研究展望

Review

【土木学会論文集　第392号／I-9　1988年4月】

研究展望

有限要素法とその応用——最近の話題と発展——

RECENT DEVELOPMENT OF FINITE ELEMENT METHODS AND THEIR APPLICATIONS

菊池　昇*
By Noboru KIKUCHI

1. はじめに

有限要素法が導入されて以来，すでに30年以上もたった．この間の理論の発展，応用範囲の広がりは，ほとんどすべての理工学の領域に及んでいる．有限要素法は，よくいわれるように，コンピュータと，その発展をともにしている．コンピュータが種々な分野に進出するに従い，有限要素法もそれらの分野に広がっていったように思えるほどである．こうした応用分野の拡大の中で，有限要素法の理論は，どのような発展をしてきたのだろうか．とりわけ80年代以降の注目に値する研究課題は何であったかをみて，今後どのような発展の可能性があるかを探ってみよう．

おおまかに有限要素法の発展を省みると，

1956～1965　理論形成期
1966～1975　非線形分野への応用，および，汎用プログラムの開発
1976～1985　基礎理論の完成，および，有限要素法の“大衆化”
1986～　CAE (Computer Aided Engineering) への組み込み期

のように節目を分けていいのではないか．有限要素法の工学における理論は1965年の段階でほぼ完成していた．たとえばClough[1]の論文には，基本的な考え方，原理，要素剛性の導き方，応用等が，実に簡明にまた大系的に書かれてあるし，65年のWright Pattersonでの会議の論文集[2]をみると，大抵のことは研究されていたことがわかる．少なくも大学の学部や大学院で教える程度の内容は，65年までの理論を話すことによって網羅できる．

次の発展段階は，当然のように非線形問題へのチャレンジである．そして，65年までの理論をもとにした線形問題のための汎用プログラムの開発である．有限要素法を他の数値解法の中で際だたせている点は，この汎用プログラムの開発ではないか．工学の発展の中で，汎用プログラムの存在は大きな役割を担った．有限要素法という手法を駆使する人々の底辺を相当に広げたのである．汎用プログラムという考え方が，また，当時のコンピュータの売り込み文句とぴったり一致していた．大型汎用機で構造解析の汎用プログラムを流す，というわけだ．したがって，汎用コンピュータと同じように，何でも解けるという超大型の複雑な汎用プログラムを世界中で作りはじめたのである．

第三期は，それまでの工学理論の一応の完成を踏まえた，数学理論の形成・完成期である．70年代前半からの応用数学者，工学分野で数学を目指す人々の活動がその源である．こうした学問としての有限要素法の発展の中で，有限要素法は汎用プログラムという怪物の活躍で狭い研究者達のグループからしだいに一人歩きをし，“大衆化”が始まる．別段有限要素法の理屈やプログラムの中味を知らなくとも汎用プログラムを使って解析できる技術者が大きな割合を占めるようになり，有限要素法を研究するという人々はだんだん数少なくなった時期である．これはちょうどコンピュータが普及し，もはや，非常に特殊な人々にだけ許されたものではなくなったのと同じである．

* 正会員　Ph.D.　ミシガン大学教授　工学部機械応用力学科 (University of Michigan, Dept. of ME-AM, Ann Arbor, MI 48109, U.S.A.)

Keywords : *reduced integration, hourglass control, adaptive methods, arbitrary Lagrangian-Eulerian, automatic mesh generation*

そして，第四期目は，80年代前半でのコンピュータ・グラフィックスの発展，PCやEWSという誰でもが持てるという大衆化のためのコンピュータの出現で，有限要素法は，CAEシステムの中核を占めることになる．と同時に，コンピュータの大衆化の中でこそ意味をもつ，高級化，すなわち，スーパーコンピュータの開発に伴った有限要素法プログラムの特殊化が始まるのである．衝撃解析のためのDYNA[3]コードの開発が，その一例である．汎用機がもつ考え方からの脱皮が始まったわけで，それは当然，第二期の汎用プログラムの基本思想が時代にだんだんと沿わなくなったことを意味している．有限要素法は，1つの完成を終えて，新しい時代環境に合うもう1つの発展へ向かう時期にさしかかっている．

2. なぜ速さを求めるか

コンピュータの両極端，PCやEWS，それにスーパーコンピュータは，ともに精度の高いそれでいて速く計算できる有限要素法を望む．PCやEWSであれば，計算速度が相当に速くなったとはいっても，せいぜいが1～3 MFLOPSである．したがって実際の構造解析のモデルを計算するとなると無理がある．特に三次元問題になると容量の方はかなり工夫できても計算が追いつかない．一方，スーパーコンピュータは速度が売り物だから，速くないプログラムを流しても一向に面白くない．したがって両極端の機種が同じ要求をもつことになる．その点いわゆるメイン・フレーム用の大型汎用機だと，“粗さ”が目立たない．プログラムの遅いところはコンピュータがカバーし度外なスピードは望まないので無理がないわけだ．

さて，速くするにはどうすればよいか．有限要素法では，たぶん，3つのことが考えられる．プログラムをベクトル化する．要素剛性マトリックスの形成を速める．連立一次方程式を解く工夫をする．ローレンス・リバモア国立研究所でJohn Hallquistによって開発された衝撃解析用特殊用途プログラム[3]はベルトル化と要素剛性マトリックスの形成の仕方を特別に考えている．こうした努力の成果で，図—1にあるような衝撃解析が可能になる．図—1は，HallquistとBensonがCRAYコンピュータを使って，計算した円筒の衝撃座屈のシミュレーションである．ベクトル化は，有限要素法というよりはコーディングの仕方により多くかかわるので，ここでは要素剛性マトリックスの形成法を考えてみよう．

速くする基本は，普段行われている数値積分をやめ，一点積分に基づいたような方法を取ることである．いわゆる低減積分法の応用である．低減積分法の問題は，境界や荷重条件により物理的に不都合なhourglassとよばれる特異変形モードが出てくることである．これをどのように制御するのか．これには3つの方法があり，Hallquist[3]のように単純に安定化マトリックスを人工粘性に相当するパラメーターで大きさを制御しながら足し合わす方法，Belytschko[4]のように混合法的な考え方を用いて射影ベクトルを形成して安定化マトリックスを作る方法，またわれわれのように単純な代数的な計算で積分を近似補正する方法[5]である．二次元問題では，QUAD 4（4節点四辺形要素）を用いると変位等が双一次多項式で近似されるので要素剛性を求めようとすれば，2×2の4点のGauss積分を施す必要がある．これが，以上の3つの方法を使えば，ほぼ，一点積分によるものと同等の計算量で特異モードを消しつつ要素剛性を計算できる．したがって計算速度が，ほぼ1/4になる．三次元問題では，HEXA 8（8節点6面体要素）を使うと，理想的にはほぼ1/8の計算量で要素剛性が求められるので，速度を問題にすれば，ずいぶん速くなるプログラムができる．精度をうんぬんすれば，文献5）で示したように，普通の数値積分で求めたものよりも解の精度が高い．したがって，特異モードを消す工夫をした“低減”積分法の方がメリットが大きいのではないか．ただ不注意に使うと，とんでもない答えを出すことがあるので，誰でも安心して使えるとは断言できない．“汎用”にするためには，もう一工夫要るように思える．

詳細はKoh[5]に譲るとして，ここでは平面問題用のQUAD 4について基本的な考え方を簡単に述べよう．QUAD 4の形状関数を展開して要素の形状および変位の近似を

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{x})s+(\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{x})t+(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x})st$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{y})s+(\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{y})t+(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x})st$$
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{u})s+(\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{u})t+(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{u})st$$
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{v})s+(\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{v})t+(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{v})st$$

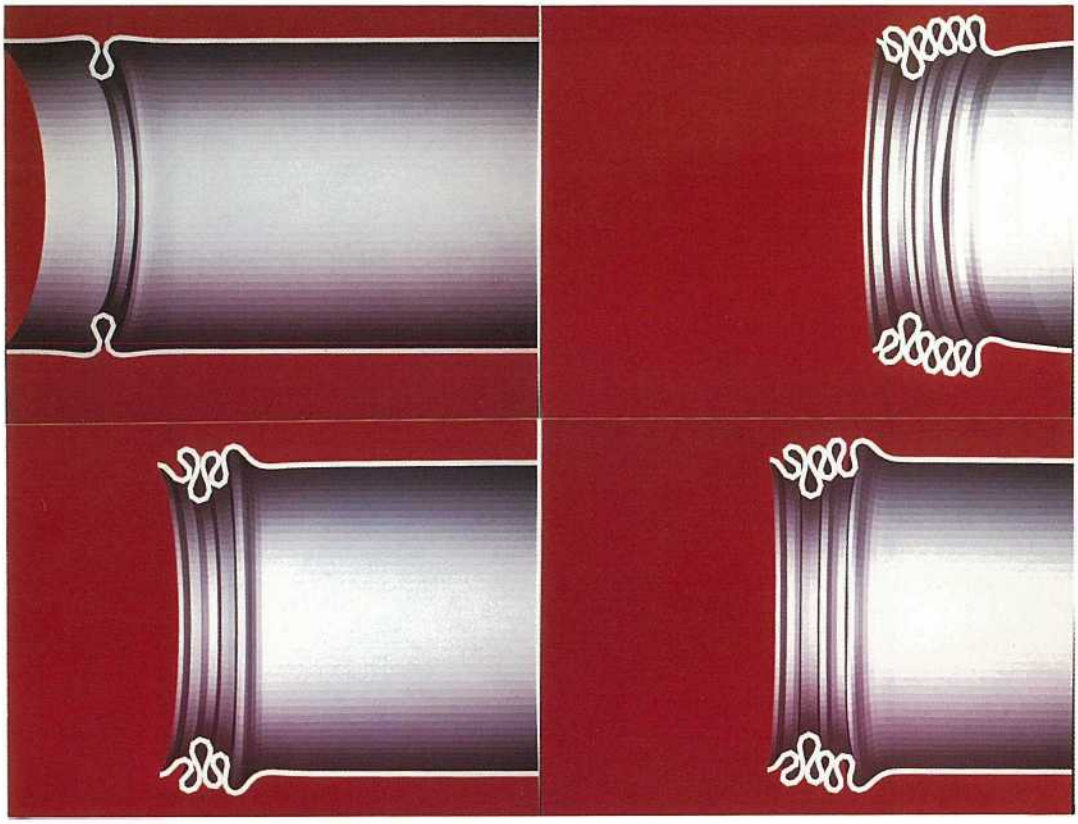
とする．ここで $\boldsymbol{a}^T=\frac{1}{4}\{1, 1, 1, 1\}$，$\boldsymbol{l}_s^T=\frac{1}{4}\{-1, 1, 1, -1\}$，$\boldsymbol{l}_t^T=\frac{1}{4}\{-1, -1, 1, 1\}$，$\boldsymbol{h}^T=\frac{1}{4}\{1, -1, 1, -1\}$，それに $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ は4つの角点，すなわち，節点での $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 座標，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 変位成分の値である．このようにすれば $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の関係式から s と t について線形部分だけについて解いて

$$\begin{Bmatrix} s \\ t \end{Bmatrix}=\frac{4}{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{y} & -\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{y} & \boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x})st \\ \boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{y})st \end{Bmatrix}$$

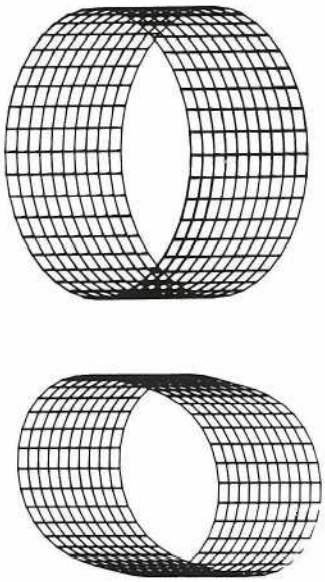
と求め，これを変位の展開式に代入すれば

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{b}_x\cdot\boldsymbol{u})x+(\boldsymbol{b}_y\cdot\boldsymbol{u})y+(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u})st$$

となる．$\boldsymbol{b}_x=\frac{4}{A}\{(\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{l}_s-(\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{l}_t\}$，$\boldsymbol{b}_y=\frac{4}{A}\{(\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{l}_s+(\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{l}_t\}$，$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{h}-(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}_x-(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{b}_y$，$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}_x-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{b}_y$ である．このように変位を展開するとひずみの定数部分が陽に $(\boldsymbol{b}_x\cdot\boldsymbol{u})$，$(\boldsymbol{b}_y\cdot\boldsymbol{u})$，$(\boldsymbol{b}_x\cdot\boldsymbol{v})$，$(\boldsymbol{b}_y\cdot\boldsymbol{v})$ で書くことができ，さらに，$(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u})st$ は双一次近似から生ずる“補正項”を形成することがわかる．Hallquist等の用

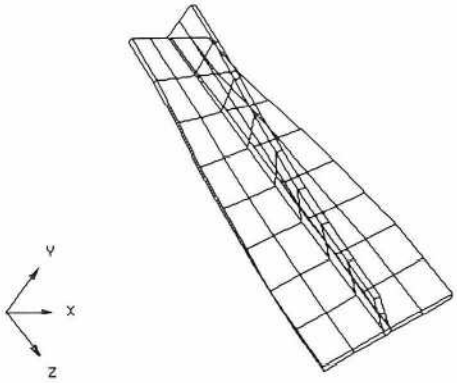


図—1　DYNA 3 D による円筒シェルの衝撃解析（D. Benson および J. Hallquist による）



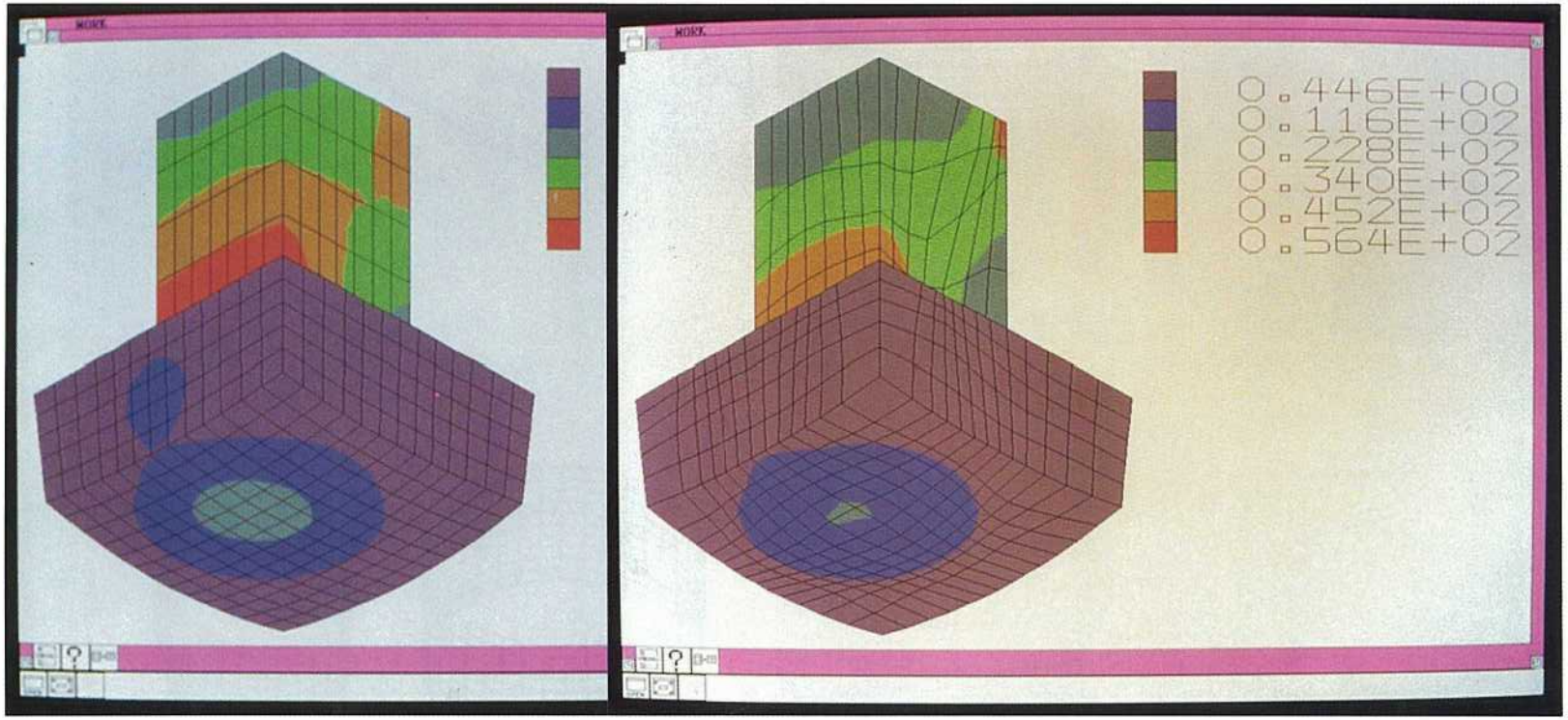
Thin Shell by 3D Elements with DRI (t/R=1/320 ; 10x10x2 Elements)

Displacement	3D Elements	Inextensible Theory
virtical	0.02606	0.02432
horizontal	0.02393	0.02236



Mode #	3D/DRI	Euler Beam	Plate/Shell
1	0.012166	0.012177	0.011251
2	0.014064	0.014467	0.015414
3	0.025479	0.026385	0.025875
4	0.037692		0.034681
5	0.065169		0.059845

図—2　三次元要素 HEXA 8 を使って，低減積分法および Hourglass 制御を用いてシェル要素を近似したもの（B. Koh および S. K. Lee による）



図—3　アダプティブ有限要素法の適用例（例題は摩擦を考慮した接触問題，T. Torigaki による）

いる特異モード制御法では，$\boldsymbol{g}$ を用いないで直接 $\boldsymbol{h}$ を使って安定補正マトリックスを求めている．この場合，要素が長方形から，形が壊れてしまうとその形の変化を捉えることができない．したがって，相当粗い制御法になる．Belytschko はこの点を解消するため混合法的に把握し $\boldsymbol{g}$ を求めている．その過程が多少煩雑であるため，上記のような単純な代数的な考えを用いたわけだ．このように展開した変位を使えば，ひずみ成分が

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{b}_x\cdot\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{b}_y\cdot\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{b}_y\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{b}_x\cdot\boldsymbol{v} \end{Bmatrix} + \frac{s}{J}\begin{Bmatrix} -(\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{y})(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}) \\ (\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}) \\ (\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u})-(\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{y})(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}) \end{Bmatrix} + \frac{t}{J}\begin{Bmatrix} (\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{y})(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}) \\ -(\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}) \\ -(\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{y})(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}) \end{Bmatrix}$$

と定数部分と“補正”の部分に分けられる．ここで J は $(s,\ t)$ と $(x,\ y)$ の座標変換のジャコビアンで，$J=\frac{A}{4}+\{(\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{l}_s\cdot\boldsymbol{y})(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x})\}s+\{(\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{y})(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{l}_t\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{y})\}t$ と書くことができる．もしひずみ成分が上記のように主要素の座標系 s と t について陽に表現されていると，積分はあらかじめ手計算で簡単に求まる．すなわち，数値積分をわざわざ使用する理由がなくなる．特に，ジャコビアン J を $A/4$ の定数で近似すると事情はさらに単純化され，いわゆる，一点 Gauss 積分法に準じたものになる．また，要素形状のアスペクト比が非常に異なる場合，たとえば s 方向の要素長さが t 方向に比べて大きくなった場合，s 方向に関してはひずみ成分の変化を無視するというような方向に依存する低減積分が可能になる．これは，QUAD 4 要素ではり要素を作る場合必要な手段となる．はりの軸方向に対してのひずみ成分の変化を落としてやれば，QUAD 4 要素で非常に精度の高い近似解を出すことが可能である．これは，HEXA 8 の三次元要素を用いて板要素や殻要素を近似的に作ることができることを意味する．実際，図—2 に示すように，三次元要素で板や殻を近似できる．

計算速度を問題にすればどうしても低次要素を取らざるを得ない．高次要素になれば上で述べたような手法は困難になるし，どうしても数値積分に準じてしまう．したがって要素剛性マトリックスを形成するプログラムには，重複した DO ループが生じてしまう．これは演算のベクトル化を考えると不都合である．それに四辺形要素に限ると，高次化したところで，別段，大きなメリットは生じない．低次要素を改良して精度を上げることが可能であれば，その簡単な構造を使ってベクトル化を考えたりする方が得策であるように思える．

3. なぜ精度を問題にするのか

有限要素法はあまりに過信されているのではないか．確かに，これまで解けそうもない構造解析問題をいとも簡単に解いてしまった．有限要素法を使えば，ほとんどの問題は解けてしまう．そのうえ，強力な汎用プログラムの出現や，解析をサポートするプレ・ポスト用のソフトウェアの一般化に従い，誰でもどこでも使えるという事情から，解析が日常化してしまった．このため，有限要素法の解析を熟考したり疑問視したりする傾向は非常に少なくなってしまった．本当に，これでいいのだろうか．とりわけ経験の少ない若い技術者にとって，過信の状態は危険である．有限要素法の研究やプログラム開発に従事したことのある経験者は解法の素晴らしさとともにその限界も十分認識している．このため解析結果を評価する際十分注意を払う．しかし，今のように有限要素法が日常化した段階では，解析結果を評価することなどそれほど注意深く行うことはないのではないか．要素が細かければ真の解に近づくのだといっては，不必要なほど細かい要素分割をし，それで十分，と思っているのではないか．そのうえ，ポスト用のソフトウェアは，見た目に美しいカラーの応力図などをアウトプットする．一見して，もっともらしく，それでいてきれいな表示であれば，実際の値を吟味する意志などほとんどそがれてしまう．

こうした危惧から解の精度評価，それを自動的に向上させてやるアダプティブ法が研究されるようになった．元々は有限要素分割の最適化を図るという課題から出発して[6]，Sewell の研究[7]を踏まえた Babuška と Rheinbldt[8] の研究がその始まりである．Babuška に至るまでは，解の精度評価はさほど問題にされなかったが，彼の着眼点は非常に的を得ていた．実際の有限要素解析がどの程度の信頼性をもっているか，具体的な数字を出して示すことは画期的であった．80 年代前半は，アダプティブ法の認識とその理論構築の時代である．70 年代後半における Babuška と Rheinbldt の研究が大きなインパクトを与え，1 つの形を成して工学者の間で認知されたのは 83 年のポルトガルでの国際会議であろう[9]．その後は，アダプティブ法をどのようにインプリメントするかであった．現在ではアダプティブ法による有限要素解析がプレ・プロセッサーの完備とともに CAE システムの中核を成す[10]ようになってきている．

解の精度評価は有限要素法の基礎論[11]が完成している現在では簡単である．数学的な厳密さを無視すれば有限要素法の近似誤差は，$a(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$ を

$$a(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=\int_\Omega \sum_{i,j,k,l=1}^{n} E_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})d\Omega$$

で定義される（平衡状態を与える）変位 $\boldsymbol{u}$ における任意の仮想変位 $\boldsymbol{v}$ によって生じる構造物の内部仮想仕事とすれば，任意の有限要素法の近似で作られる関数 $\boldsymbol{v}_h$ に対して成立する式

$$a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)=a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h)$$

から求まる．ここで，$\boldsymbol{u}$ は厳密解，$\boldsymbol{u}_h$ は有限要素解であり，$a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)$ は誤差が生じさすひずみエネルギーの2倍の値を意味する．この段階で Schwarz の不等式を用いると

$$\sqrt{a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)}\leq\sqrt{a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h,\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h)}$$

となるので，$\boldsymbol{v}_h$ を厳密解である変位 $\boldsymbol{u}$ の有限要素法による補間と考えれば，近似誤差は補間誤差で上から押えられることになる．したがって，この補間誤差を近似精度の評価と考えてもいいことになる．もし，補間誤差による押え込みが不十分であると考えれば，上の等式をさらに展開したのち，各要素上で発散定理を施し，平衡方程式と荷重条件を代入すると，有限要素解 $\boldsymbol{u}_h$ によって生じる残差

$$r_{hi}=-\sum_{j,k,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(E_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}_h))-f_i$$

および“境界”上で定義される応力ベクトル

$$t_{hi}=\sum_{j,k,l=1}^{n}E_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}_h)n_j$$

を用いて

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\ \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)=&\sum_{e=1}^{E}\int_{\Omega_e}\sum_{i=1}^{n}r_{hi}(u_i-v_{hi})d\Omega\\&+\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_{ti}}t_i(u_i-v_{hi})d\Gamma\\&+\sum_{e=1}^{E}\int_{\partial\Omega_e}(-t_{hi})(u_i-v_{hi})d\Gamma\end{aligned}$$

と書くことができる．f_i は物体力，t_i は荷重ベクトル，n_i は“境界”上にたてられる単位法線ベクトルの i 成分，Γ_{ti} は i 成分が非零となる荷重ベクトルが作用する境界部分，E は要素総数，Ω_e は各有限要素，$\partial\Omega_e$ はその境界を意味する．右辺の第2項，第3項を計算すると，各要素境界上における $\boldsymbol{u}_h$ によって生ずる応力ベクトルのジャンプ量および荷重条件の近似誤差と $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h$ の積になることがわかる．有限要素解 $\boldsymbol{u}_h$ によって生ずる応力ベクトルの境界線方向の成分は隣り合う要素の境界上では等しくなるので，ジャンプ量は零となる．したがって，実際には法線方向の成分のジャンプ量が誤差の大きさを左右する値になることがわかる．一方，要素内の残差 $\boldsymbol{r}_h$ も零となるとは限らないので，有限要素法の近似誤差は残差と応力ベクトルの法線成分のジャンプ量，および，$\boldsymbol{v}_h$ を $\boldsymbol{u}$ の補間と考えれば，補間誤差の積で表現されることになる．$\boldsymbol{v}_h$ は任意であるので，誤差評価法に多くの変化を持ち込むことが可能な点に注意して欲しい．$\boldsymbol{v}_h$ を上手に取れば，それだけ真の誤差評価に近づくことになる．

補間誤差に関しては，1970年の初期にすでにそのほとんどの研究が終わっている．Strang と Fix が彼らの著書[11]で簡潔にまとめてある．また，Ciarlet と Raviart[12] のこの分野における古典的論文で厳密な数学が展開されている．それにもかかわらず，実際に誤差評価のために使うことはできない．というのも，彼らの主眼点は収束のレートを調べるために補間誤差を求めたために，誤差の評価を上界から押えるという手法によっているので，どうやって求めたらいいのかわからない定数がでてくる．そのうえ，要素のひずみ具合いを考慮する項がないので，長方形要素とか直方体要素にしか適用できない．これでは，工学における使用には不十分である．QUAD 4 要素を考えると，主要素上で補間誤差を展開して

$$u-u_h=\frac{1}{2}\left\{(1-s^2)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+(1-t^2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}$$

が求まるので，$(s,\ t)$ と $(x,\ y)$ の座標変換式

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial s}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial t}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s}&\dfrac{\partial y}{\partial s}\\[2ex]\dfrac{\partial x}{\partial t}&\dfrac{\partial y}{\partial t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial t}\end{Bmatrix}$$

を用いて $\partial^2u/\partial s^2$ などの $(s,\ t)$ における微分項を $\partial^2u/\partial x^2$ などの物理座標系 $(x,\ y)$ に関する微分項に置換して補間誤差を求めればよい．問題点は，どのようにして $\partial^2u/\partial x^2$ などの厳密解に依存する項を有限要素解 u_h を用いて近似するかである．1つの解決策は，$\partial u_h/\partial x$ などが積分点で計算できるので，それを u_h と同じ形状関数で表現し，もう一度微分を取るというやり方である．当然，ここに誤差が生じるわけであるが，これまでの計算例から判断すると，かなり精度のよい値が求まることがわかる．

誤差評価が求まれば次はアダプティブ法である．誤差の大きさが各有限要素で求まるので，どこに誤差が集中しているか一目瞭然となる．したがって誤差の大きい部分の要素を誤差が小さくなるように手直しすればよい．この手直しの方法に，r 法，h 法，それに p 法の3つがある．r 法は要素総数を変えずに誤差の大きい部分に小さな要素が配置されるように節点を移動させてやる方法で，節点数の変化もない．h 法は誤差の大きい要素を規則的に細分化する方法で要素数も節点数も増加する．p 法は誤差の大きい要素の形状関数の次数を上げてやる方法で要素数は変化しないものの自由度数は増加する．それぞれの方法に一長一短があり，問題や解析環境に合わせて使い分けることが重要である．r 法と h 法は解析プログラムを改造する必要がないので便利である．p 法は解析プログラム自体を作る必要があるので，多少面倒になる．ただ p 法は，誤差評価を単純化する

のでメリットがある．図—3にアダプティブ法の適用例を示す．これは，アダプティブ用のプログラムOPTI-MESHを用いて計算されている．

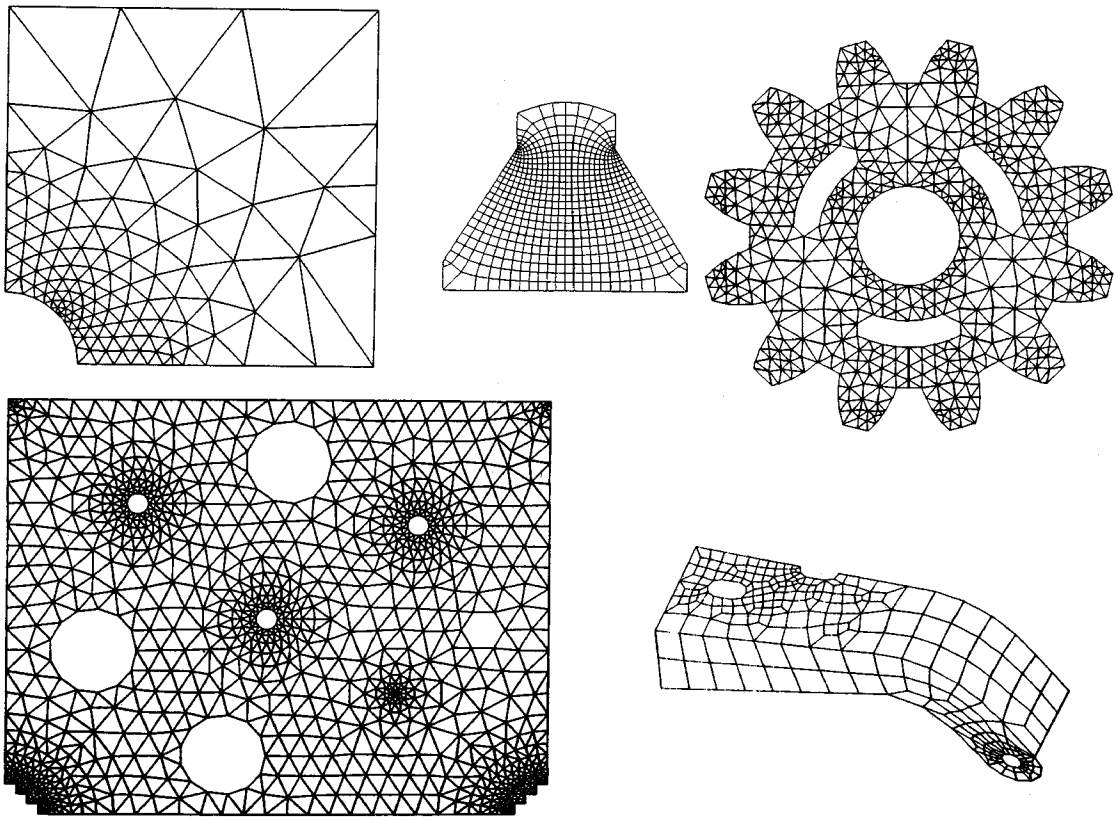
4. なぜメッシュにこだわるのか

有限要素法がここまで広範囲にわたって使用されるようになったのは，前にも述べたように，グラフィックス機能をふんだんに盛り込んだプレ・プロセッサーが出現したからである．複雑な構造物でも容易に有限要素分割ができるようになっている．さて，問題はこの自動分割機能である．どんな分割法があるのか．また，分割された要素はどんな特長をもつのか．これまでの有限要素法の発展で，この自動分割法に関する議論はどちらかというとマイナーなものであった．大多数の研究が有限要素の開発，非線形問題への適用，連立一次方程式の解法などの，いわゆる解析そのものに関するもので，自動分割法の理屈などはそれほど重要視されなかった．しかし，プレがここまで導入され，大抵の有限要素モデルが何らかの自動分割法にかかわっている現在では，メッシュにこだわる必要がある．これまで使用されている自動分割法は，

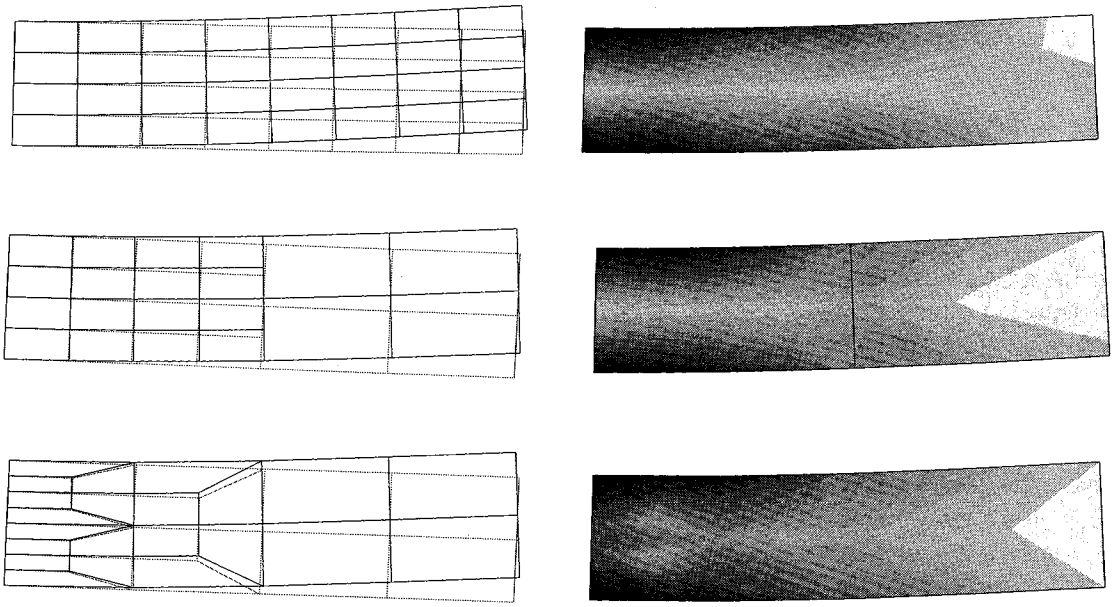
- 等角写像による方法[13]
- 微分方程式を解く方法[14),15]（楕円形，放物形，双曲形）
- ネットによる方法[16)~19]
- 形状関数による写像法[20]
- TRIQUAメッシュ法[21]

などである．等角写像法によるものの一般化として微分方程式を解いてメッシュを求める方法が導入された．写像という点を強調すれば，等角写像の一般化として形状関数による写像法が考えられる．現在，最も広く用いられているのはネット法によるもので種々な改良が施されている．またTRIQUAメッシュ法も，その“自動”ぶりの極端さから広く用いられている．図—4に，これらの手法で形成された有限要素分割図を示す．

さて，問題はクオリティである．確かに自動分割法なので手間がかからない．でも，本当にこれらの分割を使って大丈夫だろうか．というのも，技術者の“カン”で，構造物が対称で荷重条件もほぼ対称であれば分割図もほぼ対称になって欲しいし，また円形の穴があれば有限要素が穴の近傍では放射状になっていて欲しい．境界に切り込みや，急激な谷の部分があれば，その付近では応力



図—4　自動分割法の適用例（上，左から，等角写像法，微分方程式法，Shephardのネット法；下，左から，Loのネット法，TRIQUAMESH法）



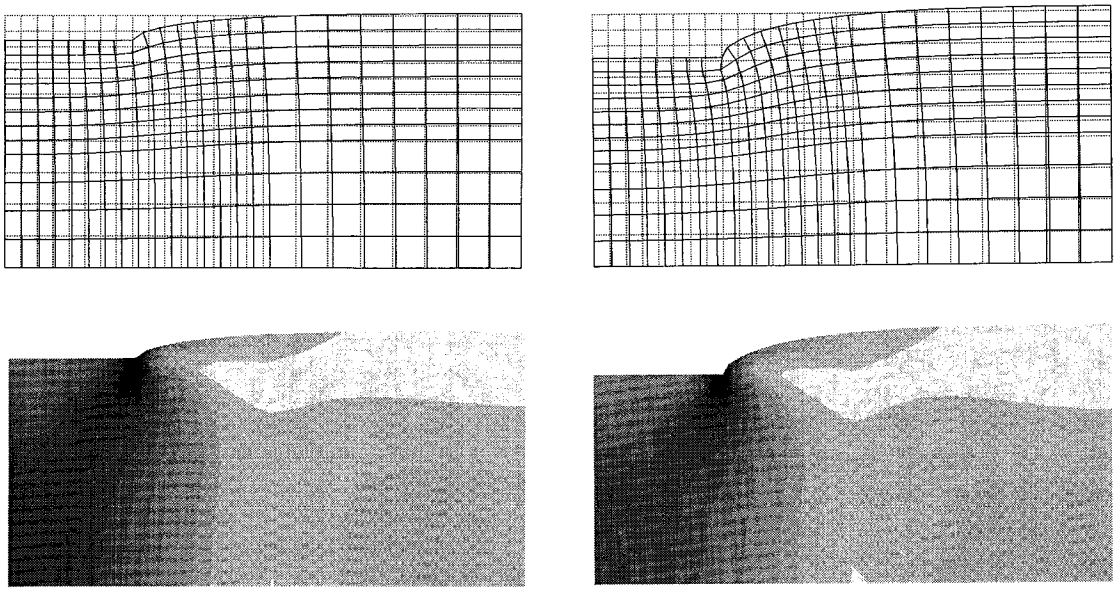
図—5 有限要素法近似解の分割に対する依存性（片持ちばりの曲げ問題，Y. Umezu による）

集中が生じやすいので細かいメッシュを作りたい．有限要素はできるかぎり直交性を保ったものにしたいという，種々な欲求がでてくる．したがって自動分割法も，たとえ，労力が余分に必要だとしても，こうしたユーザーの感覚に合うものであって欲しい．こうした要求を満たしてくれる自動分割法を含んだプレ・プロセッサーが十分なサポートのもとに安く手に入れることができれば有限要素法をかなり信頼のおけるものにすることができる．解の精度等が，どのような有限要素モデル，すなわち，メッシュ分割をするかに大きく依存してしまうので，柔軟な自動分割法を望むわけである．現在の動向をみると，競争の激しさゆえに，自動分割機能の向上が相当進み，ほとんどすべての市販されているプレ用のソフトウェアが上に述べたような欲求を満たしてくれる．とはいっても，メッシュが与える影響は大であることを認知して欲しい．図—5 に示す応力図をみれば依存性の強さがわかる．

5. なぜ任意性を望むのか

有限要素法解析で非線形問題はすでに日常化してしまっている．コンピュータの進展とともに，有限要素法やその対象となる力学の理論発展が有限要素法の出現により促進され，有限ひずみに基づく弾塑性解析が一般化し，変形の局所化などが Needleman ら[22]によって盛んに解析されたり，塑性加工のための解析[23]などが普通のことのようになってしまった．そのうえ Hallquist の DYNA によって構造物の衝撃解析が大変形を想定して行えるという環境になり，解の厳密な意味での精度を度外視すれば，大変形非線形問題はすでに研究者の領域から日常業務のそれになっている．こうした状況で，一体何を研究できるのか．すなわち，非線形解析のための有限要素法の研究が必要であるのか．有限要素法をまだ解かれていない非線形構造力学問題に適用したからといって，それは有限要素法の研究ではない．有限要素法の研究者にとって，種々な応用の中から有限要素法そのものに起因する困難点を見出し，それを有限要素法の研究として捉える必要がある．有限要素を使用して力学の研究を Needleman のように行うことは可能である．有限要素法を用いて塑性加工の研究もできるだろう．だが，こうしたことは，有限要素法の研究というよりは，計算力学（Computational Mechanics）の研究とでも分類した方が正しいのではないか．コンピュータの出現，それを使用しての計算法の確立によって，応用力学の意味あいが相当に変化した．70 年代以前，応用力学（Applied Mechanics）の研究といえば，Truesdell や Rivlin に代表される理論構築を主体にした連続体力学のそれを意味していたが，70 年代以降，有限要素法や他の近似解法の発展により実際に計算することにより力学を研究する計算力学へと移行している．

さて，有限要素法であるが，研究の 1 つの可能性は ALE（Arbitrary Lagrangian-Eulerian）表示であろう．大変形問題では，変形が局所化したり，応力集中する場所が移動したりするし，境界条件の設置が変形とともに変化したり，しなかったり，という線形問題ではとても



図—6　フラット・パンチの押し込み（Y. Umezu による）

みることのできないことが生じる．もし，力学をラグランジェ（Lagrange）表示すると，要素が物体の変形とともにひずむので，変形が局所化すれば，それに相当する要素のひずみが生じる．したがって，有限要素の形が崩れ，近似精度の維持を望めない．また，もし境界条件がオイラー（Euler）型で空間に固定されているものであれば，ラグランジェ表示に従った力学，有限要素解析を施すと境界条件の設置に不都合が生じる．こうした問題が起こる大変形問題を想定すると，物体点の運動と有限要素法の節点の運動を全く独立したものとして取り扱う必要がある．力学にそれほど規定されない，フリーダムが有限要素法には必要なのだ．言葉を換えれば，節点を任意に都合に合わせて動かしたい．この任意性を手に入れることができれば上記した問題を解決するだけでなく，もっとたくさんのことが可能になる．たとえば，アダプティブ法を中に組み込むこともできるし，設計の際必要な情報を好きな形で取り出す機能も節点とその位置を指定するだけで可能になる．

この ALE 表示の研究は流体力学の分野で最初に提案され[24]，有限要素法の分野では Donea[25]，Belytschko[26]，Haber[27] らによって固体力学問題で応用されている．基本的な考え方や ALE の歴史的な発展は，たとえば Ghosh[28] に詳しく述べられている．ALE 表示では，物体点 $\boldsymbol{X}$ に関する量 β が，$\boldsymbol{W}$ を有限要素メッシュの移動速度，$\boldsymbol{V}$ を物体点の速度として，

$$\left.\frac{\partial\beta}{\partial t}\right|_x=\left.\frac{\partial\beta}{\partial t}\right|_X+\sum_{k=1}^{n}(W_k-V_k)\frac{\partial\beta}{\partial x_k}$$

と書かれる．$*|_x$ は，有限要素メッシュに対しての量 $*$ を示している．この種の表示を使うと，確かに計算量が非常に多くなり効率の点では普通のラグランジェ表示によるものやオイラー表示によるものに比べて劣る．しかしながら，ALE にする部分は大抵の問題では領域の一部に限定されるので，想像するよりは，はるかに効率がよい．図—6 に，ALE の表示を使った計算例を示す．これは四角形の剛体板の押し込み問題である．境界条件を正確に考慮するために ALE を使っている．

6.　なぜ理屈に固執するのか

構造での最近の有限要素法を介在した発展分野に，三次元ロッドやシェルがある．大多数の人々が認識しているように，有限要素法の汎用プログラムに組み込まれているロッドやシェル要素は，力学理論としてのロッドやシェルとは，大幅に異なった基盤から形成されている．とりわけ，有限要素法でのシェルは，単純な工学的な議論に基づいて要素剛性を作っているので，非常に洗錬されたシェル理論からはほど遠い．こうした状況を踏まえて，たとえば，Simo[29),30)] は精力的にこのギャップを埋めるべく研究を進めている．理屈に沿った，そしてこれまでの有限要素法で築き上げてきた経験を織り込んだシェルにしようとする試みである．

なぜ，こうした研究が必要になったかは，たとえば，巨大宇宙構造物を設計する際，どうしても大きく剛体運動を伴いつつ大変形する軽量構造を想定しなければならないためである．剛体運動に加算されるのが微少変形に基づいたものであれば，正確な力学を形成できず，大変形を前提に理論を組み立て，定式化のあとに，微少変形

などの簡略化を図る必要がある．こうした場合，どうしても静力学的な状況を設定した簡略化した工学的シェル理論やロッド理論をもって，剛体運動を加算した動力学を形成するには無理がある．

7. おわりに

有限要素法の研究はすでにその峠を越したといわれる．実際，そうかもしれない．だが，本当に有限要素法は研究されてきたのだろうか．確かに，その応用は広範囲にわたっているし，非常に多くの解説書が出版されている．そのうえ，詳細なハンドブックが，内外[31]で発刊されている．大系があるのだから，すでに研究は終わっているともいえる．しかし，上で概説したように，有限要素法そのものの研究はその応用に比べ，さほど深くはなかった．応用の仕方が確立されたからといって研究が終わりとはいえないだろう．具体的なことは，少なくとも精度に関するかぎり，アダプティブ法が出現するまでは，全くわからなかったのだ．同じように，4節点要素や8節点要素だって，十分に理解されていたとは思われない．形状関数の導き方，要素剛性マトリックスの形成の仕方は理解されていても，要素のもつ特性についての詳細はみないし，補間にしても，単純に変位などの未知関数にだけであり，それがひずみや応力になると不明な部分がかなりある．有限要素法の詳細や具体的な事柄は，想像しているよりわかっていないことの方が多い．定性的なことは，十分に理解されているにもかかわらず高次要素は低次要素に比べて，どれだけ精度が高いのか．曲線・曲面が入った要素特性はどうなっているか．解が十分に滑らかでない場合に対するシェル要素はどれがいいのか．MSC-NASTRAN の QUAD 4 要素はどのようにして作られているのか．ABAQUS の非線形解法はどのようになっているのか．DYNA の接触問題に対するアルゴリズムは正しい接触圧や接触摩擦力を出せるのか．わかっているようでわかっていないことが，いまだに非常に多い．有限要素法が世に出てから30年以上もたっている．開発者達がいわゆる技術者の“カン”“経験”で理解していた事柄を正しく継承し発展させるには，これらを定量的に把握し，インテリジェンスをデジタル化しなければならない．

著者の狭量と浅才のため，他の多くの発展途上にある分野について，述べることができなかった．とりわけ，計算流体力学，境界要素法，一般化差分法，有限体積法などについて言及できなかった．

また，アメリカにおける有限要素法の研究動向は，たとえば，文献32）などに詳しい．

参考文献

1) Clough, R.W. : The Finite element Method in Structural Mechanics, Chapter 7, in Stress Analysis, Edited by O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister, John Wiley & Sons, London, pp. 85～119, 1965.
2) Proceedings of the First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, U.S.A., 1965.
3) Hallquist, J.O. : Theoretical Manual for DYNA 3 D, UCID-19401, Lawrence Livermore National Laboratory, Uuiversity of California, 1983.
4) Belytschko, T., Ong, J.S., Liu, W.K. and Kennedy, J.D. : Hourglass Control in Linear and Nonlinear Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 43, pp. 251～276, 1984.
5) Koh, B.C. and Kikuchi, N. : New Improved Hourglass Control for Bilinear and Trilinear Elements in Anisotropic Linear Elasticity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 65, pp. 1～46, 1987.
6) Shephard, M.S. ed. : Finite Element Grid Optimization, ASME Special Publication PVP-38, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1979.
7) Sewell, G. : An Adaptive Computer Program for the Solution of DIV$\{P(X, Y)\mathrm{Grad}\ U\}=F(X, Y, U)$ on a Polygonal Region, in The Mathematics of Finite Elements and Applications II, Ed. by J.R. Whiteman, MAFELAP 1975, Academic Press, 1976.
8) Babuska, I. and Rheinboldt, W.C. : Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations, SAIAM Journal of Numerical Analysis, 15, pp. 736～754, 1978.
9) Babuska, I. et al. ed. : Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, John Wiley & Sons, Chichester, 1986.
10) Shephard, M.S. : Adaptive Finite Element Analysis and CAD, in Reference 9, pp. 205～225.
11) Strang, G. and Fix, G.J. : An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, 1973.
12) Ciarlet, P.G. and Raviart, P.A. : General Lagrange and Hermite Interpolation in R^n with applications to Finite Element Methods, Arch. Rational Mech. Anal. 46, pp. 177～199, 1972.
13) Brown, P.R. and Hayhurst, D.R. : The Use of Schwarz-Christoffel Transformation in Mesh Generation for the Solution of Two-dimensional Problems, in Computers in Engineering 1982, Vol. 3, American Society of Mechanical Engineers, pp. 1～7, 1982.
14) Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A. and Mastin, C.W. : Numerical Grid Generation, North-Holland, New York, 1985.
15) Ghia, K.N. and Ghia, U. ed. : Advances in Grid Generation, ED-15, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1983.
16) Fukuda, J. and Suhara, J. : Automatic Mesh Generation for Finite Element Analysis, in Advance in Com-

putational Methods in Structural Mechanics and Design, Ed. by J.T. Oden and Y. Yamamoto, UAH Press, Huntsville, Alabama, U.S.A., 1972.

17) Cavendish, J.C. : Automatic Triangulation of Arbitrary Planer Domains for the Finite Element Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8, pp. 679～696, 1974.

18) Lo, S.H. : A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21, pp. 1403～1426, 1985.

19) Shephard, M.S. and Yerry, M.A. : An Approach to Automatic Finite Element Mesh Generation, in Computers in Engineering 1982, American Society of Mechanical Engineers, New York, pp. 21～28, 1982.

20) Zienkiewicz, O.C. and Phillips, D.V. : An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curved Surfaces by Isoparametric Coordinate, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3, pp. 519～528, 1971.

21) Slutier, M.L.C. and Hansen, D.L. : A general Purpose Automatic Mesh Generator for Shell and Solid Finite Elements, in Computers in Engineering 1982, American Society of Mechanical Engineers, New York, pp. 29～34, 1982.

22) Needleman, A. and Tvergaard, V. : Finite Element Analysis of Localization in Plasticity, in Finite Elements : Special Problems in Solid Mechanics V, ed. J.T. Oden and G.F. Carey, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, pp. 94～157, 1984.

23) Pittman, J.E.T. et al. ed. : Numerical Analysis of Forming Processes, John Wiley & Sons, Chichester, 1984.

24) Hirt, C.W., Amsden, A.A. and Cook, J.L. : An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for all Flow Speed, Journal of Computational Physics, 14, pp. 227～253, 1974.

25) Donea, J., Fasoli-Stella, P. and Giuliani, S. : Lagrangian and Eulerian Finite Element Techniques for Transient Fluid-Structure Interaction Problems, Tran 4th International Conference on SMiRT, Vol. B, pp. 1～12, 1977.

26) Kennedy, J.M. and Belytschko, T.B. : Theory and Application of a Finite Element Method for Arbitrary Lagrangian-Eulerian and Solids, Nuclear Engineering and Design, 68, pp. 129～146, 1981.

27) Haber, R.B. : A Mixed Eulerian-Lagrangian Displacement Model for Large Deformation Analysis in Solid Mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 43, pp. 277～292, 1984.

28) Ghosh, S. and Kikuchi, N. : Finite Element Formulation for the Simulation of Hot Sheet Metal Forming Processes, International Journal of Engineering Science, (in Press), 1988.

29) Simo, J.C. and Vu-Quoc, L. : On the Dynamics in Space of Rods Undergoing Large Motions—A Geometrically Exact Approach, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 66, pp. 125～161, 1988.

30) Simo, J.C. and Fox, D.D. : On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (submitted).

31) Kardestuncer, H. ed. : Finite Element Handbook, McGraw-Hill, New York, 1987.

32) Noor, A. ed. : Computational Mechanics : Advances and Trends, AMD-75, American Society of Mechanical Engineers, 1986.

(1988. 3. 16・受付)