化するものである。また、 x_i が順序統計量であることを考慮すると、負の重みは $i < \frac{n}{2}$ に対してかかるために、式 (64) の加重和は $\hat{\sigma} > 0$ が保証されていることもわかる。

ところで Landwehr ら¹⁵⁾ は、式 (10) より与えられる標本 PWM \hat{M}_j が不偏推定量であることを導いている。したがって、式 (13) による $\hat{\sigma}$ も、 σ の不偏推定量ということになる。なおこの場合 $\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の不偏推定量ではない。

現在までに、標本分散 $\hat{\sigma}^2$ の不偏推定量は存在したが、標本標準偏差 $\hat{\sigma}$ は、標本分散の平方根の形でしか与えられていなかったため不偏ではなかった。ここに著者らの得たものは、正規分布の標本標準偏差に限ったものではあるが、その不偏推定量であり、標本の一次結合の形で与えられるきわめて興味深いものである。

8. ま と め

PWM 法の由来、概念について述べ、つづいて正規分布、3母数対数正規分布、およびピアソンⅢ型分布の PWM 解を求めた。Inverse form では書き表わせない分布の PWM 解析解が求められたのはこれが初めてである。また、正規分布のパラメーター σ の解は標本 PWM の線形和で与えられる不偏推定量となることがわかった。

補遺 1

$\sigma=0$ のとき

$$N_0 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(z) \Phi(z) dz \dots\dots\dots(65)$$

$$\varphi^2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \varphi(\sqrt{2}z) \dots\dots\dots(66)$$

より

$$N_0 = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(\sqrt{2}z) \Phi(z) dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(z) \Phi(z/\sqrt{2}) dz \dots\dots\dots(67)$$

ここで、

$$N_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(z) \Phi(sz) dz \dots\dots\dots(68)$$

とおく (つまり $s=1/\sqrt{2}$)。 N_0 を s で微分すると、

$$\frac{dN_0}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \varphi(z) \varphi(sz) dz = 0 \dots\dots\dots(69)$$

となり $N_0 = \text{Const.}$ つまり s によらないことがわかる。そこで $s=0$ とおくと、

$$N_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) dz \dots\dots\dots(70)$$

となり $\sigma=0$ で, $N_0=1/2\sqrt{\pi}$ が得られる.

補遺 2

式 (21) の σ_y に関する近似式:

$$C=(M_2-M_0/3)/(M_1-M_0/2) \dots\dots\dots(71)$$

$$P=0.5+(C-1)\sum_{i=0}^2 c_i(C-1)^{2i} \dots\dots\dots(72)$$

$$x=-\ln\{4P(1-P)\} \dots\dots\dots(73)$$

$$\sigma_y=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x\sum_{i=0}^{10} a_i x^i} \dots\dots\dots(74)$$

- $c_0= 1.73195$
- $c_1=-1.78769$
- $c_2=-1.97552$
- $a_0= 1.5707962$ $a_6=-0.104527497\times 10^{-5}$
- $a_1= 0.37069879\times 10^{-1}$ $a_7= 0.83609370\times 10^{-7}$
- $a_2=-0.83643535\times 10^{-3}$ $a_8=-0.32310812\times 10^{-8}$
- $a_3=-0.22509471\times 10^{-5}$ $a_9= 0.36577630\times 10^{-10}$
- $a_4= 0.68412182\times 10^{-5}$ $a_{10}= 0.69362339\times 10^{-12}$
- $a_5= 0.58242385\times 10^{-5}$

式 (73), (74) は, $P=\Phi\left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{2}}\right)$ に対する逆変換のための, 戸田の近似多項式である. 著者らはなかならずこれを用いるのが適当との結果を得ている. 式 (71)~(74) の一連の計算による σ_y の最大相対誤差は $3.13\times 10^{-2}\%$ である. ただし式 (72) の有効範囲は

$$1 < C < 1.247 \dots\dots\dots(75)$$

である.

補遺 3

式 (48) の b に関する近似式:

$C \leq 10/9$ のとき

$$b=\left(\frac{1}{z\left(\sum_{i=0}^3 c_i z^i\right)}\right)^2, z=\frac{9}{2}(C-1) \dots\dots\dots(76)$$

$C > 10/9$ のとき

$$b=\frac{1}{1-z\left(\sum_{i=0}^4 a_i z^i\right)}-1, z=6-\frac{9}{2}C \dots\dots\dots(77)$$

- $c_0= 0.204630\times 10$ $a_0=0.240421\times 10$
- $c_1= 0.150018\times 10^{-1}$ $a_1=0.124648$
- $c_2=-0.620195$ $a_2=0.694707\times 10^{-1}$
- $c_3= 0.807894$ $a_3=0.178558\times 10^{-1}$
- $a_4=0.477058\times 10^{-1}$

式 (76) の b の最大相対誤差は $4\times 10^{-2}\%$, 式 (77) の b の最大相対誤差は $3\times 10^{-2}\%$ である.

参 考 文 献

1) Greenwood, J.A., Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R.: Probability Weighted Moments,

Water Resour. Res., Vol.15, No.5, pp.1049~1054, 1979.

2) Benson, M.A.: Uniform Flood-Frequency Estimating Methods for Federal Agencies, Water Resour. Res., Vol.4, No.5, pp.891~908, 1968.

3) Wallis, J.R., Matalas, N.C. and Slack, J.R.: Just a Moment!, Water Resour. Res., Vol.10, No.2, pp.211~219, 1974.

4) Bobee, B. and Robitaille, R.: Correction of Bias in the Estimation of the Coefficient of Skewness, Water Resour. Res., Vol.11, No.6, pp.851~854, 1975.

5) Benson, M.A. and Matalas, N.C.: Synthetic Hydrology Based on Regional Statistical Parameter, Water Resour. Res., Vol.3, No.4, pp.931~935, 1967.

6) Matalas, N.C., Slack, J.R. and Wallis, J.R.: Regional Skew in Search of a Parent, Water Resour. Res., Vol.11, No.6, pp.815~826, 1975.

7) Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R.: Some Comparisons of Flood Statistics in Real and Log Space, Water Resour. Res., Vol.14, No.5, pp.902~920, 1978.

8) 星 清・山岡 勲: Condition of Separation に関する一考察, 第35回土木学会年次学術講演会概要集, pp.153~154, 1980.

9) Houghton, J.C.: Birth of a Parent, Water Resour. Res., Vol.14, No.6, pp.1105~1109, 1978.

10) Houghton, J.C.: The Incomplete Means Estimation Procedure Applied to Flood Frequency Analysis, Water Resour. Res., Vol.14, No.6, pp.1111~1115, 1978.

11) Hosking, J.R.M., Wallis, J.R. and Wood, E.F.: Estimation of the Generalized Extreme Value Distribution by the Method of Probability Weighted Moments, Technometrics, Vol.27, No.3, pp.251~261, 1985.

12) Beran, M., Hosking, J.R.M. and Arnell, N.: Comment on "Two-Component Extreme Value Distribution for Flood Frequency Analysis", Water Resour. Res., Vol.22, No.2, pp.263~266, 1986.

13) Rossi, F., Fiorentino, M. and Versace, P.: Two Component Extreme Value Distribution for Flood Frequency Analysis, Vol.20, No.7, pp.847~856, 1984.

14) Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R.: Estimation Parameters and Quantiles of Wakeby Distributions, 1. Known Lower Bounds, Water Resour. Res., Vol.15, No.6, pp.1361~1372, 1979.

15) Landwehr, J.M., Matalas, N.C. and Wallis, J.R.: Probability Weighted Moments Compared with Some Traditional Techniques in Estimating Gumbel Parameters and Quantiles, Water Resour. Res., Vol.15, No.5, pp.1055~1064, 1979.

16) 竹内邦良・土屋一仁: 正規分布のパラメータのPWM解, 第31回水理講演会論文集, pp.191~196, 1987.

17) 竹内邦良・土屋一仁・伊達結城: Sextile法とPWM法による三母数対数正規分布の母数推定, 第14回関東支部年次研究発表会講演概要集, pp.60~61, 1987.