

幾何学的非線形解析における薄肉曲線材の折れ線近似の妥当性

VALIDITY OF STRAIGHT BEAM APPROXIMATIONS FOR CURVED THIN-WALLED MEMBERS ON GEOMETRICAL NONLINEAR ANALYSIS

林 正*・岩崎英治**

By Masa HAYASHI and Eiji IWASAKI

In this paper, the validity of straight beam approximations for curved thin-walled members is examined by a theoretical investigation and numerical calculations on geometrical nonlinear analysis. For the purpose of the present report, geometrical nonlinear quantities of a straight beam assemblage as well as an exact circular member are given by reducing the length of straight elements to infinitesimal. Next, the governing differential equations for lateral-torsional buckling of circular arches are derived by using the above quantities. Moreover, the new generalized displacements for the rotations and torsion satisfied the compatible conditions between adjacent elements are proposed for the geometrical nonlinear analysis.

Keywords: geometrical nonlinear analysis, straight beam approximation, curved member, matrix method

1. 緒 言

幾何学的非線形挙動を表現する方程式は、仮想仕事の原理により有限変位場から数学的演算により誘導でき、この式の精度は変位場の精度に左右される。空間曲線部材の有限変位場は、多くの研究者により高精度の変位場が求められていることから、精密な支配方程式を導くことは可能である。しかし、得られた支配方程式の解析解を得ることは特別な場合を除いて不可能に近い。

そこで、近似的な解を得るために、マトリックス構造解析法が適用される。しかし、曲線部材の平衡方程式を定式化する場合に、仮定した変位関数によっては収束性が極度に悪化するなどの問題がある。線形解析での円弧要素の離散化誤差については報告があるが^{1)~3)}、一般的な曲線要素の場合には、より一層の困難が伴うものと思われる。このために、曲線部材を直線要素の集合体として折れ線部材で扱うことが多い。

マトリックス法では連続体を離散化して表現するために離散化誤差が生じるが、この誤差と曲線部材では折れ

線近似により生じる形状の誤差は、要素数を増すことにより減少できることから、折れ線近似によるモデル化は一般的には妥当なものと考えられている。

線形解析を対象とした場合の、折れ線近似の収束性と収束値の妥当性については、解析解が知られている簡単な場合についてマトリックス法による解との比較により容易に確認できる。Walz ら⁴⁾、Yoda ら⁵⁾は、より一般的に評価するために、節点での平衡方程式について、一般化変位を着眼している節点の近傍でテーラー展開して得られるつり合い微分方程式と円弧部材の正しいつり合い式との比較を行っている。この結果、部材を構成する母線ごとの初期曲率の違いが無視できる場合には、線形解析での折れ線近似により得られる収束値の妥当性が明らかにされている。

平面問題の幾何学的非線形解析に関しては、Goto ら⁶⁾が剛体変位除去の手法の精度を、曲線要素と直線要素による折れ線近似を用いた場合について解析的な手法により検討している。また、エラスティカのような解析解が明らかになっているモデルがあるので数値的な検証も可能である。

しかし、空間曲線材の幾何学的非線形問題の場合には、横倒れ座屈の特別なモデルを除いて、解析解が得られないことから有限変位解析の収束値について数値的な検証

* 正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部建設系
(〒940-21 新潟県長岡市上富岡町1603-1)

** 学生会員 工修 長岡技術科学大学大学院材料工学専攻
(同上)

は困難であり、上述のような解析的手法を用いた検討も行われていない。

そこで、本研究では、一定曲率を有する薄肉曲線部材を折れ線近似した場合の妥当性について調べる。このために、直線要素長を無限小にした場合の幾何学量を求め、円弧部材の正しい幾何学量との比較により折れ線近似の誤差について検討する。また、円弧アーチの横倒れ座屈について、仮想仕事の原理により定式化した座屈の支配方程式を解析的に求めた式と比較し、さらに直線要素と円弧要素を用いたマトリックス法により数値的に検討する。

最後に、非線形問題でも回転とねじれ率が隣接する要素間で適合する一般化変位を用いた直線材の折れ線近似について考察する。

2. 解析的検討の手順

本文では、一本の曲線部材を分割したときの個々の部材を「要素」とよぶことにする。また、曲線部材を構成する母線ごとの初期曲率の違いによる影響が無視できる部材を対象にする。

仮想仕事の原理に基づくマトリックス法の定式化は、通常図-1の順序①-②-③-④によって行われ、曲線部材の解析では要素の分割数を増すことによって正解へ収束するものと考えられる。この折れ線近似の収束性について、文献4), 5) は円弧部材の線形解析において④-⑦の段階で要素長の無限小化を解析的に行って無限分割時の平衡方程式を求め、正しい平衡方程式との比較により折れ線近似の妥当性を明らかにしている。

この手法を曲線材の非線形解析の場合に用いると、④に相当する非線形方程式が線形解析の式に比べてかなり複雑な式になるために、④-⑦で解析的に無限小化を行うことが困難になる。

そこで、本文では図-1の①-②-⑤-⑥-⑦の手順を考
える。すなわち、変形後の曲率などの幾何学量に直線部
材の式を用い、これを円弧部材で定義される座標系に変
換してから要素長を無限小化して折れ線近似による円弧
部材の近似的な幾何学量を求め、仮想仕事の原理を用い
た通常の定式化の手法により円弧部材の近似的な平衡方

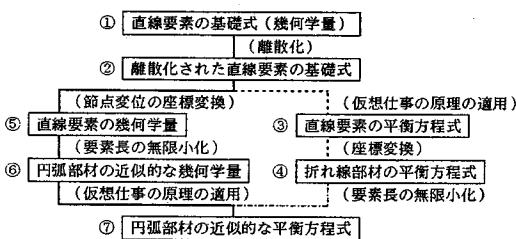


図-1 検討の手順

程式を求める。本文では、円弧アーチの横倒れ座屈解析にこの手法を適用して近似的な座屈支配方程式を求め、これを円弧部材の式と比較する。

このような手法によって求めた⑦の非線形平衡方程式は、①-②-③-④-⑦の手順で求められる式とエネルギー的に等価である。なお、本文で用いる手法によれば、折れ線近似による妥当性を無限分割時の平衡方程式⑦について検討することができるとともに、解析のもとになる幾何学量⑥を正確な円弧部材の式と比較することによって、物理的意味のより明確な検討ができる長所がある。

3. 直線要素の基礎式

解析の基礎になる薄肉直線要素の基礎式を文献 7), 8) から引用する。ここで、要素について定義された諸量には添字 e を付けて表わし、添字 e が付いていない諸量は円弧部材について定義されているものとする。また、 $(\)_1$ は $(\)$ が定義されている軸に関する微分を表わすものとする。

要素軸を x_e とし、 x_e 軸に直交する平面内に、 y_e , z_e 軸をとって右手系直交直線座標 (x_e, y_e, z_e) を定める。このとき、要素両端の節点を a, b として、座標系の原点は節点 a におく。また、板厚中心線を s 軸とすると、断面剛の仮定より^{註1)}、軸ひずみ ϵ_{xs}^e とせん断ひずみ 2 成分 ϵ_{ys}^e の 2 成分は、次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^e &= (\varepsilon_0^e - y_e \hat{x}_3^e + z_e \hat{x}_2^e) \left\{ 1 + \frac{1}{2} (\varepsilon_0^e - y_e \hat{x}_3^e + z_e \hat{x}_2^e)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} [(y_e)^2 + (z_e)^2] (\hat{x}_1^e)^2 - \omega_e \hat{x}_{1,1}^e \\ 2 \varepsilon_{xs}^e &= -\chi_e \hat{x}_1^e \end{aligned} \right\} \quad (1.a, b)$$

ここに, ω_e は x_e 軸に関する単位そり関数を表わし, ω_e と χ_e は慣用の薄肉はり理論で用いられているものと同一である. $\varepsilon_0^e, \hat{x}_1^e, \hat{x}_2^e, \hat{x}_3^e$ はおのおの要素軸 x_e の伸び率, ねじれ率, $z_e - x_e, x_e - y_e$ 面内での曲率であり, これらは, 軸上の変位の 3 次以上の項を省略すると次式のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0^e &= u_{1,1}^e + \frac{1}{2} (u_{2,1}^e)^2 + (u_{3,1}^e)^2 \\ \hat{x}_1^e &= \phi_{-1}^e + \frac{1}{2} (u_{3,1}^e u_{2,11}^e - u_{2,1}^e u_{3,11}^e) \\ \hat{x}_2^e &= -\{u_{3,1}^e (1 - u_{1,1}^e)\}_{,1} + \phi^e u_{2,11}^e \\ \hat{x}_3^e &= \{u_{2,1}^e (1 - u_{1,1}^e)\}_{,1} + \phi^e u_{3,11}^e \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (2 \cdot a \sim d)$$

なお、 u_i^e ($i=1, 2, 3$) は x_e 軸上の座標 (x_e, y_e, z_e) の方向の変位、 ϕ^e は x_e 軸回りのねじれ角である。

また、要素内の任意点での座標 (x_e, y_e, z_e) の方向の変位 (u_p^e, v_p^e, w_p^e) は、次式のようになる。

注1) ただし、ねじれによるそり変形は許容されるものと解釈する。

幾何学的非線形解析における薄肉曲線材の折れ線近似の妥当性

$$\begin{aligned}
 u_e^e &= u_i^e - y_e \{ u_{z,1}^e (1 - u_{z,1}^e) + \phi^e u_{z,1}^e \} \\
 &\quad - z_e \{ u_{z,1}^e (1 - u_{z,1}^e) - \phi^e u_{z,1}^e \} - \omega_e \hat{x}_1^e \\
 v_e^e &= u_z^e - \frac{1}{2} y_e \{ (\phi^e)^2 + (u_{z,1}^e)^2 \} \\
 &\quad - z_e \left(\phi^e + \frac{1}{2} u_{z,1}^e u_{z,1}^e \right) - \omega_e \phi_{,1}^e u_{z,1}^e \\
 w_e^e &= u_z^e + y_e \left(\phi^e - \frac{1}{2} u_{z,1}^e u_{z,1}^e \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} z_e \{ (\phi^e)^2 + (u_{z,1}^e)^2 \} - \omega_e \phi_{,1}^e u_{z,1}^e
 \end{aligned}
 \quad | \dots (3 \cdot a \sim c)$$

直線要素の軸上の変位 u_e^e , ϕ^e は、節点 a, b の変位とこの微係数を一般化変位とし、形状関数に多項式を用いて次式のように表わす。

$$\begin{aligned}
 u_1^e &= N_1 u_{1a}^e + N_2 u_{1b}^e \\
 u_2^e &= N_3 u_{2a}^e + N_4 l_e u_{2a1}^e + N_5 u_{2b}^e + N_6 l_e u_{2b1}^e \\
 u_3^e &= N_3 u_{3a}^e + N_4 l_e u_{3a1}^e + N_5 u_{3b}^e + N_6 l_e u_{3b1}^e \\
 \phi^e &= N_3 \phi_{,1}^e + N_4 l_e \phi_{,1}^e + N_5 \phi_{,b}^e + N_6 l_e \phi_{,b1}^e
 \end{aligned}
 \quad | \dots (4 \cdot a \sim d)$$

ここに、()_a, ()_b はおのおの節点 a, b での諸量を表す。また、形状関数 N_i ($i=1 \sim 6$) は、要素長 l_e と正規座標 $\xi = x_e / l_e$ を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 1 - \xi, & N_2 &= \xi \\
 N_3 &= (1 - \xi)^2 (1 + 2\xi), & N_4 &= \xi (1 - \xi)^2 \\
 N_5 &= \xi^2 (3 - 2\xi), & N_6 &= -\xi^2 (1 - \xi)
 \end{aligned}
 \quad | \dots (5)$$

変位法の場合には、解析の基礎になる式は式 (1), (2) と (3) であるから、無限小化の操作をこれらの式に適用して、円弧部材の正しい式と比較することになる。なお、円弧部材の母線ごとの初期曲率の違いが無視できる場合には、円弧部材のひずみの式は式 (1) と同じ式で表わされるので、無限小化は式 (2), (3) について行い、これらを円弧部材の式と比較する。

4. 幾何学量の極限値

ここでは、折れ線近似の極限として表わされる近似的な円弧部材の幾何学量を直線要素の式から求め、これを円弧部材の式と比較する。

まず、直線要素の座標系で定義された節点変位を円弧部材で定義された座標系へ変換するために、図-2 に示

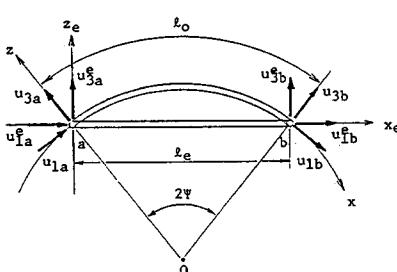


図-2 座標変換

す円弧部材の座標系を用いる。この座標系は、部材軸を x 軸、部材軸の従法線を y 軸とし、 z 軸は直交曲線座標系 (x , y , z) が右手系をなすように主法線の逆向きに定める。これより、節点 a での両座標系の変位の関係は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} u_{1a}^e \\ u_{2a}^e \\ u_{3a}^e \end{cases} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{cases} u_{1a} \\ u_{2a} \\ u_{3a} \end{cases} \\
 \begin{cases} \phi_{,1}^e \\ -u_{3a1}^e \\ u_{1a1}^e \end{cases} &= \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{cases} \phi_a \\ -t_{3a} \\ t_{2a} \end{cases} \\
 \phi_{,1}^e &= \phi_{,1} + \kappa_2 t_{2a}
 \end{aligned}
 \quad | \dots (6 \cdot a \sim c)$$

ここに、 2ψ は両節点間の開角であり、 κ_2 は部材軸の面内初期曲率である。また、 u_t , ϕ は円弧部材の軸上で定義された並進変位とねじれ角を表わし、 t_i は次式で与えられる。

$$t_1 = u_{1,1} + \kappa_2 u_3, \quad t_2 = u_{2,1}, \quad t_3 = u_{3,1} - \kappa_2 u_1 \dots (7)$$

なお、節点 b での関係式は式 (6) で添字 a を b, ϕ を $-\psi$ に換えると得られる。

式 (6) は、節点の並進変位、回転、節点近傍のねじれ率の関係を表わしており、非線形解析においても座標軸 x_e , y_e , z_e 回りの回転に関する一般化変位として ϕ^e , $-u_{3,1}^e$, $u_{1,1}^e$ が、ねじれ率として $\phi_{,1}^e$ が、一般に用いられている。そして、これらの一般化変位を円弧部材の座標系での値に変換した場合に、おのおのの物理的意味が ϕ , $-t_3$, t_2 , $\phi_{,1} + \kappa_2 t_2$ に相当することから¹²⁾、式 (6·b, c) が成り立つものとした。

さて、式 (2) に式 (4), (6) を順次代入し、要素長を無限小にすると、折れ線近似による近似円弧部材の式が得られる。

以上の手順を、伸び率について示す。式 (2·a) に式 (4), (6) を代入すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0^e &= \frac{u_{1b} - u_{1a}}{l_e} \cdot \frac{\psi}{\tan \psi} + \frac{1}{2} \kappa_2 (u_{3b} + u_{3a}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{N'_5 u_{2b} + N'_3 u_{2a}}{l_e} \cdot \frac{\psi}{\sin \psi} \right. \\
 &\quad \left. - (N'_6 \phi_b - N'_4 \phi_a) \sin \psi + (N'_6 t_{2b} + N'_4 t_{2a}) \cos \psi \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{N'_5 u_{3b} + N'_3 u_{3a}}{l_e} \cdot \frac{\psi}{\tan \psi} - \frac{\kappa_2}{2} (N'_5 u_{1b} - N'_3 u_{1a}) \right. \\
 &\quad \left. + (N'_6 t_{3b} + N'_4 t_{3a}) \right\}^2 \dots (8)
 \end{aligned}$$

ここに、 N'_i は N_i の ξ による導関数を表わし、 l_e は両節点間の弧長で直線要素長 l_e と次の関係がある。

$$l_e = l_0 \frac{\sin \psi}{\psi} \dots (9)$$

次に、節点変位を円弧部材軸の座標値の連続関数と考

えて、要素中点 ($x=x_0$) の近傍で弧長について次式のようにテーラー展開する。

他の節点変位についても同様にテーラー展開を行い、式(8)に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^e = & u_{1,1} \frac{\phi}{\tan \phi} + \kappa_2 u_3 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{N'_5 - N'_3}{2} u_{2,1} \frac{\phi}{\sin \phi} \right. \\ & \left. + (N'_6 + N'_4) t_2 \cos \phi \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{N'_5 - N'_3}{2} u_{3,1} \frac{\phi}{\tan \phi} \right. \\ & \left. - \frac{\kappa_2}{2} (N'_5 - N'_3) u_1 + (N'_6 + N'_4) t_3 \right\}^2 + 0(l_0) \dots \dots \dots (11)\end{aligned}$$

上式で式(7)の関係を考慮して、 β_0 を零、すなわち
 ψ を零の極限にすると、 ξ の値に關係なく、次式の近似
 円弧部材の伸び率が得られる。

残りの式と \hat{x}_i^e を x_e で微分して求めた $\hat{x}_{i,1}^e$ に同様の操作を行って次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_1 &= \phi_{,1} + x_2 \hat{t}_{2,1} + (1/2) (\hat{t}_{3,2,1} - \hat{t}_2 \hat{t}_{3,1}) - (1/2) x_2 \phi \hat{t}_3 \\ \hat{x}_2 &= -\hat{t}_{3,1} (1 - t_1) + \phi \hat{t}_{2,1} - x_2 \phi^2 \\ \hat{x}_3 &= \hat{t}_{2,1} (1 - t_1) - (x_2 - \hat{t}_{3,1}) \phi + x_2 \phi \hat{t}_1 \\ \hat{x}_{1,1} &= \phi_{,11} + x_2 \hat{t}_{2,1} + (1/2) (\hat{t}_{3,2,11} - \hat{t}_2 \hat{t}_{3,11}) \\ &\quad - (1/2) x_2 (\hat{t}_2 \hat{t}_{1,1} + 3 \hat{t}_3 \phi_{,1} + 2 x_2 \hat{t}_2 \hat{t}_3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12 \cdot b - e)$$

一方、厳密な円弧部材の伸び率、ねじれ率、曲率⁷⁾を級数展開して次式が求められる。

上式と式(12)を比べると、式(13)の下線の項が式(12)に欠落し、式(12)の下線の項が誤差として生じており、これらはすべて非線形項である。これらの違いのなかで、式(13)の破線の項が式(12)では欠落しているが、これは部材軸方向変位 u_i^* を式(4-a)のように1次関数で仮定しているためで、2次以上の関数を用いれば一致する。また、回転成分にはねじれ角と2軸曲げによる回転角として断面内変位の微係数を用いているために、回転が微小な線形の場合にしか式(6-b)の関係が成立しないことと、ねじれ率としてねじれ角の微係数を用いていることにより式(13)の波線の項の欠落と式(12)の下線の項に違いが現われている。

以上のことから、折れ線近似による極限の幾何学量は、

線形解析では円弧部材の式に収束するが、非線形解析では正しい式に収束しないことがわかる。なお、式(12)と(13)に差異のある項は、式(13-c)の破線の項を除けばいずれも面外変位成分 ϕ 、 t_2 が関係していることから、平面問題の非線形解析では u_i^e に 2 次以上の形状関数を用いれば折れ線近似による式は正解へ収束する。

式(3)の変位についても同様に極限を求めるとき、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_p &= u_1 - y(t_2(1-t_1) + \phi t_3) - z(t_3(1-t_1) - \phi t_2) - \omega \hat{x}_1 \\ v_p &= u_2 - \frac{y}{2}(\phi^2 + t_2^2) - z\left(\phi + \frac{1}{2}t_2 t_3\right) - \omega(\phi_{,1} + \kappa_2 t_2)t_2 \\ w_p &= u_3 + y\left(\phi - \frac{1}{2}t_2 t_3\right) - \frac{z}{2}(\phi^2 + t_3^2) - \omega(\phi_{,1} + \kappa_2 t_2)t_3 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (14 \cdot a - c)$$

上式は \hat{x}_1 を除いて円弧部材の正しい変位に一致する。なお、 \hat{x}_1 は式 (12・b) で与えられるものである。

5. 円弧アーチの横倒れ座屈

円弧部材の基礎式として式(12), (14)を用いた円弧アーチの横倒れ座屈の支配方程式を仮想仕事の原理により求めて、円弧アーチの正しい支配方程式と比較する。このとき、簡単化のために2軸対称断面の仮定と座屈前の面内変形の影響を無視する線形座屈解析の仮定を適用する。

任意の面内荷重により、座屈前に次式の応力が発生しているものとする。

ここに、 N , M_y は軸力と面内曲げモーメント、 A , I_y は断面積と y 軸回りの断面 2 次モーメントである。

座屈時の円弧アーチの仮想ひずみエネルギー δU は、座屈直前の平衡状態からのひずみ増分 $\Delta \varepsilon_{xx}$, $2 \Delta \varepsilon_{xs}$ と応力増分 $\Delta \sigma_{rr}$, $\Delta \sigma_{rs}$ により、次式のようになる。

$$\delta U = \int_V [(\sigma_{xx}^0 + \Delta\sigma_{xx})\delta(\Delta\varepsilon_{xx}) + 2\Delta\sigma_{xs}\delta(\Delta\varepsilon_{xs})] dV$$

ここで、式(1)に式(12)を代入して、座屈時の面外変位の増分 Δu_2 , $\Delta\phi$ によるひずみ増分を求め、これを上式に代入して、弾性状態を仮定すれば次式が得られる。

ここに, EI_z , EI_w , GJ_s はおのれの, 面外曲げ剛性, 曲げねじり剛性, サン・ブナンのねじり剛性, $L_r = L_y + L_z$, L はアーチリブの弧長である. また, 伸び率 $\Delta\varepsilon_{02}$, ねじれ率 $\Delta\hat{\chi}_{11}$, 曲率 $\Delta\hat{\chi}_{22}$, $\Delta\hat{\chi}_{31}$ は式 (12) から次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varepsilon_{02} &= (1/2)(\Delta t_2)^2 \\ \Delta\hat{x}_{11} &= \Delta\phi_1 + x_2\Delta t_2 \\ \Delta\hat{x}_{22} &= (\Delta t_{2,1} - x_2\Delta\phi)\Delta\phi \\ \Delta\hat{x}_{31} &= \Delta t_{2,1} - x_2\Delta\phi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots\dots (17\cdot a\sim d)$$

ここに、第2添字1, 2はそれぞれ増分量に関する1次と2次の項を意味する。

座屈時の仮想仕事 δW は、 (x, z) 方向の単位体積当たりの力 (p_x^0, p_z^0) と部材端の単位面積当たりの力 (P_x^0, P_z^0) より、次式のようになる。

$$\delta W = \int_V [p_x^0 \delta(\Delta u_p) + p_z^0 \delta(\Delta w_p)] dV + \left[\bar{n}_x \int_A [\bar{P}_x^0 \delta(\Delta u_p) + \bar{P}_z^0 \delta(\Delta w_p)] dA \right]_0^L$$

ここに、 \bar{n}_x は部材端の断面の外向き法線と部材軸との方向余弦で、 $x=0$ で -1 , $x=L$ で 1 の値をとる。

式 (14·a, c) に $\Delta u_2, \Delta\phi$ を代入して $\Delta u_p, \Delta w_p$ を求め、上式に代入すると仮想仕事式は次式のようになる。

なお、荷重は座屈直前までは、面内変形だけが起こるよう作用しているものとする。

$$\delta W = \int_0^L [m_y^0 \Delta\phi \delta(\Delta t_2) + \Delta t_2 \delta(\Delta\phi) - t_{zz}^0 \Delta\phi \delta(\Delta\phi)] dx + \left[\bar{n}_x [\bar{M}_y^0 \Delta\phi \delta(\Delta t_2) + \Delta t_2 \delta(\Delta\phi) - \bar{T}_{zz}^0 \Delta\phi \delta(\Delta\phi)] \right]_0^L \quad \dots\dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} m_y^0 &= \int_A p_x^0 z dA, & t_{zz}^0 &= \int_A p_z^0 z dA \\ \bar{M}_y^0 &= \int_A \bar{P}_x^0 z dA, & \bar{T}_{zz}^0 &= \int_A \bar{P}_z^0 z dA \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots\dots (19)$$

したがって、式 (16), (18) に仮想仕事の原理を適用すると、座屈の支配方程式は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} EI_z \Delta\hat{x}_{31,11} + x_2 EI_w \Delta\hat{x}_{11,111} - x_2 G J_s \Delta\hat{x}_{11,1} \\ + (M_y \Delta\phi)_{,11} - (N \Delta t_2)_{,1} - x_2 (N \Delta\hat{x}_{11,1})_{,1} \frac{I_r}{A} \\ + (N \Delta\hat{x}_{31,1})_{,11} \frac{I_z}{A} = -(m_y^0 \Delta\phi)_{,1} \\ EI_w \Delta\hat{x}_{11,111} - G J_s \Delta\hat{x}_{11,1} - x_2 EI_z \Delta\hat{x}_{31,1} \\ + M_y (\Delta t_{2,1} - 2x_2 \Delta\phi) - (N \Delta\hat{x}_{11,1})_{,1} \frac{I_r}{A} \\ - x_2 N \Delta\hat{x}_{31,1} \frac{I_z}{A} = m_y^0 \Delta t_2 - t_{zz}^0 \Delta\phi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots\dots (20\cdot a, b)$$

境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \delta(\Delta u_2) &= -EI_z \Delta\hat{x}_{31,1} - x_2 EI_w \Delta\hat{x}_{11,111} + x_2 G J_s \Delta\hat{x}_{11,1} \\ &- (M_y \Delta\phi)_{,1} + N \Delta t_2 + x_2 N \Delta\hat{x}_{11,1} \frac{I_r}{A} \\ &- (N \Delta\hat{x}_{31,1})_{,1} \frac{I_z}{A} - m_y^0 \Delta\phi \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta(\Delta u_{2,1}) &\left[EI_z \Delta\hat{x}_{31} + x_2 EI_w \Delta\hat{x}_{11,11} + M_y \Delta\phi \right. \\ &\left. + N \Delta\hat{x}_{31} \frac{I_z}{A} - \bar{n}_x \bar{M}_y^0 \Delta\phi \right] = 0 \\ \delta(\Delta\phi) &\left[-EI_w \Delta\hat{x}_{11,111} + G J_s \Delta\hat{x}_{11,1} + N \Delta\hat{x}_{11,1} \frac{I_r}{A} \right. \\ &\left. - \bar{n}_x (\bar{M}_y^0 \Delta t_2 - \bar{T}_{zz}^0 \Delta\phi) \right] = 0 \\ \delta(\Delta\phi_{,1}) &EI_w \Delta\hat{x}_{11,1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots\dots (21\cdot a\sim d)$$

一方、円弧部材の正しい幾何学量 (13) を用いた場合には、式 (17·c) が次式のようになる。

$$\Delta\hat{x}_{22} = \Delta t_{2,1} \Delta\phi - (1/2)x_2((\Delta t_2)^2 + (\Delta\phi)^2)$$

この違いにより式 (20·b) の波線の係数が 1 になり、式 (20·a), (21·a) の左辺におのおの、次の項が付加される。

$$x_2(M_y \Delta t_2)_{,1}, \quad -x_2 M_y \Delta t_2 \delta(\Delta u_2)$$

このことから、初期断面力として曲げモーメント M_y が生じない場合には、折れ線近似による解は正解へ収束するが、一般には折れ線近似による手法では正解が得られない。

なお、折れ線近似による式 (20) は、興味深いことに軸力の項を除くと、Yoo⁹⁾ の式に一致するが、この式については、疑義が文献 10), 11) に提示されている。Yoo は、直線部材の式を用いて座屈時の全ポテンシャルエネルギーを求め、式中の $u_{1,1}^e, \phi_{1,1}^e, -u_{3,11}^e, u_{2,11}^e$ をおのおの対応する円弧部材の伸び率、ねじれ率、曲率の線形項で置換して、停留原理により座屈時の支配方程式を誘導している。

6. 数値計算による検証

4. と 5. で理論的に調べた結果を、図-3 のような円弧アーチの横倒れ座屈について数値的に検証する。数値計算では、比較的容易に解析解が得られるモデル A について、Galerkin 法により式 (21) の境界条件を満足する変位モードを仮定して、式 (20) の近似円弧部材の式と正しい円弧部材の式を用いた解を求める。また、図-3 のすべてのモデルについて直線要素と円弧要素を用いたマトリックス法による解を求める。

マトリックス法では、アーチリブを適当な数の要素に分割する。直線要素、円弧要素とも、おのおのの基礎式を用いて平衡方程式を求め、通常の固有値問題として計算する。形状関数には式 (5) を用いるが、円弧部材では軸方向変位 u_i^e に 1 次関数を用いると、収束性が著しく悪化することが知られているので^{1)~3)}、ここでは、3 次式を採用する。

図-3 の解析モデルの面外境界条件は、すべて同一で、 $\Delta u_2 = \Delta u_{2,11} = \Delta\phi = \Delta\phi_{,11} = 0$

としている。また、アーチの開角を $\theta=0^\circ \sim 170^\circ$ とし、次の諸元を用いる。

$$\begin{aligned} A &= 92.88 \text{ cm}^2, & I_y &= 11,363 \text{ cm}^4 \\ I_z &= 3,871 \text{ cm}^4, & I_w &= 555,869 \text{ cm}^6 \\ J_s &= 58.9 \text{ cm}^4, & L &= 10.244 \text{ m} \\ E &= 200 \text{ GPa}, & G &= 77.2 \text{ GPa} \end{aligned}$$

マトリックス法での要素数は特に断らない限り 16 要素とし、計算結果は次式で定義される座屈係数 γ で示す。

$$M_{cr} = \gamma EI_z / L, \quad P_{cr} = \gamma EI_z / L^2$$

まず、図-3 のモデル A を考える。このモデルは面内境界条件が一端ヒンジ、他端ローラの円弧アーチの両端にモーメント M を受けるものであり、座屈前の断面力として部材軸方向に一定な曲げモーメントだけが作用するので、Galerkin 法により解析的に座屈荷重を求めることが容易である。

表-1 に座屈係数の値を示す。解析解とマトリックス法による解はそれぞれ比較的よく一致しているが、折れ線近似による値と円弧要素の値は $\theta=0^\circ$ (直線ばかり) 以外では一致せず、 θ が大きくなるほどその差は大きくなる。マトリックス法における要素数の影響を表-2 に示す。要素数を増すとマトリックス法による直線要素、円弧要素の値はそれぞれの解析解に収束するが、折れ線近似による値は円弧部材の値に収束していないことがわかる。この理由は、式 (12-c) の曲率 \hat{x}_2 が式 (13-c) に、一致しないためである。

次に、モデル B を考える。このモデルはモデル A で面内境界条件を両端ヒンジにしたものである。このため、 $\theta=0^\circ$ の直線ばかりの場合には座屈前の断面力は曲げモーメントだけであるが、 $\theta \neq 0^\circ$ の場合には曲げモーメントと軸力が発生することになる。このときの数値解を表-3 に示す。これから、モデル B はモデル A ほど円弧要素と直線要素に違いはないが、開角が大きい場合には有意

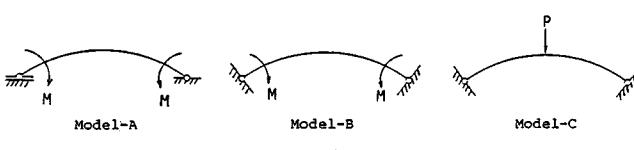


図-3 解析モデル

表-3 座屈係数 γ (Model-B)

θ	円弧要素 γ_c	直線要素 γ_s	γ_c / γ_s
0	0.26699	0.26699	1.0000
10	0.13886	0.14371	1.0349
30	0.10811	0.10392	0.9613
60	0.05950	0.05259	0.8779
90	0.03484	0.02755	0.7906
130	0.01538	0.00914	0.5947
170	0.00265	0.00047	0.1754

表-4 座屈係数 γ (Model-C)

θ	円弧要素 γ_c	直線要素 γ_s	γ_c / γ_s
0	1.45130	1.45130	1.0000
10	0.81415	0.85824	1.0542
30	0.58803	0.63037	1.0541
60	0.29727	0.31225	1.0504
90	0.14291	0.15170	1.0615
130	0.03873	0.04219	1.0893
170	0.00144	0.00159	1.1075

な差がみられる。ところで、表-1 と 3 を比べれば明らかなように、円弧要素による値はモデル A と B でほとんど変わらないが、直線要素による値には著しい違いがあることに注意する必要がある。

最後に、モデル C を考える。このモデルは面内境界条件が両端ヒンジの円弧アーチの中央の部材軸上に集中荷重が作用したものである。この数値解が表-4 であり、結果からは数値的に大きな差はない。また、座屈解析としての工学的意味はないかもしれないが、表-5 に示した第二モードの座屈係数には大きな差がみられる。

なお、円弧アーチに求心等分布荷重が作用して、座屈前に軸方向力のみが生じる場合には、折れ線近似による解は正解へ収束する。

7. 非線形解析における一般化変位

4. と 5. では、一般化変位に線形解析で用いられる節点変位を使用した場合の折れ線近似の誤差について考察した。この結果、回転とねじれに関する一般化変位の関係式 (6) が、変位が微小な線形の場合にしか成立しないために、折れ線近似による幾何学量 (12) は、円弧部材の式 (13) に収束しないことがわかった。そこで、ここでは変位が有限な場合にも、式 (6) と同様な関係が

表-1 座屈係数 γ (Model-A)

θ	Galerkin 法による解		マトリックス法による解	
	円弧部材	近似円弧	円弧要素	直線要素
0	0.26699	0.26699	0.26699	0.26699
10	0.19280	0.26491	0.19280	0.26492
30	0.10892	0.25582	0.10892	0.25586
60	0.05699	0.23070	0.05700	0.23082
90	0.03310	0.19191	0.03310	0.19213
130	0.01483	0.12013	0.01484	0.12038
170	0.00257	0.02662	0.00262	0.02670

表-2 要素数と収束性 (Model-A)

要素数	$\theta = 10^\circ$		$\theta = 130^\circ$			
	直線要素	円弧要素	直線要素	円弧要素		
	γ_c / γ_e	γ_s / γ_e	γ_c / γ_e	γ_s / γ_e		
4	1.37480	1.00055	1.00070	8.38015	1.03426	1.17066
8	1.37415	1.00008	1.00005	8.17080	1.00842	1.01043
16	1.37407	1.00002	1.00000	8.11955	1.00210	1.00064
32	1.37405	1.00000	1.00000	8.10680	1.00052	1.00004

γ_c : マトリックス法による座屈係数

γ_e : 円弧部材による解析解

γ_s : 近似円弧部材による解析解

表-5 第二モードの座屈係数 γ (Model-C)

θ	円弧要素 γ_c	直線要素 γ_s	γ_c / γ_s
0	4.90891	4.90891	1.0000
10	4.50292	4.57483	1.0160
30	8.25692	7.89161	0.9511
60	9.05290	7.19667	0.7950
90	7.66242	5.34168	0.6971
130	5.63568	3.48105	0.6177
170	4.01341	2.21935	0.5530

成立するような一般化変位について考察し、この一般化変位を用いた場合の折れ線近似の妥当性について調べる。

節点の有限な回転は、単位ベクトル ϕ を回転中心軸とした有限な角 α で表現でき、ベクトル ϕ をある直交座標系 (x_1, x_2, x_3) の成分 (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) で分解した場合に、これらの座標軸回りの回転パラメーター $\hat{\theta}_i$ を、文献 7), 13) より、次式のように定義する。

$$\hat{\theta}_i = 2 \phi_i \tan \frac{\alpha}{2} \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots \dots \dots \quad (22)$$

右辺の $\tan(\alpha/2)$ は、座標系によらない量である。また、 ϕ_i はベクトル量であるから、一般化変位として、上式の左辺を用いると有限回転についても並進変位と同様の座標変換式を用いることができる。

座標系 (x_1, x_2, x_3) が、直線要素の座標系 (x_e, y_e, z_e) に一致している場合には、この一般化変位は直線要素内の独立変分量 u_i^e, ϕ^e から、3 次以上の変位を微小として省略すると次式のようになる⁷⁾。

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\theta}_1^e = \phi^e \\ \hat{\theta}_2^e = -u_{3,a}^e(1-u_{1,a}^e) + \frac{1}{2}\phi^e u_{2,a}^e \\ \hat{\theta}_3^e = u_{2,a}^e(1-u_{1,a}^e) + \frac{1}{2}\phi^e u_{3,a}^e \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (23)$$

ねじれ率については、單一部材から成る滑らかな曲線部材を折れ線で近似した場合に、無限分割時には適合する。しかし、ねじれ率に関する一般化変位にねじれ角の微係数を用いた場合には、ねじれ率の非線形項の一部は適合しない。そこで、ねじれ率に関する一般化変位として、式 (2・b) を用いることにする。

ここで定義した回転とねじれ率の一般化変位を用いると式 (6・b, c) に対応した関係式は、次式のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{1a}^e \\ \hat{\theta}_{2a}^e \\ \hat{\theta}_{3a}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{1a} \\ \hat{\theta}_{2a} \\ \hat{\theta}_{3a} \end{bmatrix} \\ \hat{x}_{1a}^e = \hat{x}_{1a} \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (24 \cdot a, b)$$

節点 b については添字 a を b に換え、 ψ を $-\psi$ とおく。また、右辺の $\hat{\theta}_{1a}, \hat{\theta}_{2a}, \hat{x}_{1a}, \hat{x}_{1b}$ はおのおの円弧部材の座標系で定義された量で、 \hat{x}_1 は式 (13・b) になり、 $\hat{\theta}_i$ は円弧部材軸のねじれ角 ϕ と式 (7) から次のようになる⁷⁾。

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\theta}_1 = \phi \\ \hat{\theta}_2 = -t_3(1-t_1) + \frac{1}{2}\phi t_2 \\ \hat{\theta}_3 = t_2(1-t_1) + \frac{1}{2}\phi t_3 \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (25)$$

次に、回転とねじれ率に式 (23), (2・b) で定義した

一般化変位を用いて、4. と同様に幾何学量の極限を求める。

変位関数は、式 (5) の形状関数 N_i を用いて式 (4) と同様な式で表わされるが、式中の節点変位の微係数を新たに一般化変位で表わす必要がある。そこで、式 (2・b) と (23) からこれらの値の関係を求めるとき式のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\theta}_{1a}^e = \phi_a^e \\ \hat{\theta}_{2a}^e = -u_{3,a,1}^e \left(1 - \frac{u_{1b}^e - u_{1a}^e}{l_e} \right) + \frac{1}{2} \phi_a^e u_{2,a,1}^e \\ \hat{\theta}_{3a}^e = u_{2,a,1}^e \left(1 - \frac{u_{1b}^e - u_{1a}^e}{l_e} \right) + \frac{1}{2} \phi_a^e u_{3,a,1}^e \\ \hat{x}_{1a}^e = \phi_{a,1}^e + \frac{u_{2,b,1}^e u_{2,a,1}^e - u_{2,b,1}^e u_{3,a,1}^e}{l_e} + 3 \frac{u_{2b}^e - u_{2a}^e}{l_e^2} u_{3,a,1}^e \\ \quad - 3 \frac{u_{3b}^e - u_{3a}^e}{l_e^2} u_{2,a,1}^e \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (26 \cdot a-d)$$

$\hat{\theta}_{1b}^e$ については添字 a を b に換えたものであり、 \hat{x}_{1b}^e は、次式のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x}_{1b}^e = \phi_{b,1}^e + \frac{u_{2,b,1}^e u_{2,a,1}^e - u_{2,b,1}^e u_{3,a,1}^e}{l_e} - 3 \frac{u_{2b}^e - u_{2a}^e}{l_e^2} u_{3,b,1}^e \\ \quad + 3 \frac{u_{3b}^e - u_{3a}^e}{l_e^2} u_{2,a,1}^e \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (26 \cdot e)$$

ねじれ率の式では、式 (2・b) の 2 階微分の項を求めるのに、式 (4) の導関数を用いた。

式 (26) から節点変位の微係数を求め、式 (4) に代入すると変位関数は次式のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} u_1^e = N_1 u_{1a}^e + N_2 u_{1b}^e \\ u_2^e = N_3 u_{2a}^e + N_4 u_{2b}^e + N_5 l_e \left[\left(1 + \frac{u_{1b}^e - u_{1a}^e}{l_e} \right) \hat{\theta}_{1a}^e \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \hat{\theta}_{1a}^e \hat{\theta}_{2a}^e \right] + N_6 l_e \left[\left(1 + \frac{u_{1b}^e - u_{1a}^e}{l_e} \right) \hat{\theta}_{2a}^e \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \hat{\theta}_{1b}^e \hat{\theta}_{2b}^e \right] \\ u_3^e = N_3 u_{3a}^e + N_5 u_{3b}^e - N_4 l_e \left[\left(1 + \frac{u_{1b}^e - u_{1a}^e}{l_e} \right) \hat{\theta}_{1a}^e \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} \hat{\theta}_{1a}^e \hat{\theta}_{3a}^e \right] - N_6 l_e \left[\left(1 + \frac{u_{1b}^e - u_{1a}^e}{l_e} \right) \hat{\theta}_{2a}^e \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} \hat{\theta}_{1b}^e \hat{\theta}_{3b}^e \right] \\ \phi^e = N_3 \hat{\theta}_{1a}^e + N_5 \hat{\theta}_{1b}^e + N_4 l_e \left[\hat{x}_{1a}^e + \frac{\hat{\theta}_{2b}^e \hat{\theta}_{3a}^e - \hat{\theta}_{3b}^e \hat{\theta}_{2a}^e}{l_e} \right. \\ \quad \left. + 3 \frac{u_{2b}^e - u_{2a}^e}{l_e^2} \hat{\theta}_{2a}^e + 3 \frac{u_{3b}^e - u_{3a}^e}{l_e^2} \hat{\theta}_{3a}^e \right] \\ \quad + N_6 l_e \left[\hat{x}_{1b}^e + \frac{\hat{\theta}_{2b}^e \hat{\theta}_{3a}^e - \hat{\theta}_{3b}^e \hat{\theta}_{2a}^e}{l_e} - 3 \frac{u_{2b}^e - u_{2a}^e}{l_e^2} \hat{\theta}_{2b}^e \right. \\ \quad \left. - 3 \frac{u_{3b}^e - u_{3a}^e}{l_e^2} \hat{\theta}_{3b}^e \right] \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (27 \cdot a-d)$$

式(24), (27)を用いて4.と同様の手順を踏み, 式(25)を考慮すると折れ線近似による幾何学量が得られ, これは円弧部材の正しい幾何学量に一致する。

以上より, 回転とねじれ率の一般化変位に式(23), (2-b), を用いた場合には, 折れ線近似により正解へ収束することが確かめられる。

8. 結 論

折れ線近似による曲線材の解析手法について, 次のこととが明らかになった。

(1) 通常のマトリックス法による折れ線近似の手法では, 無限の要素分割を行っても, 曲率とねじれ率の非線形項は円弧部材の式に一致しない。

(2) このことにより, 折れ線近似の手法は線形解析では妥当な解析手法であるが, 非線形解析では正解に収束しないことがある。

(3) 円弧アーチの横倒れ座屈解析では, 座屈前の初期応力が軸方向力のみによる場合には正解に収束するが, 初期曲げモーメントが作用する場合には正解が得られない。

(4) 回転に関する一般化変位とねじれ率に, 有限変位理論の観点から隣接要素間で適合する量を用いれば, 折れ線近似は妥当な解法である。

以上の結論は, 一定曲率だけを有する曲線材について, 得られたものであるが, 任意な曲線材についても同様の結論が得られるものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) Yamada, Y. and Ezawa, Y. : On Curved Finite Elements for the Analysis of Circular Arches, Inter. Jour.

for Num. Meth. in Eng., Vol. 11, 1977.

- 2) 山本善之・大坪英臣：アーチ要素の離散化誤差について, 日本鋼構造協会, 第13回, マトリックス解析法研究発表論文集, 1979.
- 3) 川井忠彦・川端康洋：各種離散化要素の数値的評価について, 同上.
- 4) Walz, J. E., Fulton, R. E., Cyrus, N. J. and Eppink, R. T. : Accuracy of Finite Element Approximations to Structural Problems, NASA, TN, D-5728, 1970.
- 5) Yoda, T., Fuyama, H. and Hirashima, M. : Validity of an Analysis of Thin-Walled Helicoidal I-Section Beams Approximated by an Assemblage of Straight Beams, Proc. of JSCE, No. 335, 1983.
- 6) Goto, Y., Hasegawa, A. and Nishino, F. : Accuracy and Convergence of the Separation of Rigid Body Displacements for Plane Curved Frames, Proc. of JSCE, No. 344/I-1, 1984.
- 7) 前田幸雄・林 正：充実曲線材の有限変位理論, 構造工学論文集, Vol. 32A, 1986.
- 8) 林 正・岩崎英治・前田幸雄：薄肉曲線部材の有限変位場, 構造工学論文集, Vol. 33A, 1987.
- 9) Yoo, C. H. : Flexural-Torsional Stability of Curved Beams, Proc. of ASCE, Vol. 108, No. EM6, 1982.
- 10) Rajasekaran, S. and Ramm, E. : Discussion of "Flexural-Torsional Stability of Curved Beams" by C. H. Yoo, Jour. of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 110, No. 1, 1984.
- 11) Papangelis, J. P. and Trahair, N. S. : Flexural-Torsional Buckling of Arches, Jour. of Structural Engineering, ASCE, Vol. 113, No. 4, 1987.
- 12) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論, 土木学会論文報告集, 第110号, 1964.
- 13) Elias, Z. M. : Theory and Methods of Structural Analysis, Wiley-Interscience, pp. 557~660, 1986.

(1987.9.14・受付)