【土木学会論文集 第391号／VI-8 1988年3月】

重機類の故障による工期遅延リスク管理の確率的アプローチ

PROBABILISTIC RISK MANAGEMENT OF DELAY DUE TO EQUIPMENT FAILURE

島崎敏一*・松本嘉司**・杉本光隆***
By Toshikazu SHIMAZAKI, Yoshiji MATSUMOTO and Mitutaka SUGIMOTO

This paper aims to develop the methodology to calculate the expected construction duration. In case of a construction works in a remote area where the supply of parts are difficult, the number of equipments is decided considering the possibility of time over-run due to equipment failure. That is, the number of equipments is increased from the most efficient capacity and number. Because, several, equipments make it possible to continue construction even if one equipment is failed, and the parts of that can be used as the source of parts when the second equipment is failed. This paper analyses these situation and shows following conclusions: (1) Serial parallel system represents this situation, (2) An equation is shown to calculate the probability of some number of equipments are failed at time t, (3) An equation is shown to calculate the expected capacity and the expected duration.

Keywords: *risk management, serial parallel system, equipment failure*

1. はじめに

海外工事，特に開発途上国における工事では，重機類の現地調達，修理などは困難であり，日本や第三国などから持ち込むことが多い．このとき，重機類の故障により工期遅延が生じる可能性を考慮して，その施工能力の決定にあたっては，工事規模からみた最適性という見地よりもむしろ施工能力を小さく抑えて，複数の重機を持っていくということが行われる．複数の重機を持ち込むことにより，故障した場合でもある程度の施工能力が確保でき，さらには，部品の供給源としても使用できるからである．

こうした考え方は，実務的には，広く採用されているが，その方法は，定性的なものが多く，定量的な解析はほとんど行われていない．このような不確実性を考慮した決定法の重要性は，Carr ら[1]によっても指摘されている．信頼性理論の分野では，このような問題の解析も行われているが，その多くは，直列システムにおける最適修理[2]や，修理可能システムの信頼性の問題[3]であり上述のような状況に適用できるようなものはない．本論文は，複数・同一機種の重機類を使用した場合の，施工システム全体の施工能力（以下，総施工能力という）を確率的に求める方法を示すものである．

* 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科
（〒113 文京区本郷 7-3-1）
** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科（同上）
*** 正会員 東京大学助手 工学部土木工学科（同上）

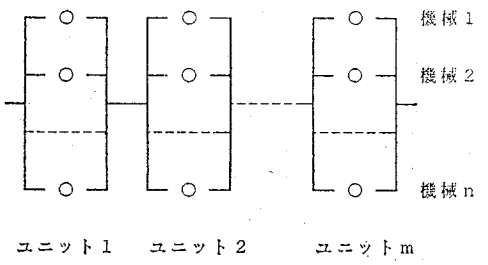
2. モデル

(1) 重機システムのモデル化とその仮定

ここでは，ブルドーザーなどある1種類の重機を考える．バックホーとダンプカーというように複数種類の重機によって構成されている施工システムの場合には，各重機が直列につながっているシステムを考えればその拡張は容易である．

重機は，m 個のユニットが直列につながって構成されているとする．したがって，どのユニットが故障しても重機は故障状態となる．また，各ユニットは，他の重機と完全に互換性があるとする．すなわち，2台目の重機が故障したとして，その故障ユニットが1台目の故障ユニットと異なれば，そのユニットを交換することによりただちに故障は修理できるとする．すると，重機が n 台あるとすれば，m 個のユニットから構成される n 台の重機による施工システムは，図—1 のような，直並列システムで表現できる．

施工システム全体の施工能力は，稼働可能な重機の台数に比例するとすれば，各ユニットの稼働可能ユニット



図—1　直並列システム

数のうち最小のものに比例することになる．

ここで，故障時間分布関数も修理時間分布関数も指数分布であると仮定する．これは，故障率を時間によらず一定としたものであり，偶発故障期には広くみられ，また，非常に多くの直列の構成要素からなる機器の場合にも妥当である[4]．修理率が一定ということについては，必ずしも確かめられていないが，解析的な解を求めるためにこのように仮定した．ただし，前述のように，故障ユニットの代替品があれば，修理はただちにできると仮定している．また，時間と施工能力については，当初の工期と全体の施工量で正規化して表現することにする．

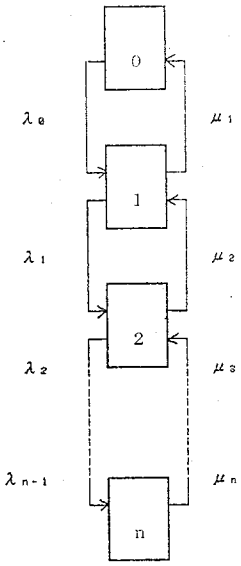
（2）　1ユニットで構成されている場合の稼働台数の確率の時間変化

まずはじめに，1つのユニットのみで構成されている場合，すなわち，**図—1** でいえば，並列部分のみからなる場合を考える．

λ を故障率，μ を修理率として，故障時間分布関数 $f(t)$，修理時間分布関数 $g(t)$ とも次式で示される指数分布としているので，

$$f(t)=\lambda\exp(-\lambda t) \quad \cdots\cdots(1)$$

$$g(t)=\mu\exp(-\mu t) \quad \cdots\cdots(2)$$



図—2　状態推移図

これは，マルコフ過程で表現できる[5]．なお，λ は，単位時間当たりの平均故障回数を表わし，μ は，単位時間当たりの修理可能回数を示す．故障数 i を状態と定義すれば，その状態推移図は**図—2** のようになる．ここで，推移確率 λ_i は，状態 i から $i+1$ へ推移する確率であり，1つのユニットの故障率を λ として，状態によらず一定であるとすれば，重機の台数を n として $(n-i)$ 台のどれかが故障するということであるから，

$$\lambda_i=(n-i)\lambda \quad \cdots\cdots(3)$$

となる．また，推移確率 μ_i については，状態 i から $i-1$ へ推移する確率であり，同様に考えて，

$$\mu_i=i\mu \quad \cdots\cdots(4)$$

となる．

この推移図を表わす推移マトリックスは，次のようになる．

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_0 & \lambda_0 & & & 0 \\ \mu_1 & 1-\mu_1-\lambda_1 & \lambda_1 & & \\ & \cdots\cdots & & & \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & & & \mu_n & 1-\mu_n \end{bmatrix}$$

時刻 t で，状態 i にいる確率を $p_i(t)$ とし，微小時間 dt の間における推移を考えれば，

$$\begin{aligned} p_i(t+dt)=p_i(t)\ &(1-\mu_i dt-\lambda_i dt) \\ &+p_{i-1}(t)\lambda_{i-1}dt \\ &+p_{i+1}(t)\cdot\mu_{i+1}dt \quad \cdots\cdots(5) \end{aligned}$$

となる．これを整理して，$dt\to 0$ として，$i=0, n$ の場合を別に考えれば，

$$p_0'(t)=-\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t) \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\begin{aligned} p_i'(t)=&\lambda_{i-1}p_{i-1}(t)-(\mu_i+\lambda_i)p_i(t) \\ &+\mu_{i+1}p_{i+1}(t) \quad \cdots\cdots(7) \end{aligned}$$

$$p_n'(t)=-\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)+\mu_n p_n(t) \quad \cdots\cdots(8)$$

となる．ただし，$'$ は時間に関する微分を表わす．

$p_i(t)$ のラプラス変換を $p_i(s)$ として，式 (6)～(8) をラプラス変換すれば，初期状態において $p_0(0)=1$，$p_i(0)=0$ $(i\neq 0)$ を考慮して，次の式 (9)～(11) のようになる．

$$(\lambda_0+s)p_0(s)-\mu_1 p_1(s)=1 \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\begin{aligned} &-\lambda_{i-1}p_{i-1}(s)+(\lambda_i+\mu_i+s)p_i(s) \\ &\qquad -\mu_{i+1}p_{i+1}(s)=0 \quad \cdots\cdots(10) \end{aligned}$$

$$-\lambda_{n-1}p_{n-1}(s)+(\mu_n+s)p_n(s)=0 \quad \cdots\cdots(11)$$

ここで，$A(s)$，$p(s)$，E を次のようにおけば，

$$A(s)=\begin{bmatrix} \lambda_0+s & -\mu_1 & & 0 \\ -\lambda_0 & \lambda_1+\mu_1+s & -\mu_2 & \\ & \cdots\cdots & & \\ & & \cdots\cdots & \\ 0 & & -\lambda_{n-1} & \mu_n+s \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(12)$$

$$p(s)=\begin{bmatrix} p_0(s) \\ p_1(s) \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ p_n(s) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(13)$$

$$E=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(14)$$

式 (9)～(11) は，

$$A(s)p(s)=E \cdots\cdots(15)$$

とかける．$A_i(s)$ を $A(s)$ の第 $i+1$ カラムを E で置き換えたマトリックスとすれば，クラメルの公式により，

$$p_i(s)=\frac{\det|A_i(s)|}{\det|A(s)|} \cdots\cdots(16)$$

となる．ここで，$\det|A(s)|$ は，マトリックス $A(s)$ の行列式の値を示す．式 (16) の右辺を部分分数分解して，

$$p_i(s)=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{a_{ij}}{s+e_j} \cdots\cdots(17)$$

となるとする．これをラプラス逆変換すれば，

$$p_i(t)=\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}\exp(-e_jt) \cdots\cdots(18)$$

となり，時刻 t において状態 i に存在している確率が求められる．

（3） 複数ユニットの場合への拡張

施工システムが直列の m 種類のユニットから構成される n 台の重機で構成されているとする．このとき，全体システムとして i 台の重機が故障している確率を求める必要がある．$(n-i)$ 台の重機が稼働している状態では，各種類のユニットにおける稼働可能ユニット数の最大値が $(n-i)$ という状態であり，ある1つの種類のユニットが i 個故障しており，残りのユニットは，故障数が i 以下である状態となる．

各種類のユニットの故障率，修理率は異なるとして，先に求めた，時刻 t で状態 i にいる確率 $p_i(t)$ を各ユニットの種類ごとに求めることにする．第 j 種類のユニットが時刻 t で状態 i にいる確率を $p_{ij}(t)$ で表わす．すると，全体で $(n-i)$ 台の重機が稼働している確率は，各種類のユニットの故障，修理の確率が独立であるとして，どの種類のユニットも故障数が i 以下である確率から，どの種類のユニットも故障数が $i-1$ 以下である確率を引けば求められる．したがって，全体システムで，時刻 t において $(n-i)$ 台の重機が稼働している確率 $P_i(t)$ は，

$$P_i(t)=\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{i}p_{kj}(t)\right)-\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{i-1}p_{kj}(t)\right) \cdots\cdots(19)$$

となる．ただし，$i=0$ の場合は，

$$P_0(t)=\prod_{j=1}^{m}p_{0j}(t) \cdots\cdots(20)$$

となる．

（4） 総施工能力と工期の期待値

総施工能力は稼働重機台数に比例するとしているので

$$C_i(t)=(n-i)\alpha \cdots\cdots(21)$$

となる．ここで，$C_i(t)$ は時刻 t において i 台故障しているときの総施工能力，α は，1台当たりの施工能力である．すると，総施工能力の期待値は，故障台数が0から n のときの各確率をかけて和をとればよいから，

$$C(t)=\sum_{i=0}^{n}(n-i)\alpha P_i(t) \cdots\cdots(22)$$

となる．ここで，$C(t)$ は，時刻 t における総施工能力の期待値である．工期の期待値を T とすれば，T は，

$$\int_0^T C(t)dt=1 \cdots\cdots(23)$$

を満たすようなものとなる．

3. 計算のアルゴリズム

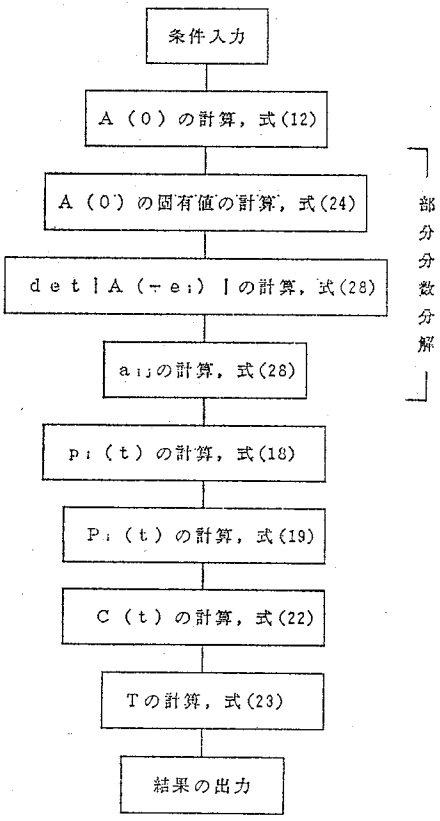
（1） 計算のフローチャート

このモデルの入力データは，重機の台数 n，ユニットの種類数 m，各種類のユニットの故障率 λ_j，修理率 μ_j，1台の重機の施工能力 α であり，出力は，期待工期 T である．

その計算の流れは，**図—3** のフローチャートに示すとおりである．このうち，部分分数分解以外については，特別のアルゴリズムは，不要であるので，部分分数分解について以下に述べる．

（2） 部分分数分解のアルゴリズム

式 (16) の右辺を部分分数分解するためには，まず，その右辺の分母を s の1次式の積に因数分解する必要がある．これは，式 (12) の $A(s)$ において，



図—3 計算のフローチャート

$$\det|A(s)|=0 \cdots\cdots (24)$$

を満たす s を $n+1$ 個求めることに相当する．マトリックス $A(s)$ をみればわかるように，これは，$s=0$ とおいた $A(0)$ の固有値に－1を掛けたものに等しい．ここで，この固有値を e_i とすれば，

$$\det|A(s)|=\prod_{i=0}^{n}(s+e_i) \cdots\cdots (25)$$

となる．式（16）と（17）を等置して，右辺を通分すると次のようになる．

$$\frac{\det|A_i(s)|}{\det\ A(s)|}=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{a_{ij}}{s+e_j}$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}\prod_{k=1}^{n+1}(s+e_k)/(s+e_j)}{\prod_{k=1}^{n+1}(s+e_k)} \cdots\cdots (26)$$

式（25）を考慮して，これを変形すると，

$$\det|A_i(s)|=\sum_{j=1}^{n+1}a_{ij}\frac{\prod_{k=1}^{n+1}(s+e_k)}{s+e_j} \cdots\cdots (27)$$

となる．式（27）で s に $-e_j$ を代入すれば，右辺の積の部分には1つの項以外は，$(s+e_j)$ の項が含まれているので，a_{ij} は1つだけ残り，次のように求められる．

$$a_{ij}=\frac{\det|A_i(-e_j)|}{\left(\prod_{k=1}^{n+1}(-e_j+e_k)\right)/(-e_j+e_j)} \cdots\cdots (28)$$

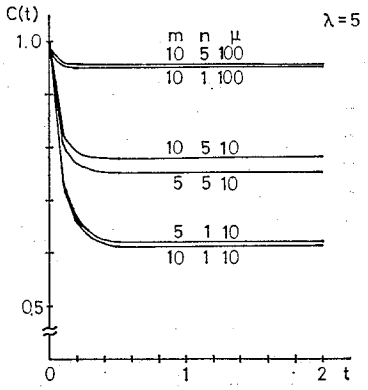
なお，式（28）の右辺の分母の（$-e_j+e_j$）は，形式的にこのように表示しているのであり，実際には0で割ることはない．

4. モデルの計算例

（1） 総施工能力の期待値の時間変化

総施工能力の期待値が時間とともにどのように変化するかをみるために，例としてユニットの種類数 $m=5$, 10，重機台数 $n=1, 5$，故障率 $\lambda=5$，修理率 $\mu=10, 100$ の場合のいくつかの組合せについてプロットしたのが図—4 である．

ここで，時間については，当初の工期で正規化していることを考慮すれば，たとえば，約3年の工期（1000日）の場合を考えれば，$\lambda=5$ とは，1000日で5回の故障が起きることを，逆にいえば，約半年（200日）に1回程度の故障が起きることを意味している．同様に $\mu=10$ とは，平均100日（約3か月）で修理ができるということであり，部品の調達を船で行うことにほぼ相当している．また，$\mu=100$ とは，平均10日で修理できるということであり航空機による部品調達に相当する．なお，故障率 λ については，重機としての故障を考えている．それを構成するユニットの故障率については，直列システムの故障率は各種類のユニットの故障率を λ_i，機械としての故障率を λ とすれば，次式（29）により，与えられる．



図—4　総施工能力の期待値の時間変化

$$\lambda=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \cdots\cdots (29)$$

図の計算にあたっては，各種類のユニットの故障率が等しいと仮定して，

$$\lambda_i=\lambda/m \cdots\cdots (30)$$

で与えている．また，重機1台当たりの施工能力 α については，全体の施工量で正規化しているので，故障なしで施工できたときに単位時間で終了するような値として

$$\alpha=1/n \cdots\cdots (31)$$

で与えている．

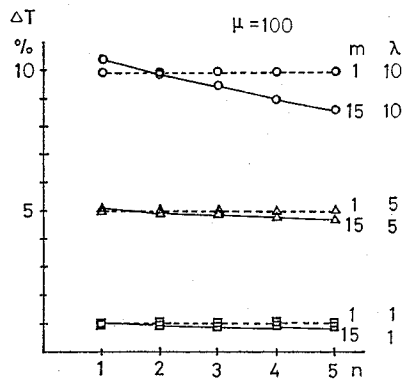
図—4 によれば，総施工能力は，あるとき以降ほぼ一定となる．式の展開を考慮すれば，総施工能力が，一定となる時期は，式（18），（28）で表わされるようにマトリックス $A(0)$ の固有値によって決まる．この固有値に影響を与える要素は，故障率 λ，修理率 μ，重機の台数 n であるが，計算結果によれば n にはほとんど影響されず λ と μ によって決まると考えられる．

また，一定となったときの総施工能力については，λ, μ, n，ユニットの種類数 m によって決まるが，計算結果によれば，m の影響は小さい．

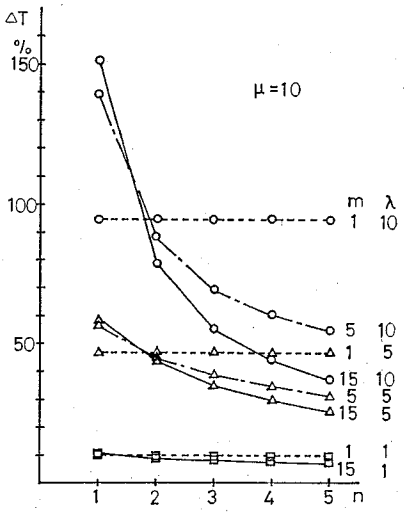
（2） 期待工期への台数の影響

1台当たりの施工能力を小さくして，複数の重機を使用するときの工期への影響をみるために，故障率 $\lambda=1$, 5, 10，修理率 $\mu=10, 100$，ユニットの種類数 $m=1, 5, 15$，重機台数 $n=1\sim5$ の場合について，期待工期の増加率 ΔT（期待工期/当初工期－1）を示したものが，図—5，図—6 である．

図—6 によれば，増加率が大きい場合，すなわち，故障率が大きく修理率が小さいような場合には，n の小さい部分では，増加率は n の増加とともに急激に減少する．しかし，図—5 によれば，増加率自体がそれほど大きくない場合には，n の増加による増加率の減少は線形に近くその効果は，顕著でない．



図—5 期待工期の増加率



図—6 期待工期の増加率

（3） 期待工期へのユニットの種類数の影響

重機を構成するユニットの種類数 m の影響を図—**5**, 図—**6** でみる．これによれば，単一ユニットでできている重機の場合，工期の増加率は台数 n によらず一定となる．また，いずれの場合も，$n=1$ では，m が大きいほど増加率 ΔT は大きい．m は，重機の複雑さの程度，あるいは，故障しやすい部品数を表わすと考えられ，通常は m はそれほど小さくないと考えられる．したがって，ふつうは，複数の重機を持ち込むことが有効となる．

（4） 期待工期への修理率の影響

一般的にいえば，工期の期待値に最大の影響を与えるのは，故障率 λ と修理率 μ であるが，なかでも，μ の影響が大きい．さらに，λ については，施工者がコントロールするのは，困難であるので，修理率 μ について検討する．

図によれば，μ が大きい場合には，すなわちすぐに修理ができるときには，μ が小さい場合に比べて，ユニットの種類数，台数の影響とも小さい．μ が小さい場合には，台数の影響は大きく，特に n が小さい部分では，急激に期待工期が減少する．すなわち，部品の供給に長時間を要する場合には，複数の重機を持っていくのは特に有効となる．

（5） ま と め

以上，各パラメーターの期待工期への影響をみた．開発途上国での工事で標準的と考えられる修理率が小さい場合には，一般論としていえば，故障が少ない機械を複数持ち込むのがよく，これは，複雑な重機の場合に特にいえる．

5. 結論と今後の課題

重機類による施工システムの構築にあたって，その施工能力と台数の決定が必要になる．本論文では，これを確率論的に検討し，以下の結論を得た．

（**1**） 部品の代替性がある重機による施工システムは，直並列システムとして表現できる．

（**2**） 故障台数が i である確率は，式 (19) で示される．

（**3**） 総施工能力の期待値は式 (22)，工期の期待値は式 (23) で表現できる．

（**4**） 修理率が小さく，複雑な重機の場合には，故障率の小さい重機を複数持っていくのがよい．

今後の課題としては，次の点がある．

（1） 故障時間分布関数は，指数分布としてマルコフ過程とすることに問題はないが，修理については，必ずしも適切であるとはいえない．しかし，指数分布以外では，解析的な解を得るのは困難であるので，シミュレーションなどの方法で検討する必要がある．

（2） 故障率 λ, 修理率 μ, ユニットの種類数 m が与えられているとして，最適な重機台数の決定にあたっては，コストとの関係を考える必要がある．このためには，工期遅延コスト，重機の施工能力とコストの関係，部品調達コストなどを考慮した解析をする必要がある．

参 考 文 献

1) Carr, R.I. and Maloney, W.F. : Basic Research Needs in Construction Engineering, ASCE, CE & M, Vol. 109, No. 2, pp. 181～189, 1983.
2) Smith, D.R. : Optimal Repair of a Series System, Operations Research, Vol. 26, No. 4, pp. 653～662, July～August 1978.
3) Brown, M. : On the Reliability of Repairable Systems, Operations Research, Vol. 32, No. 3, pp. 607～615, May～June 1984.
4) Drenik, R.F. : The failure law of complex equipment, J. Soc. Industrial Applied Mathematics, Vol. 8, pp. 680～689, 1960.
5) 三根 久・河合 一：信頼性・保全性の数理，朝倉書店，p. 146, 1982.

(1987.7.13・受付)