

鉛直振動を受ける流体中の球の沈降速度

FALL VELOCITY OF SPHERES IN VERTICALLY OSCILLATING FLUID

池田駿介*・山坂昌成**・木内国彦***・高橋宏樹****

By Syunsuke IKEDA, Masashige YAMASAKA, Kunihiro KIUCHI and Hiroki TAKAHASHI

Fall velocity of spherical particles in vertically oscillating fluid is studied experimentally and theoretically. The dimensionless mean fall velocity \bar{u} is found to be governed by dimensionless parameters of Reynolds' number Re_0 , frequency of oscillation ωf and velocity amplitude of oscillation a/a_0 . In the range of small a/a_0 , where relative fall velocity to fluid velocity is positive throughout the period of oscillation, the equation of particle motion is solved in terms of perturbation technique taking account of variation of drag coefficient. The result shows that the increase of Re_0 , ωf and a/a_0 decreases \bar{u} . In the range of large a/a_0 , an approximate numerical analysis is presented. The combination of these two theories performs well for laboratory tests made by the authors and Ho for widely varying conditions of Re_0 , ωf and a/a_0 .

Keywords: fall velocity, sphere, vertical oscillation, perturbation, drag coefficient

1. 序 論

乱流中において平衡状態にある浮遊砂は、乱れによる上方への拡散量と重力による沈降量がつり合うことによって、濃度の平衡鉛直分布を形成していると考えられている。この理論によると浮遊砂に関する拡散係数 ϵ_z 、浮遊砂の平均沈降速度 \bar{v}_s 、基準点濃度 c_0 が与えられると、浮遊砂濃度の鉛直分布 $c(z)$ が定まることになる。あるいは、 $c(z)$ を測定することにより、 ϵ_z を見積ることが可能となる。しかし、これまでの研究の多くは、乱流中の砂の運動を取り扱っているにもかかわらず、沈降速度として静水中の値を準用しており、拡散係数の見積りに曖昧さが残されていた。そこで、本研究では乱れを鉛直正弦振動流によって単純に模擬し、単一球状粒子の平均沈降速度を理論的、実験的に検討することにより、粒子の浮遊機構を明らかにする手掛りを得ることとする。以上のような浮遊砂のみならず、他分野においても振動流中の粒子の沈降速度を知ることは重要であり、工

学上さまざまな応用が可能である。

鉛直振動流中の球の運動を解析的に取り扱ったのは、Houghton¹⁾の研究を嚆矢とし、鉛直正弦振動流中の球の運動方程式を変形することにより、その運動が Mathieu 方程式によって支配されていることを示した。彼はさらに McLachlan²⁾による Mathieu 方程式の不安定領域の解を用いて球の平均沈降速度 \bar{v}_s を静水中の最終沈降速度 v_{s0} 、流体の振動振幅 A 、振動角周波数 ω および球の比重 S の関数として解析的に求めた³⁾。また、Baird ら⁴⁾は球の運動の振動成分として完全流体を仮定した解を与えることにより、時間平均された運動方程式より平均沈降速度を求めた。しかし、これらの研究では、球の抗力係数 c_D は Re 数に関係せず一定として（すなわち、抗力が相対速度の2乗に比例）、さらに相対速度が常に正であると仮定しているため、鉛直振動流中の球の平均沈降速度の低下量を実際の低下量より大きく見積ってしまい、その結果ある振動振幅および振動周期の領域では球は静止状態になり得るという結論が得られている。Tunstall & Houghton⁵⁾は、この点を修正するために、抗力が相対速度の1.5乗に比例（抗力係数が相対速度を用いた瞬間 Reynolds 数 Re の $-1/2$ 乗に比例することに対応）する場合と、相対速度の2乗に比例（抗力係数が一定）する場合について数値解析を行い、両者

* 正会員 工博 埼玉大学教授 工学部建設基礎工学科
(〒338 浦和市下大久保 255)

** 正会員 工博 埼玉大学助教授 工学部建設基礎工学科
(同上)

*** 日本上下水道設計(株)

**** 栃木県庁

を比較し、さらに実験値との比較も行った。しかし、振動流一周期中では相対速度を用いた Reynolds 数はゼロから有限値まで変化するわけであり、これに応じて抗力係数も Reynolds 数の関数として時々刻々変化するのので、Reynolds 数に対するベキ数を $-1/2$ や 0 に固定してしまうと実際の抵抗変化を表現することはできない。

Molerus & Werther⁶⁾ の解析では以上の欠点を取り除かれており、 c_D と R_e の関係を $c_D = 21/R_e + 6/\sqrt{R_e} + 0.28$ によって与え、数値計算を行って平均沈降速度の変化を図示している。しかし、無次元表示されていないので一般性を若干欠いている。Boyadzhiev⁷⁾ は Molerus & Werther とほぼ同様の c_D と R_e の関係を与えて、非対称な鉛直振動を受ける流体中の球の平均沈降速度を数値計算で求め、振動波形の与え方によっては、平均沈降速度が静水中のものより大きくなる場合や、あるいは、これが負となり球が平均的に上方に移動する場合もあり得ることを示した。この研究においても解析結果が無次元表示されておらず、また、計算の対象とした球が一種類だけであることから、一般性を備えていない。Hwang⁸⁾ は上記の数値解析が多大な計算時間を要することを改善するため、振動一周期内で時間平均された球の運動方程式を数値解析することにより平均沈降速度を求め、これが静水中における Reynolds 数 R_{e0} の影響を強く受け、 $Ho^9)$ の実験結果ともよく一致することを示した。しかし、周期振動解の与え方や、 c_D と R_e の関係の与え方にやや問題があるため、後述するように特殊な条件では実測値とかけ離れた値を示す。関根・吉川¹⁰⁾ は最近、Basset 項まで考慮した数値解析を行い、平均沈降速度に及ぼす Basset 項の影響は小さく、最大でも 5% 程度であることを明らかにしている。これらの数値解析は、粒子条件、振動条件が変わると複雑な計算をやり直さなければならない欠点をもつ。

正弦鉛直振動を受ける流体中の球の沈降速度が静水中の値より小さくなることは Baird⁴⁾、Tunstall & Houghton⁵⁾ により実験的にも明らかにされているが、とりわけ $Ho^9)$ は、流体として水、グリセリンおよびグリセリン水溶液を用い、比重、粒径の異なる 5 種の球を使用することにより R_{e0} を大きく変化させて実験を行い、平均沈降速度の低下に及ぼす粘性の影響を明らかにしている。また、Murray¹¹⁾ は格子振動による乱れを発生させ、格子乱流中でも球の沈降速度が静水中の値より小さくなることを明らかにしている。

以上のような研究状況から本研究の理論解析では、より一般的な解を求めるために、 c_D の変化を考慮して摂動法を用いた非線形解析を行う。ただし、後述するように摂動法は相対速度が負となる領域にまでは適用できないので、そのような領域では、近似的に摂動法から得ら

れる周期振動解を用いて、Hwang⁸⁾ と同様に時間平均された運動方程式から平均沈降速度の近似数値解を求めることとする。これらの理論は本研究の実験結果および $Ho^9)$ の実験結果と比較検討される。

2. 実験装置および実験方法

流体に鉛直振動を与える方法として、本研究では簡便でかつ高周波数の得られる振動台を用いる方法を採用した。使用した振動台は島津サーボパルサー EHV-05 であり、その性能は、最大搭載量：50 kg、最大振幅：1 cm、最大加速度：約 40 m/s² (4.1 g)、振動数：0.001~100 Hz である。用いた容器は内径 18 cm、壁厚 1 cm、高さ 100 cm の透明アクリル製円筒容器であり、鉄板およびボルトを用いて振動台に固定されている。円筒容器には蓋を設け、表面波による流れおよび擾乱が生じないようにした。蓋の中央には小球を出し入れするための小孔が開いており、粒子落下装置がつけられたゴム栓で密閉する。予備実験では、染料を用いた可視化法により、外力振動以外の流速の振動成分および定常循環流が存在しないことを確認した。

小球の沈降速度は一定距離を沈降するのに要する時間をストップウォッチで測定することにより求めることとし、測定区間は、上蓋より 50 cm、底面より 10 cm までの 40 cm とした。粒子の沈降実験では、最初に水温が安定している静水中で沈降速度を測定し、その後、鉛直振動を加えて振動流中の沈降速度を測定した。振動数、振幅などの条件を変える場合には、振動台の運転を止め、水が完全に静止するまで放置し (約 20 分間)、改めて振動を開始する。振動数は約 10 Hz、約 16 Hz の 2 種類とし、振動波形は振動台に設置された変位計からの出力を電磁オシログラフに記録して読み取った。用いた粒子は表-1 に示すガラス、ポリスチレン、硬質プラスチックのほぼ球状粒子 4 種類である。実験結果については理論との比較を交え、後述する。なお、前述の $Ho^9)$ の実験条件の概要は表-2 に示されている。

3. 摂動法による粒子運動の理論解析

非定常鉛直流中を球が鉛直運動する場合の球の運動方程式は、Basset 項を無視すると次式となる^{1),3)-11)}。

$$(\rho_s + \chi\rho_f) \frac{\pi d^3}{6} \frac{dv_s}{dt} = (\rho_s - \rho_f) \frac{\pi d^3}{6} g - \frac{1}{2} \rho_f c_D \frac{\pi d^2}{4} (v_s - v_f) |v_s - v_f| + \rho_f (1 + \chi) \frac{\pi d^3}{6} \frac{dv_f}{dt} \dots\dots (1)$$

ここに、 ρ は密度、 v は鉛直下向き速度で、添字 s, f はそれぞれ粒子、流体に関する諸量であることを示す。また、 d は球の直径、 t は時間、 g は重力加速度、 c_D

表一 実験条件

Case No	材質	密度 ρ_s (g/cm ³)	粒径 d (cm)	Reo	振動数 f (Hz)	振動振幅 A (cm)
1-1	ガラス	2.49	0.103	140	10.0	0.22~0.76
1-2					16.4	0.23~0.43
2-1	ポリスチレン	1.06	0.098	14	9.83	0.34~0.88
2-2					16.3	0.15~0.44
3-1	ポリスチレン	1.06	0.240	80	9.9	0.21~0.80
3-2					16.6	0.09~0.38
4-1	硬質プラスチック	1.03	0.598	300	9.83	0.17~0.74
4-2					16.3	0.15~0.43

表二 Ho の実験条件の概要

Case No	流体の密度 ρ (g/cm ³)	流体の動粘性係数 ν (cm ² /s)	粒子の密度 ρ_s (g/cm ³)	粒径 d (cm)	Reo	無次元振動数 $a \cdot f$
A	1.00	9.75x10 ⁻³	7.76	0.318	2700	4.3, 3.3, 2.3
B	1.00	9.75x10 ⁻³	7.90	0.159	900	2.2, 1.6
C	1.00	9.75x10 ⁻³	2.65	0.120	230	1.6, 1.2
D	1.21	3.58x10 ⁻¹	7.76	0.318	28	1.7, 1.3
E	1.26	2.52	7.76	0.318	1.1	0.48, 0.37
F	1.26	2.52	7.90	0.159	0.18	0.16, 0.12
G	1.26	2.52	7.72	0.100	0.05	0.070, 0.054

は抗力係数, χ は仮想質量係数 (=0.5) である。前述したように平均沈降速度に及ぼす Basset 項の影響は微小である¹⁰⁾ため、本研究では計算の簡単化のためにこれを無視する。静水中で粒子が定常沈降している場合には、式 (1) の時間微分項および v_r はゼロとなり、このときの抗力係数 c_{D0} と沈降速度 v_{s0} の関係は、

$$v_{s0} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f c_{D0}} g d} \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。以後、添字 "0" は静水中における値を表わす。鉛直振動流速としてここでは単一正弦振動を考えることにすれば、 v_r は

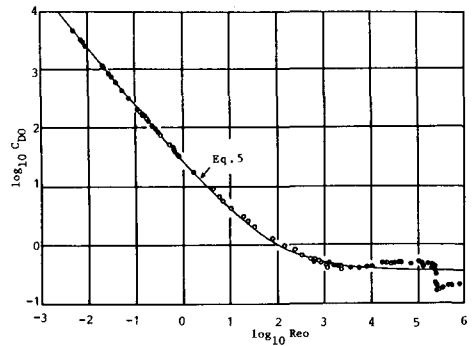
$$v_r = V_f \cos \theta, \quad \theta = \omega t \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。ここに V_f は流速振幅, θ は流体振動の位相, ω は角振動数である。式 (2), (3) を用いて式 (1) を無次元化すると、

$$c(u - a \cos \theta) |u - a \cos \theta| + a f \frac{du}{d\theta} + (a-1) f \alpha \sin \theta - 1 = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここに、 $c = c_D / c_{D0}$, $u = v_s / v_{s0}$, $\alpha = V_f / v_{s0}$, $a = (s + \chi) / (s - 1)$, $s = \rho_s / \rho_f$, $f = v_{s0} \omega / g$ である。

非定常流中の球の抗力係数は、境界層の発達の影響を受けて特に高振動数の領域では定常流中の値と異なると考えられるが、現段階ではその効果が定量化されるには至っていない。そこで、準定常を仮定し、定常流における抗力係数と Reynolds 数の関係を振動流にも適用することとする。静水中を定常沈降するときの Reynolds 数 $R_{e0} (= v_{s0} d / \nu, \nu$: 動粘性係数) と抗力係数 c_{D0} の関係は、図一に示すように R_{e0} が 10^4 程度まで、Molerus



図一 抗力係数と Reynolds 数の関係 (文献 12) の一部を転写)

& Werther⁶⁾ が用いたと同様の次式で近似できる。

$$c_{D0} = \frac{24}{R_{e0}} (1 + 0.152 \sqrt{R_{e0}} + 0.0151 R_{e0}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

これを振動流に準用すると、

$$c_D = \frac{24}{R_e} (1 + 0.152 \sqrt{R_e} + 0.0151 R_e) \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここに、 R_e は相対速度を用いた瞬間 Reynolds 数 ($|v_s - v_r| d / \nu$) である。Reynolds 数比を $R = R_e / R_{e0}$ で定義すると、式 (5), (6) より、

$$c = \frac{c_D}{c_{D0}} = \frac{1 + 0.152 \sqrt{R_{e0}} \sqrt{R} + 0.0151 R_{e0} R}{R (1 + 0.152 \sqrt{R_{e0}} + 0.0151 R_{e0})} \quad \dots\dots\dots (7)$$

が得られる。流体の鉛直振動を式 (3) で与えているので、Reynolds 数比は、

$$R = |u - a \cos \theta| \quad \dots\dots\dots (8)$$

と表わされる。

R_{e0} および R が十分小さい場合 (Stokes の抵抗則が成り立つ範囲) には、式 (7) は

$$c = \frac{1}{R} = \frac{1}{|u - a \cos \theta|} \quad \dots\dots\dots (9)$$

と表わされるので、式 (4) は u に関する線形方程式

$$a f \frac{du}{d\theta} + u = 1 + a |\cos \theta - (a-1) f \sin \theta| \quad \dots\dots\dots (10)$$

となり、解は次式のように容易に得られる。

$$u = 1 + \frac{[a(a-1)f^2 + 1] \cos \theta + f \sin \theta}{(af)^2 + 1} + u_i e^{-\frac{\theta}{af}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) の右辺最終項は初期速度の影響を表わし、 $\theta \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) ではゼロとなる。 $t \rightarrow \infty$ での無次元平均沈降速度 \bar{u} は 1 となり、抵抗が Stokes 則に従う場合には、鉛直振動流中の平均沈降速度は静水中での値に一致することが知られる。

c がゼロまたは式 (9) で表わされる場合を除いて、式 (4) の左辺第 1 項は u に関して非線形となるため、解析は複雑となる。このような場合の解法として、式 (4), (7), (8) より、 $\alpha \rightarrow 0$ (静水中) のとき $t \rightarrow$

∞ の解が

$$u=1, R=1, c=1 \dots\dots\dots(12)$$

となることを利用し、 α が微小な領域において u, R および c を 1 のまわりに α で展開して摂動法により解を求めることとする。ここで、 $t \rightarrow \infty$ での粒子速度を

$$u=1+u_1\alpha+u_2\alpha^2+u_3\alpha^3+u_4\alpha^4+\dots\dots\dots(13)$$

とおく。ここに u_1, u_2, u_3, u_4 は θ に関する未知関数である。式 (13) を式 (8) に代入すると、

$$R=|u-\alpha \cos \theta|=|1+(u_1-\cos \theta)\alpha+u_2\alpha^2+u_3\alpha^3+u_4\alpha^4+\dots\dots\dots(14)$$

となる。 α が微小な範囲を考えているので、上式および式 (4) の絶対値記号は削除され、

$$u-\alpha \cos \theta>0 \dots\dots\dots(15)$$

の制限が加えられる。 c を α で展開するために、まず c と R の関係を Taylor 展開により $(R-1)$ のべき級数で表わす。ただし、式 (13) が α の 4 次のオーダーまでの摂動展開であるので、4 階の微係数までを用いた Taylor 展開を行う。

$$c=1+\dot{c}(R-1)+\frac{\ddot{c}}{2}(R-1)^2+\frac{\overset{\cdot\cdot}{c}}{6}(R-1)^3+\frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{c}}{24}(R-1)^4+\dots\dots\dots(16)$$

ここに、 $\dot{c}=dc/dR|_{R=1}$ 、 $\ddot{c}=d^2c/dR^2|_{R=1}$ 、 \dots である。次に、絶対値記号の外された式 (14) を式 (16) に代入し、

$$c=1+\dot{c}(u_1-\cos \theta)\alpha+\left\{\dot{c}u_2+\frac{\ddot{c}}{2}(u_1-\cos \theta)^2\right\}\alpha^2+\left\{\dot{c}u_3+\ddot{c}(u_1-\cos \theta)u_2+\frac{\overset{\cdot\cdot}{c}}{6}(u_1-\cos \theta)^3\right\}\alpha^3+\left[\dot{c}u_4+\frac{\ddot{c}}{2}\{2(u_1-\cos \theta)u_3+u_3^2\}+\frac{\overset{\cdot\cdot}{c}}{2}(u_1-\cos \theta)^2u_2+\frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{c}}{24}(u_1-\cos \theta)^4\right]\alpha^4+O(\alpha^5) \dots\dots\dots(17)$$

を得る。 $\dot{c} \sim \overset{\cdot\cdot}{c}$ は Appendix に示されるように R_{e0} のみの関数となる。

式 (13), (17) を絶対値記号の外された式 (4) に代入し、 α の各オーダーごとに整理すると以下のようなる。

α^1 のオーダー：

$$af \frac{du_1}{d\theta}+(2+\dot{c})u_1=(2+\dot{c})\cos \theta-(a-1)f \sin \theta \dots\dots\dots(18)$$

α^2 のオーダー：

$$af \frac{du_2}{d\theta}+(2+\dot{c})u_2=-\left(1+2\dot{c}+\frac{\ddot{c}}{2}\right)(u_1-\cos \theta)^2 \dots\dots\dots(19)$$

α^3 のオーダー：

$$af \frac{du_3}{d\theta}+(2+\dot{c})u_3=-\left(\dot{c}+\ddot{c}+\frac{\overset{\cdot\cdot}{c}}{6}\right)(u_1-\cos \theta)^3-2\left(1+2\dot{c}+\frac{\ddot{c}}{2}\right)(u_1-\cos \theta)u_2 \dots\dots\dots(20)$$

α^4 のオーダー：

$$af \frac{du_4}{d\theta}+(2+\dot{c})u_4=-\left(\frac{\ddot{c}}{2}+\frac{\overset{\cdot\cdot}{c}}{3}+\frac{\overset{\cdot\cdot\cdot}{c}}{24}\right)(u_1-\cos \theta)^4-3\left(\dot{c}+\ddot{c}+\frac{\overset{\cdot\cdot}{c}}{6}\right)(u_1-\cos \theta)^2u_2-\left(1+2\dot{c}+\frac{\ddot{c}}{2}\right)\{2(u_1-\cos \theta)u_3+u_3^2\} \dots\dots\dots(21)$$

低次のオーダーの順に式 (18)~(20) の微分方程式を解き、 $\theta \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) における解を求めると、

$$u_1-\cos \theta=(U_{1c1} \cos \theta+U_{1s1} \sin \theta)/a \dots\dots\dots(22)$$

$$u_2=\{U_{20}+(U_{2c2} \cos 2\theta+U_{2s2} \sin 2\theta)\}/a^2 \dots\dots\dots(23)$$

$$u_3=\{(U_{3c1} \cos \theta+U_{3s1} \sin \theta)+(U_{3c3} \cos 3\theta+U_{3s3} \sin 3\theta)\}/a^3 \dots\dots\dots(24)$$

となる。本研究では、平均沈降速度を求めることが目的であるので、4 次のオーダーについては、複雑な振動解を求めることはせず、定常項のみを求めることにすると、

$$u_1=\{U_{10}+\dots\}/a^1 \dots\dots\dots(25)$$

となる。式 (22)~(25) の係数の添字は、1 番目がオーダー数を、2 番目が振動の cosine 成分であるか sine 成分であるかを、3 番目が振動のモード数を表わし、添字が 2 つの係数は定常項を表わす。これらの係数に関する代数式は Appendix に示されている。

R_{e0} が十分小さい (<1) 範囲では、Appendix の式 (A.1)~(A.6) より、 $\dot{c}=-1$ 、 $\ddot{c}=2$ 、 $\overset{\cdot\cdot}{c}=-6$ 、 $\overset{\cdot\cdot\cdot}{c}=24$ となるため、式 (A.7)~(A.16) から

$$U_{1c1}=\frac{-(af)^2}{(af)^2+1} \dots\dots\dots(26)$$

$$U_{1s1}=\frac{af}{(af)^2+1} \dots\dots\dots(27)$$

$$U_{20}=U_{2c2}=U_{2s2}=0 \dots\dots\dots(28)$$

$$U_{3c1}=U_{3s1}=U_{3c3}=U_{3s3}=0 \dots\dots\dots(29)$$

$$U_{40}=0 \dots\dots\dots(30)$$

となる。式 (26)~(30) を式 (22)~(25) に代入し、さらに式 (13) に代入すると、

$$u=1+[\{a(a-1)f^2+1\} \cos \theta+f \sin \theta] \frac{\alpha}{(af)^2+1} \dots\dots\dots(31)$$

が得られる。式 (31) は式 (11) において $\theta \rightarrow \infty$ とした解に一致することから、本解析法は低 Reynolds 数領域まで適用できることがわかる。これは抗力係数比 c

を式(7)のように表わし、これを式(17)のように α で展開したことによる。

本研究で求めたいものは、 $t \rightarrow \infty$ における平均沈降速度、すなわち定常項であり、これは簡単に以下のように表わされる。

$$\bar{u} = \frac{\bar{v}_s}{v_{s0}} = 1 + U_{20} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 + U_{40} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^4 + \dots \quad (32)$$

式(A・1)~(A・13)、(A・16)および式(32)より \bar{u} は R_{e0} 、 af 、 a/a の関数となることがわかる。鉛直振動流中の球の平均沈降速度を解析的に求めたものは、他にHoughton³⁾による解があるが、その解は $c_D = c_{D0}$ を仮定しているため R_{e0} に依存せず、

$$\bar{u} = \left\{ 1 - \frac{2(1+p)}{2(1+p)^2 - q^2} \frac{q^2}{2p} + \frac{(7-5p)p}{8(1+p)^3(4+p)} \left(\frac{q^2}{2p}\right)^2 - \frac{(9p^2 - 58p + 29)p^2}{8(1+p)^5(4+p)(9+p)} \left(\frac{q^2}{2p}\right)^3 + \dots \right\}^{1/2} \quad (33)$$

となっている。式(33)の記号と本研究で用いた記号との関係は、

$$p = \left(\frac{2}{af}\right)^2 \quad (34)$$

$$q = \frac{2}{af} \cdot \frac{\alpha}{a} \quad (35)$$

である。式(32)と式(33)を比較するために、式(A・7)~(A・9)において $\dot{c} = \ddot{c} = 0$ ($c_D = c_{D0}$ または $c = 1$) とおき、2次のオーダーまでの解を求めると

$$\bar{u} = 1 - \frac{1}{4} \frac{(af)^2}{(af)^2 + 4} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 \quad (36)$$

となり、式(33)を展開して α^2 のオーダーまで打ち切った解に一致する。また、式(33)の α^4 のオーダーまでの解は、

$$\begin{aligned} \bar{u} = & 1 - \frac{1}{2(1+p)} \left\{ 1 + \frac{q^2}{2(1+p)^2} \right\} \frac{q^2}{2p} \\ & + \frac{(7-5p)p}{16(1+p)^3(4+p)} \left(\frac{q^2}{2p}\right)^2 - \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{(1+p)} \frac{q^2}{2p} \right\}^2 \quad (37) \end{aligned}$$

となり、式形が複雑であるため式(32)で $\dot{c} = \ddot{c} = 0$ と似た解との直接比較はできないが、図-2に示すように両者は数値誤差の範囲内で一致している。以上により、本解析法は相対速度($u - a \cos \theta$)が正の範囲内において、 R_{e0} が十分小さい領域から十分大きい領域(式(5)が成り立つ 10^4 程度)まで適用できると考えられる。図-2をみると、鉛直振動流中の球の平均沈降速度は α/a (同一粒子に対しては鉛直振動流速の振幅に比例)が大きくなるほど静水中の値より小さくなることがわかる。

ここで鉛直振動流中の球の平均沈降速度が静水中の値より小さくなる原因について考察する。 v_r が純粋な周期関数であることを仮定し、式(2)を用いて式(1)を一周期について時間平均すると、

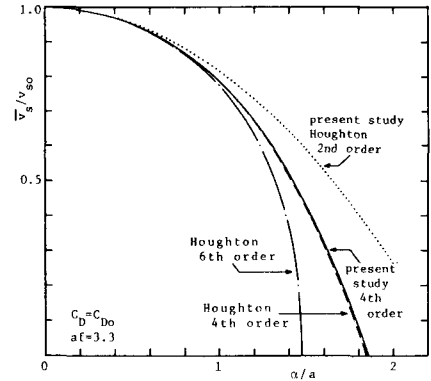


図-2 $c_D = c_{D0}$ ときの場合の振動解と Houghton の理論の比較 (2 次のオーダーでは両者は完全に一致)

$$c_D v_{s0}^2 = c_D \overline{(v_s - v_r) | v_s - v_r |} \quad (38)$$

となる。これは、静水中を沈降するときの抗力 (= 水中重量) が鉛直振動粒子に作用する平均抗力に等しいことを意味する。Stokes の抵抗則が適用できる範囲では、式(9)より

$$c_D = c_{D0} \frac{v_{s0}}{|v_s - v_r|} \quad (39)$$

が成り立ち、 v_r が純粋な周期関数であるので、式(38)は

$$c_{D0} v_{s0}^2 = c_{D0} \overline{v_{s0} (v_s - v_r)} = c_{D0} v_{s0} \bar{v}_s \quad (40)$$

となり、前述したように平均沈降速度 \bar{v}_s は静水中の沈降速度 v_{s0} に一致する。Reynolds 数が十分大きく、 c_D が一定である領域 ($c_D = c_{D0}$) においては (ただし、 $v_s - v_r > 0$)、相対速度が定常項 \bar{v}_s と平均値がゼロとなる θ に関する任意周期関数 $v_r(\theta)$ の和で表わされると考えられるので、式(38)は

$$c_{D0} v_{s0}^2 = c_{D0} \overline{(v_s - v_r)^2} = c_{D0} \overline{(\bar{v}_s + v_r(\theta))^2} \geq c_{D0} \bar{v}_s^2 \quad (41)$$

となり、振動流中の平均沈降速度は静水中の値より小さくなる。これは、抗力が相対速度の2乗に比例し、相対速度が大きな位相で抗力が非線形的に増幅されるためである。式(41)の $v_r(\theta)$ が α/a に比例する範囲では、 $v_{s0}^2 - \bar{v}_s^2$ は $(\alpha/a)^2$ に比例する。一般には、 c_D が $24/R_{e0}$ から約0.4まで変化し、その結果、相対速度と抗力の関係は速度の1乗から2乗の範囲で変化するため、ここで述べた2つの極端な例の間となる。

次に、 $c_D = c_{D0}$ として Houghton³⁾が求めた式(33)と c_D の変化まで考慮した本解析結果、式(32)、との比較を行う。図-3は縦軸に $\bar{u} = \bar{v}_s / v_{s0}$ 、横軸に α/a をとり、 af をパラメーターとして式(33)で表わされる関係を示している。図-4は同様にして、式(32)の関係を示したものであるが、式(32)にはもう1つのパラメーター R_{e0} が含まれているので、ここでは $R_{e0} = 100$

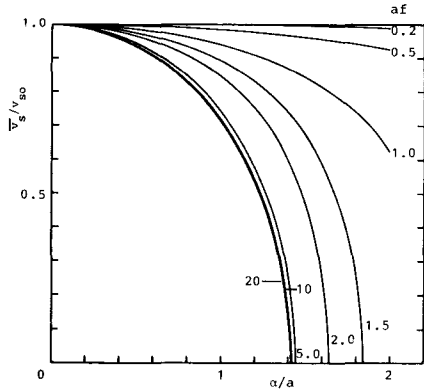


図-3 Houghtonの理論による平均沈降速度

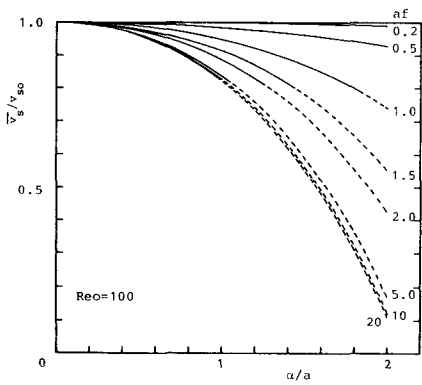


図-4 本理論による平均沈降速度 (Re0=100)

の場合を例として示した。図-4の破線は、この線上で相対速度が負となるため、式(32)が適用できない領域を示す。相対速度が常に正である条件は近似的に、すべてのθに対して

$$1 + (u_1 - \cos \theta)\alpha = 1 + (U_{1c1} \cos \theta + U_{1s1} \sin \theta) \frac{\alpha}{a} \geq 0 \quad (42)$$

が成立する条件となる。したがって、

$$\frac{\alpha}{a} \leq \frac{1}{\sqrt{U_{1c1}^2 + U_{1s1}^2}} \equiv \frac{\alpha_{c1}}{a} \quad (43)$$

となる。図-3、図-4を比較すると両者とも無次元振動数af、無次元振動流振幅a/aが大きくなるほど平均沈降速度は小さくなる。ただし、af ≥ 5では振動数の影響はほとんどなくなる。Re0=100の場合の本解析結果では平均沈降速度がHoughtonによるものより大きい、先に述べた理由によって、Re0が大きくなるに従って、Houghtonの値に近づく(同一オーダー、α⁴までの解では両者は一致)。また、他のRe0の値についても曲線群を描くと、Re0が小さくなるに従って図-4の曲線群は上方にシフトする。

図-5、6はa/aが比較的大きな領域までとれた本実

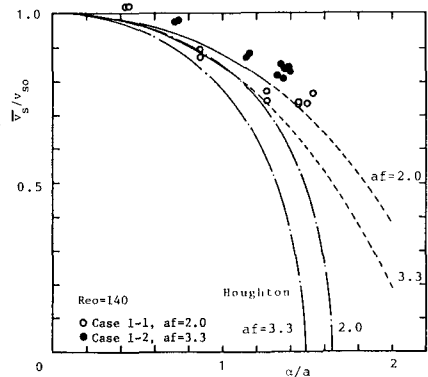


図-5 実験値と理論値の比較 (Case 1, ガラス球)
—: 本理論, ---: Houghtonの理論

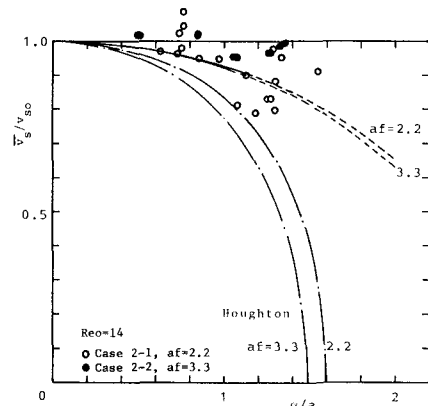


図-6 実験値と理論値の比較 (Case 2, ポリスチレン球)
—: 本理論, ---: Houghtonの理論

験結果と本解析結果およびHoughton³⁾の解析結果との比較を示している。図-5はガラス球Case 1-1, 1-2の場合、図-6はポリスチレン球Case 2-1, 2-2の場合を示す。両図中○印は振動数10 Hz、●印は振動数16 Hzの場合の実験値であり、実線がそれぞれに対応する本理論、一点鎖線が同様にHoughton³⁾の理論を示す。破線の意味は図-4と同様である。理論曲線群は上側が10 Hz、下側が16 Hzに対応する。ガラス球、ポリスチレン球とも実験値はa/aが大きくなるほどHoughtonの解よりも本解析結果に近い値を示し、Re0が小さいポリスチレン球の場合の方が本理論とHoughtonの理論の差は顕著である。これは前述したようにHoughtonの理論は本理論においてRe0が十分大きい領域に相当しているためである。振動数の影響をみると、理論的には高振動数(afが大きい)ほど平均沈降速度が低下するが、図-5では実験値が逆の傾向を示している。この理由については、実験精度、理論で準定常を仮定してcDを与えている等の問題点が考えられるが、今のところ明確ではない。高性能の振動台を用いて、より精度の高い実験が

必要と考えられる。ポリスチレン球 Case 3-1, 3-2, 硬質プラスチック球 Case 4-1, 4-2 については、振動台の性能上、 α/a を大きくとれなかったため (Case 3 については $\alpha/a < 0.6$, Case 4 については $\alpha/a < 0.2$)、沈降速度の低下はほとんどみられず、理論との比較もあまり意味をもたないので、ここでは省略する。

本研究の実験の範囲内では、 α/a を大きくとれず、したがって、図-5, 6 からわかるように相対速度が常に正となることがほぼ満足され、摂動法による解法は有効である。さらに大きな鉛直振動を流体に与えた場合には相対速度がある位相で負となり、本解析解は大きな誤差を含むようになると考えられるので、このような場合の近似数値解法について次節で検討する。

4. 相対速度が負となる場合の近似数値解法

前節の解法および Houghton³⁾ の解では相対速度が常に正であると仮定したため、抗力は常に上向きに作用し、その結果、流体の鉛直振動をきわめて大きくすると、球は沈降しなくなるという奇異な結果が得られる。しかし、大きな鉛直振動を与えると、抗力は下向きにも作用するようになり (相対速度が負)、沈降速度の低下はこれほど大きくならないことが予想される。相対速度が負となる位相が存在する場合には、式 (7), (8) を用いて、式 (4) の微分方程式を数値的に解く^{5)-7), 10)} 以外に方法がないように思われるが、この方法では種々の条件について平均沈降速度を求めるのに相当の計算時間を必要とする。そこで、Hwang⁸⁾ の解法を応用して、振動数の影響を考慮した近似数値解法を試みる。

Hwang は、式 (4) を一周期について時間平均し、高次の振動解を無視することにより、相対速度が近似的に、

$$u - \alpha \cos \theta = \bar{u} - \frac{\alpha}{a} \cos(\theta - \epsilon') \dots \dots \dots (44)$$

で表現できると仮定して、

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c \left[\bar{u} - \frac{\alpha}{a} \cos(\theta - \epsilon') \right] \left| \bar{u} - \frac{\alpha}{a} \cos(\theta - \epsilon') \right| \cdot d\theta - 1 = 0 \dots \dots \dots (45)$$

を数値計算することにより、無次元平均沈降速度 \bar{u} を求めている。ただし、 R_e と c_D の関係を

$$c_D = \begin{cases} 24/R_e, & R_e < 1 \\ 24/\sqrt{R_e}, & 1 \leq R_e \leq 2300 \dots \dots \dots (46) \\ 0.5, & R_e > 2300 \end{cases}$$

によって与えているため、 c の関数形は式 (7) と異なる (c_D は Reynolds 数に対して滑らかな曲線とならず、図-1 のような両対数紙上で 3 本の折線となる)。さらに、式 (45) には振動数 (あるいは本論文で用いている $f = v_{s0} \omega / g$) の影響が含まれておらず、前節で述べた解析結果と大きく異なる。そこで式 (44) が近似的に成

り立つ条件を考えてみる。式 (44) は相対速度の正負によらず成り立つと仮定されているので、相対速度が正の場合に成り立つ前節の解析解と比較する。振動解については α の一次のオーダーまでを考えることにすると、前節の相対速度解は、式 (13), (22)~(25) および式 (32) より、

$$\begin{aligned} u - \alpha \cos \theta &= \bar{u} + (U_{1c1} \cos \theta + U_{1s1} \sin \theta) \frac{\alpha}{a} + \dots \\ &= \bar{u} - \sqrt{U_{1c1}^2 + U_{1s1}^2} \cos(\theta - \epsilon') \frac{\alpha}{a} + \dots \\ &\dots \dots \dots (47) \end{aligned}$$

となる。したがって、式 (44) と比較して、Hwang⁸⁾ の理論では $\sqrt{U_{1c1}^2 + U_{1s1}^2} = 1$ と置いていることになる (式 (45) の積分領域は区間を 2π にとれば任意であるので、 ϵ' は式 (45) において重要な意味をもたない)。式 (A・7), (A・8) より、

$$\sqrt{U_{1c1}^2 + U_{1s1}^2} = \sqrt{\frac{(af)^2}{(af)^2 + (2 + \dot{c})^2}} \dots \dots \dots (48)$$

となり、これが 1 となるためには $af \rightarrow \infty$ でなければならない。したがって、式 (44) が近似的に成り立つ条件は、 R_{e0} によって若干異なるが、 $\dot{c} = 0$ とし、誤差の許容範囲を 10% とすれば、 $af \geq 5$ を満足する必要がある。これは、図-3, 4 で、 $af \geq 5$ では振動数の影響をほとんど受けないことに対応する。

Hwang⁸⁾ と同様な解析において振動数の影響を考慮するために、ここでは相対速度の振動周期解として近似的に前節で得られた振動解を用いることにすると、式 (13), (22)~(24) より

$$\begin{aligned} u - \alpha \cos \theta &= \bar{u} + (U_{1c1} \cos \theta + U_{1s1} \sin \theta) (\alpha/a) \\ &\quad + (U_{2c2} \cos 2\theta + U_{2s2} \sin 2\theta) (\alpha/a)^2 \\ &\quad + \{ (U_{3c1} \cos \theta + U_{3s1} \sin \theta) \\ &\quad + (U_{3c3} \cos 3\theta + U_{3s3} \sin 3\theta) \} (\alpha/a)^3 \\ &\dots \dots \dots (49) \end{aligned}$$

となる。ただし、 \bar{u} は式 (32) とは異なり、ここでは未知量である。式 (49) を式 (45) と同等の

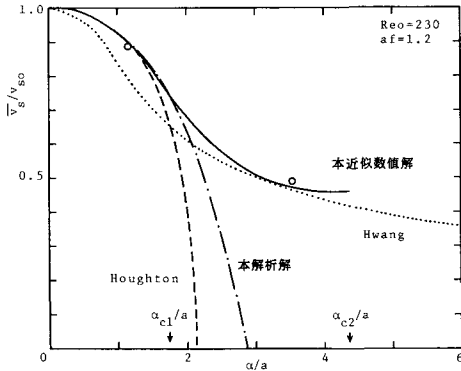
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(u - \alpha \cos \theta) |u - \alpha \cos \theta| d\theta - 1 = 0 \dots \dots \dots (50)$$

に代入し、これを数値的に解くことにより、 \bar{u} を求めることとする。ただし、式 (7) が表わすように

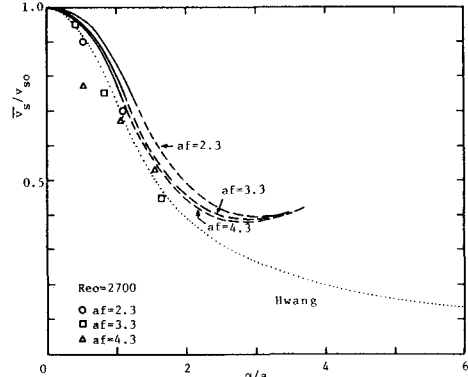
$$c = f_n(R) = f_n |u - \alpha \cos \theta| \dots \dots \dots (51)$$

である。ここに f_n は関数関係を表わす。また用いた摂動法による解の収束性から、少なくとも、同一の振動モードが現われる 1 次解と 3 次解では 3 次解の方が小さくならなければならないので、近似的に

$$\frac{\alpha}{a} < \sqrt{\frac{U_{1c1}^2 + U_{1s1}^2}{U_{3c1}^2 + U_{3s1}^2}} = \frac{\alpha c_2}{a} \dots \dots \dots (52)$$



図一七 各理論の比較と \$H_o\$ の実験値 (Case C) との対応

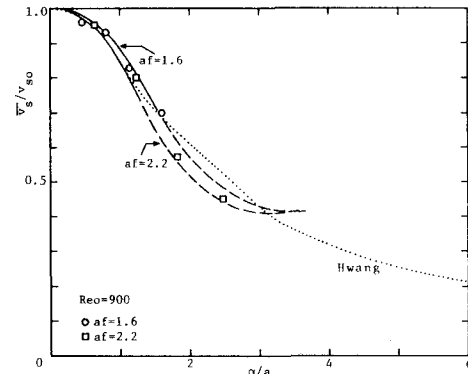


図一八 理論値と \$H_o\$ の実験値 (Case A) との比較 (実線: 本解析解, 破線: 本近似数値解)

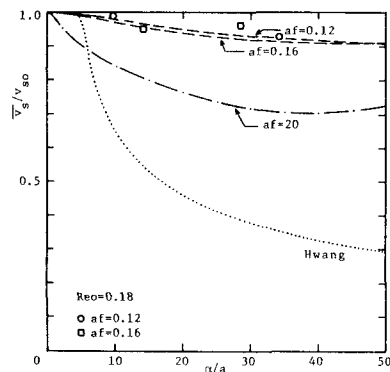
の条件が付加される。数値計算では、式 (50) の積分を Runge-Kutta 法で数値積分し、二分法を用いて収束計算を行った。ここで、収束の条件は、式 (50) の左辺が正となる \bar{u} の値と負となる \bar{u} の値の差が両者の平均値の 1/100 以下であることとした。特に \$H_o^{9)}\$ のデータのうち、Case E, F, G については、平均沈降速度の低下量が小さいので、精度を 1/1 000 とした。

図一七は、ここで述べた近似数値解と Hwang⁸⁾ の理論、前節で述べた摂動解および Houghton³⁾ の解の比較の一例を示している。計算条件は表一に示されている \$H_o^{9)}\$ の実験条件のうち、Case C に対応しており、○印はその実験値である。この条件で摂動法が適用できる限界は $\alpha_{c2}/a=1.75$ 、近似数値解法が適用できる限界は $\alpha_{c2}/a=4.43$ である。曲線は、それぞれ、実線が本近似数値解を、点線が Hwang の理論、一点鎖線が本摂動解、破線が Houghton の理論を表わす。本摂動解は c_D の変化を考慮しているので、先に述べたように Houghton の理論によるものほど沈降速度は小さくならないが、相対速度が常に正となることを仮定しているため、抗力は常に上向きとなり、これを $a > \alpha_{c1}$ の領域まで適用すると、ある a で粒子は平均的に静止 ($\bar{v}_s/v_{s0}=0$) することになる (この計算例では $a/a=2.85$)。一方、本近似数値解、Hwang の理論では、 $a > \alpha_{c1}$ の領域で下向きの抗力を考慮できるので、沈降速度は先の 2 者ほど小さくならず、粒子が平均的に静止することはなくなる。 a/a の小さい領域で Hwang の理論値だけが他の理論値とかけ離れており、前に述べた振動数の影響がここに現われている。本近似数値解では $a > \alpha_{c2}$ で沈降速度が増加に転じるが、この領域では摂動展開が収束しないと考えられるので、理論の精度は保証されない。

図一八～一〇は、相対速度が負となる位相が存在すると予想される強い鉛直振動を与えた \$H_o\$ の実験結果と本解析結果および Hwang の解析結果との比較を示している。\$H_o\$ の実験における Re_0 , af の条件は表一に示さ



図一九 理論値と \$H_o\$ の実験値 (Case B) との比較



図一〇 理論値と \$H_o\$ の実験値 (Case F) との比較

れている。図中の実線は、 $a < \alpha_{c1}$ (式 (43)) を満足する領域であり、前節の摂動法による本解析解を、破線は $\alpha_{c1} < a < \alpha_{c2}$ における本近似数値解を、点線は Hwang による解を示す。○, □, △印は \$H_o\$ による実験値を表わし、この記号の順番に af は増加する。図一八は $Re_0=2700$ で、 af が比較的大きい \$H_o\$ の実験 Case A についての結果を示す。この場合は af が比較的大きいため、

先に述べた理由により、本近似数値解と Hwang の解に大きな差はなく、両者とも実験結果をよく表わしている。この af の範囲では af の差が沈降速度に及ぼす影響はほとんどないが、 af を大きく変化させると、本理論では $\alpha < \alpha_{c2}$ (α_{c2} は R_{e0} , af により変化するが、Case A の条件内では $\alpha_{c2}/a \doteq 3.5$) の領域において af が大きくなるほど沈降速度が低下するという結果が得られている。Hwang の解がこれらよりさらに小さくなる原因は、Hwang の解が $af \rightarrow \infty$ に対応していること、および c_D を式 (46) で与えているため $R_{e0} = 2700$ では大半の位相において抗力が相対速度の 2 乗に比例していることによる (本解析では抗力比を式 (7) で与えているので、このべき数が 2 未満)。

図-9 は $R_{e0} = 900$ の場合の結果であり、この条件でも 2 つの理論値に大差はなく、実験結果をよく説明している。Hwang の理論曲線がやや滑らかさを欠いているのは、 $R_e = 1, 2300$ で、式 (46) で表現される c_D の値が滑らかに変化しないことから生じるものである。すなわち、式 (46) で表わされる関係が成り立つ領域を上から順に第 1 領域、第 2 領域、第 3 領域と名づけると、 R_{e0} が 900 であるので、 a/a が小さい範囲では c_D および R_e は第 2 領域内でのみ変化するが、 a/a がやや大きくなると瞬間 Reynolds 数 R_e の変化が大きくなるので第 1 領域と第 2 領域または第 2 領域と第 3 領域にわたって変化し (この計算例では R_{e0} が 2300 よりかなり小さいため前者)、 a/a がさらに大きくなると 3 つの領域にわたって変化するようになるため、領域境界での c_D の変化の不連続性の影響が結果に現われてくる。この条件においても af の差が沈降速度に及ぼす影響は顕著ではないが、本理論ではこの影響もよく表現されている。

R_{e0} が小さくなるほど同一の a/a に対して沈降速度が大きくなる傾向は 2 つの理論で定性的には一致するが、 R_{e0} , af が小さくなるにつれて、本解析結果と Hwang の解の差は顕著となる。図-10 に $R_{e0} = 0.18$ の場合を示す。Hwang の理論は実験結果と大きくかけ離れているが、本理論と実験値との一致は良好である。Hwang の理論では、 $a/a \leq 4.5$ ではすべての位相で $R_e < 1$ を満足するため沈降速度は低下せず、 a/a がこれを越えて $R_e > 1$ となるような位相が出現するようになると沈降速度は急激に低下する。Hwang の理論は本理論の $af \rightarrow \infty$ に対応するが、図-10 に参考のために示した本理論による $af = 20$ (十分大きな af) の場合の計算例を表わす一点鎖線でも Hwang の理論ほど沈降速度は低下していない。したがって、 R_e が小さい場合には、Hwang が採用した式 (46) で与えられるような c_D と R_e の関係式に問題があると考えられる。これらの傾向は R_{e0} がきわめて小さい場合の Ho の実験、Case E, G

についても同様であった。

本近似数値解析法は、Hwang の理論を改良して特に振動数の影響を明らかにしようとしたものである。Hwang の理論では振動数が沈降速度に及ぼす影響は取り入れられていないが、本研究ではこの影響をパラメータ af で取り入れ、その影響が特に顕著となる af が小さい領域で実験値と比較することにより (たとえば図-10)、本解析法の適合性が確かめられた。

5. 結 論

本研究は鉛直正弦振動流中の球の平均沈降速度の低下を理論的、実験的に検討したものであり、これにより以下の諸点が明らかとなった。

(1) 球の運動方程式を無次元化することにより、無次元平均沈降速度は R_{e0} , af および a/a に支配されることが示された。Houghton³⁾ の解析解および Hwang⁸⁾ の理論はこのパラメータのうちの 1 つが特別な値をとる場合であり、それぞれ R_{e0} が十分大きい (c_D が一定) 場合および $af \rightarrow \infty$ に対応している。

(2) 相対速度が正の範囲においては、球の運動方程式は摂動法によって解くことができ、これによる平均沈降速度の理論解と実験値との一致は良好である。本理論では af , R_{e0} および a/a が大きいほど無次元平均沈降速度が小さくなり、この傾向は、 R_{e0} を十分大きくすれば Houghton の解析解と、 $af \rightarrow \infty$ とすれば Hwang の理論解と基本的に一致する。したがって、Houghton の理論は R_{e0} の小さい領域で、Hwang の理論は af の小さい領域で、ともに平均沈降速度の低下を大きめに見積る。

(3) 一周中に相対速度が負となる位相が存在する条件では、摂動法による周期振動解を用い、Hwang と同様の解析により、平均沈降速度の近似数値解を得た。この解は、 R_{e0} および af を大きく変化させた Ho の実験結果とよく一致し、相対速度が負となる領域では、本研究の摂動解、Houghton の解析解、Hwang の近似数値解のいずれよりも精度よく平均沈降速度を見積ることができる。

謝 辞：実験に際しては、埼玉大学工学部建設基礎工学科 中村廣昭助手から援助を頂いた。ここに記して感謝の意を表します。

Appendix

式 (16) の微係数 $\dot{\epsilon} \sim \ddot{\epsilon}$ は以下のとおりである。

$$\dot{\epsilon} = -(1 + A/2)/K \dots\dots\dots (A \cdot 1)$$

$$\ddot{\epsilon} = (2 + 3A/4)/K \dots\dots\dots (A \cdot 2)$$

$$\ddot{\ddot{\epsilon}} = -(6 + 15A/8)/K \dots\dots\dots (A \cdot 3)$$

$$\ddot{c} = (24 + 105 A/16)/K \dots\dots\dots (A \cdot 4)$$

ここに、

$$A = 0.152 \sqrt{R_{e0}} \dots\dots\dots (A \cdot 5)$$

$$K = 1 + 0.152 \sqrt{R_{e0}} + 0.0151 R_{e0} \dots\dots\dots (A \cdot 6)$$

である。

式(22)~(25)に現われる係数は以下のとおりである。

$$U_{1c1} = -(af)^2 / \{(af)^2 + (2 + \dot{c})^2\} \dots\dots\dots (A \cdot 7)$$

$$U_{1s1} = af(2 + \dot{c}) / \{(af)^2 + (2 + \dot{c})^2\} \dots\dots\dots (A \cdot 8)$$

$$U_{20} = -(U_{1c1}^2 + U_{1s1}^2) (1 + 2 \dot{c} + \ddot{c}/2) / \{2(2 + \dot{c})\} \dots\dots\dots (A \cdot 9)$$

$$U_{2c2} = \{2 af U_{1c1} U_{1s1} - (2 + \dot{c})(U_{1c1}^2 - U_{1s1}^2)\} \cdot (1 + 2 \dot{c} + \ddot{c}/2) / \{(2 af)^2 + (2 + \dot{c})^2\} \dots\dots\dots (A \cdot 10)$$

$$U_{2s2} = -\{2 af (U_{1c1}^2 - U_{1s1}^2) + (2 + \dot{c}) U_{1c1} U_{1s1}\} \cdot (1 + 2 \dot{c} + \ddot{c}/2) / \{(2 af)^2 + (2 + \dot{c})^2\} \dots\dots\dots (A \cdot 11)$$

$$U_{3c1} = 3 \{af U_{1s1} - (2 + \dot{c}) U_{1c1}\} (U_{1c1}^2 + U_{1s1}^2) \cdot (\dot{c} + \ddot{c} + \ddot{c}/6) / \{4 \{(af)^2 + (2 + \dot{c})^2\}\} + [af \{U_{1s1}(2 U_{20} - U_{2c2}) + U_{1c1} U_{2s2}\} - (2 + \dot{c}) \{U_{1c1}(2 U_{20} + U_{2c2}) + U_{1s1} U_{2s2}\}] \cdot (1 + 2 \dot{c} + \ddot{c}/2) / \{(af)^2 + (2 + \dot{c})^2\} \dots\dots\dots (A \cdot 12)$$

$$U_{3s1} = -3 \{af U_{1c1} + (2 + \dot{c}) U_{1s1}\} (U_{1c1}^2 + U_{1s1}^2) \cdot (\dot{c} + \ddot{c} + \ddot{c}/6) / \{4 \{(af)^2 + (2 + \dot{c})^2\}\} - [af \{U_{1c1}(2 U_{20} + U_{2c2}) + U_{1s1} U_{2s2}\} + (2 + \dot{c}) \{U_{1s1}(2 U_{20} - U_{2c2}) + U_{1c1} U_{2s2}\}] \cdot (1 + 2 \dot{c} + \ddot{c}/2) / \{(af)^2 + (2 + \dot{c})^2\} \dots\dots\dots (A \cdot 13)$$

$$U_{3c3} = \{3 af U_{1s1} (3 U_{1c1}^2 - U_{1s1}^2) - (2 + \dot{c}) U_{1c1} \cdot (U_{1c1}^2 - 3 U_{1s1}^2)\} (\dot{c} + \ddot{c} + \ddot{c}/6) / \{4 \{(3 af)^2 + (2 + \dot{c})^2\}\} + \{3 af (U_{1c1} U_{2s2} + U_{1s1} U_{2c2}) - (2 + \dot{c}) (U_{1c1} U_{2c2} - U_{1s1} U_{2s2})\} (1 + 2 \dot{c} + \ddot{c}/2) / \{(3 af)^2 + (2 + \dot{c})^2\} \dots\dots\dots (A \cdot 14)$$

$$U_{3s3} = -\{3 af U_{1c1} (U_{1c1}^2 - 3 U_{1s1}^2) + (2 + \dot{c}) U_{1s1} \cdot (3 U_{1c1}^2 - U_{1s1}^2)\} (\dot{c} + \ddot{c} + \ddot{c}/6) / \{4 \{(3 af)^2 + (2 + \dot{c})^2\}\} - \{3 af (U_{1c1} U_{2c2} - U_{1s1} U_{2s2}) + (2 + \dot{c}) (U_{1c1} U_{2s2} + U_{1s1} U_{2c2})\} (1 + 2 \dot{c} + \ddot{c}/2) / \{(3 af)^2 + (2 + \dot{c})^2\} \dots\dots\dots (A \cdot 15)$$

$$U_{40} = -3 (U_{1c1}^2 + U_{1s1}^2) (\ddot{c}/2 + \ddot{c}/3 + \ddot{c}/24) / \{8(2 + \dot{c})\} - 3 \{(U_{1c1}^2 + U_{1s1}^2) U_{20} + (U_{1c1}^2 - U_{1s1}^2) U_{2c2}\} / 2$$

$$+ U_{1c1} U_{1s1} U_{2s2} \{(\dot{c} + \ddot{c} + \ddot{c}/6) / \{2(2 + \dot{c})\} - \{U_{20}^2 + (U_{2c2}^2 + U_{2s2}^2) / 2 + U_{1c1} U_{3c1} + U_{1s1} U_{3s1}\} \cdot (1 + 2 \dot{c} + \ddot{c}/2) / (2 + \dot{c})\} \dots\dots\dots (A \cdot 16)$$

参 考 文 献

- 1) Houghton, G. : The Behaviour of Particles in a Sinusoidal Velocity Field, Proc. Royal Society of London, Vol. A272, pp. 33~43, 1963.
- 2) McLachlan, N. W. : Theory and Application of Mathieu Functions, Oxford University Press, 1947.
- 3) Houghton, G. : Particle Retardation in Vertically Oscillating Fluid, The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 46, pp. 79~81, 1968.
- 4) Baird, M. H. I., Senior, M. G. and Thompson, R. J. : Terminal Velocity of Spherical Particles in a Vertically Oscillating Liquid, Chemical Engineering Science, Vol. 22, pp. 551~558, 1967.
- 5) Tunstall, E. B. and Houghton, G. : Retardation of Falling Spheres by Hydrodynamic Oscillations, Chemical Engineering Science, Vol. 23, pp. 1067~1081, 1968.
- 6) Molerus, O. and Werther, J. : Berechnung der Sinkbewegung kugeliger Teilchen in einem vertikal pulsierenden Strömungsfeld, Chemie-Ingenieur-Technik, Vol. 40, pp. 522~524, 1968.
- 7) Boyadzhiev, L. : On the Movement of a Spherical Particle in Vertically Oscillating Liquid, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 57, pp. 545~548, 1973.
- 8) Hwang, P. A. : Fall Velocity of Particles in Oscillating Flow, ASCE, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 111, No. 3, pp. 485~502, 1983.
- 9) Ho, H. W. : Fall Velocity of a Sphere in a Field of Oscillating Fluid, Iowa 大学博士論文, 1964.
- 10) 関根正人・吉川秀夫 : 脈動流中の粒子の沈降特性に関する研究, 土木学会論文集, 第 387 号/II-8, pp. 209~218, 1987.
- 11) Murray, S. P. : Settling Velocities and Vertical Diffusion of Particles in Turbulent Water, Journal of Geophysical Research, Vol. 75, No. 9, pp. 1647~1654, 1970.
- 12) Rouse, H. : Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers, 1st ed., Dover Publications, Inc., p. 215, 1961.

(1987. 7. 8・受付)