

# 鉛直曲率を有する任意断面形開水路流れ

准員 井田 至 春\*

要旨 筆者は先に矩形断面を前提として鉛直曲率を有する開水路流れを議論したが<sup>1)</sup>、本論文はこれを拡張して鉛直曲率を有する任意断面形開水路流れの一般的取扱いを組織的に述べる。なおこれまで曲率が上に凸な場合と下に凸な場合を分けて  $D$  項<sup>1), 2)</sup> を論じたが、ここでは曲率に符号を考慮して、これを統一している。

## 1. ま え が き

鉛直曲率を有する矩形断面開水路流れの運動方程式は、筆者が既に述べた通り一般に

$$\frac{dH}{dx} + \alpha \frac{d}{dx} \left( \frac{V^2}{2g} \right) (D) + \frac{n^2 V^2}{R^{2m}} = 0$$

ここに

$$(D) = \begin{cases} \text{曲率が上に凸} & \left\{ \left( \frac{1}{\log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}} \right) \left( \frac{d}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2 \\ \text{曲率が下に凸} & \left\{ \left( \frac{1}{\log \frac{\rho_0}{\rho_0 - d}} \right) \left( \frac{d}{\rho_0 - d} \right) \right\}^2 \end{cases}$$

で表わされるが、水路断面が任意の形の場合は上式の  $D$  項の内容が変わるからこれを適用できない。よつて、任意の断面形に適用できる  $D$  項の一般的表現が必要となる。

## 2. 一般式の誘導

鉛直曲率を有する開水路の任意流線に Lauffer<sup>3)</sup> の方法を適用して得られる流れに垂直な方向の平恒の式は

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = Mg \cos i \mp \frac{M a^2}{\rho} \dots \dots \dots (1)$$

ここに

- { - 曲率が上に凸の場合
- { + 曲率が下に凸の場合

$p$  = 水圧,  $M$  = 水の密度,  $i$  = 流線の勾配 (角度),  $\rho$  = 流線の曲率半径,  $v$  = 流速,  $\zeta$  = 水面からその流線までの距離

で表わされる。また同じ流線に対して Bernoulli の式を適用すれば

$$\frac{1}{Mg} \frac{\partial p}{\partial \zeta} - \cos i + \frac{v}{g} \frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

が成立する。(1), (2) 両式より,  $\partial p / \partial \zeta$  を消去すれば次式が得られる。

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} \mp \frac{v}{\rho} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

ここで  $\rho$  に符号を定義し,

- 曲率が上に凸の場合  $\dots \dots \dots \rho > 0$  }
- 曲率が下に凸の場合  $\dots \dots \dots \rho < 0$  }

とすれば, (3) 式は曲率の方向に関係なく次の単一式になる。

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{v}{\rho_0} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

次に水路床の曲率半径を  $\rho_0$ , 水深を  $d$  とすれば, 任意の流線の曲率半径は 図-1 よりその方向にかかわらず,

$$\rho = \rho_0 + d - \zeta \dots \dots \dots (5)$$

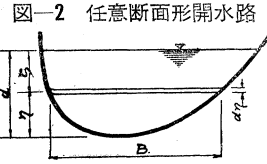
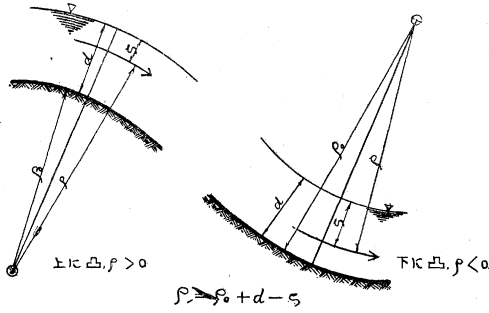
で表わされる。(5) 式を (4) 式に代入して積分すれば, 次式が求められる。

$$v = \frac{c}{\rho_0 + d - \zeta} = \frac{c}{\rho_0 + \eta} \dots \dots \dots (6)$$

ここに  $c$  = 積分常数,  $\eta = d - \zeta$  = 水路床から任意流線までの距離

\* 東北地建, 鳴子工事々務所

図-1 鉛直曲線を有する流水



以上の過程は矩形断面に対して述べた場合と全く同様である。次に、連続の関係から、任意断面形に対しては図-2 より次式が成立する。

$$\int_0^d v \cdot B \cdot d \eta = Q \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $B$  = 水路床より  $\eta$  なる位置の断面幅、 $Q$  = 総流量

(6) 式を (7) 式に代入すれば、積分常数  $C$  は次の様に求められる。

$$C = \frac{Q}{\int_0^d \frac{Bd \eta}{\rho_0 + \eta}} = \frac{V \int_0^d Bd \eta}{I(d)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $V$  = 断面平均流速、 $I(d) = \int_0^d \frac{Bd \eta}{\rho_0 + \eta}$

(8) 式を (6) 式に代入すれば、一般に鉛直曲率を有する任意断面形開水路流れの流速分布は次の様に与えられる。

$$v = \frac{V}{\rho_0 + \eta} \int_0^d \frac{Bd \eta}{I(d)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

(9) 式を (1) 式に代入すれば

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = Mg \cos i - \frac{M}{(\rho_0 + \eta)^3} \left\{ \frac{\int_0^d Bd \eta}{I(d)} \right\}^2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

となり、これを水面、即ち  $\eta = d$  において  $p = 0$  なる開水路境界条件をもつて解けば、鉛直曲率を有する任意断面形開水路流れの水圧分布は次の様に求められる。

$$p = w \cos i (d - \eta) - \frac{wV^2}{2g} \left\{ \frac{\int_0^d Bd \eta}{I(d)} \right\}^2 \left\{ \frac{1}{(\rho_0 + \eta)^2} - \frac{1}{(\rho_0 + d)^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $w$  = 水の単位容積重量

(9)、(11) 両式より、任意流線のもつ比エネルギーは

$$E = H_0 + d \cos i + \frac{V^2}{2g} \left\{ \left( \frac{\int_0^d Bd \eta}{I(d)} \right) \left( \frac{1}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

(ここに、 $H_0$  = 水路床の基準水平面よりの高さ)

で表わされ、その断面を通過するあらゆる流線に対して全く同一の表現が求められる。よつて、鉛直曲率を有する任意断面形開水路運動方程式は次の様に与えられる。(ただし Manning の摩擦損失形式を用いるものとする。)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} (H_0 + d \cos i) + \frac{d}{dx} \left( \frac{V^2}{2g} \right) \left\{ \left( \frac{\int_0^d Bd \eta}{I(d)} \right) \left( \frac{1}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2 + \frac{n^2 V^2}{R^{2m}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

または

$$\frac{dH}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{V^2}{2g} \right) (D) + \frac{n^2 V^2}{R^{2m}}$$

ここに、 $R$  = 断面の径深、 $n$  = Manning の粗度係数、 $x$  = 水路床に沿つて測つた距離

よつて、鉛直曲率を有する任意断面形開水路流れのD項の一般的表現として次式が求められる。

$$D = \left\{ \left( \frac{\int_0^d B d \eta}{I(d)} \right) \left( \frac{1}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2 \dots\dots\dots (14)$$

ここに、  
 曲率が上に凸  $\rho_0 > 0$   
 曲率が下に凸  $\rho_0 < 0$

(14)式において、 $\rho_0 \rightarrow \infty$  とすれば  $\lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} D = 1$  となり、直線開水路の場合は従来の開水路運動方程式に一致する。また(14)式の表現を用いれば(9)及び(11)式の流速と圧力の分布は次の様に表わす事ができる。

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{D} \frac{\rho_0 + d}{\rho_0 + \eta} V \\ p &= w \left[ \cos i (d - \eta) - \frac{V^2}{2g} \left\{ \left( \frac{\rho_0 + d}{\rho_0 + \eta} \right)^2 - 1 \right\} D \right] \\ &= w \left[ \cos i (d - \eta) - \frac{V^2}{2g} \left\{ \left( \frac{v}{V} \right)^2 - D \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

また、開水路水面形解折に用いられる断面特性函数<sup>1),2),5)</sup>は(13)式より

$$\left. \begin{aligned} \phi &= H + \frac{V^2}{2g} (D) + \frac{dx \phi}{2} \frac{n^2 V^2}{R^{2m}} \\ \psi &= H + \frac{V^2}{2g} (D) - \frac{dx \psi}{2} \frac{n^2 V^2}{R^{2m}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

で表わされ、形式的に先に述べた矩形断面の場合<sup>1)</sup>と一致する。

3. 限界水深

(16)式の摩擦損失項を無視すれば

$$\left. \begin{aligned} \phi = \psi &= H_0 + d \cos i + \frac{Q^2 (D)}{2g A^3} \\ &= H_0 + d \cos i + \frac{Q^2}{2g} \left[ \frac{1}{I(d) (\rho_0 + d)} \right]^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

となる。今  $\partial\phi/\partial(d) = 0$  と置けば、

$$\frac{g \cdot \cos i}{Q^2} = \frac{I(d) + B(d)}{\{I(d) (\rho_0 + d)\}^3} \dots\dots\dots (18)$$

(ここに  $B(d)$  = 水面幅)

となり、(18)式は任意断面形に対する  $\phi$  の極小条件を与えるもので、これを變形すれば

$$d_c = \frac{I(d_c) + B(d_c)}{I(d_c)} \left( \frac{Q^2}{g \cos i} \right)^{1/3} - \rho_0 \dots\dots\dots (19)$$

(ここに、 $d_c$  = (18)式より求められる  $d$  の値)

となり、(19)式の  $d_c$  を便宜上、鉛直曲率を有する開水路流れの任意断面における限界水深と定義する。ただし、この場合は、直線水路と異なつて実際の流れにおいては支配断面にのみこの値が実現され、その断面が支配断面となり得ない場合は実際的な意味をもたない。

(18)式の右辺において、 $\rho_0 \rightarrow \infty$  の極限をとれば

$$\frac{g \cos i}{Q^2} = \frac{B(d)}{\left( \int_0^d B d \eta \right)^3} = \frac{B(d)}{A^3} \dots\dots\dots (20)$$

となり、(20)式は任意断面形直線水路の限界水深を与えるもので、一般に  $A = ad^s$  で与えられる任意断面形に対しては

$$d_c = \left( \frac{SQ^2}{ga^2 \cos i} \right)^{\frac{1}{2s+1}} \dots\dots\dots (21)$$

すなわち

矩形断面; ( $S=1$ )  $d_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2 \cos i}} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}}$  ( $i \neq 0$  の場合)

放物線形断面; ( $S=3/2$ )  $d_c = \left( \frac{3Q^2}{2ga^2 \cos i} \right)^{1/4} = \left( \frac{3Q^2}{2ga^2} \right)^{1/4}$  ( $i \neq 0$  の場合)

逆立三角形断面; ( $S=2$ )  $d_c = \left( \frac{2Q^2}{ga^2 \cos i} \right)^{1/5} = \left( \frac{2Q^2}{ga^2} \right)^{1/5}$  ( $i \neq 0$  の場合)

となり、周知の表現に一致する。

また (18) 式を変形すれば

$$\frac{V}{\sqrt{gd}} (=Fr) = \sqrt{\frac{\left(\frac{\rho_0 I(d)}{\rho_0}\right)^2 \left(1 + \frac{d}{\rho_0}\right)^3}{\int_0^d B d \eta} \cos i} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\frac{d/\rho_0}{1+(d/\rho_0)} + \frac{d \cdot B(d)}{A} \sqrt{(D)}} \frac{\cos i}{(D)}} \quad \dots\dots\dots (22)$$

と表わし得る。(22) 式は鉛直曲率を有する任意断面形開水路における常、射流の限界フルード数を与え一般に断面の形状と  $d/\rho_0$  によつて変る値で  $d/\rho_0 \rightarrow 0$  の極限をとれば

$$\lim_{\frac{d}{\rho_0} \rightarrow 0} Fr = \sqrt{\frac{A}{d \cdot B(d)} \cos i} \quad \dots\dots\dots (23)$$

となり、(23) 式は直線水路に対する限界フルード数となる。一般に  $A = ad^s$  で表わされる任意断面形においては

$$Fr = \sqrt{\frac{\cos i}{S}} \quad \dots\dots\dots (24)$$

すなわち

矩形断面; ( $S=1$ )  $Fr = \sqrt{\cos i} = 1$  ( $i \neq 0$  の場合)

放物線形断面; ( $S=3/2$ )  $Fr = \sqrt{\frac{2}{3} \cos i} = \sqrt{\frac{2}{3}}$  ( $i \neq 0$  の場合)

逆立三角形; ( $S=2$ )  $Fr = \sqrt{\frac{1}{2} \cos i} = \sqrt{\frac{1}{2}}$  ( $i \neq 0$  の場合)

となり、既に知られているところと一致する。

#### 4. 支配断面

(17), (18) 両式より水路に沿う各点における  $\theta$  の極小値が求められれば、先に述べた通り<sup>2)</sup>、この  $\theta$  の極小値が最大になる位置が、流れの支配断面を与える。

次に運動方程式 (13) を、同様に摩擦損失項を無視して積分すれば

$$\theta = H_0 + d \cos i + \frac{V^2}{2g} (D)$$

$$= H_0 + d \cos i + \frac{Q^2}{2g} \left[ \frac{1}{I(d)(\rho_0 + d)} \right]^2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

[ここに、 $\theta$  =境界条件により定まる積分常数 (流れのもつこのエネルギー、また、ダムを越流する流れにおいては貯水池水位等を意味する。)]

となり、(17) 式の断面特性函数と全く同形の表現が得られる。ただしこの場合の  $d$  は、実際に実現される流れに対する値で、(17) 式における函数のパラメータとしての  $d$  とは趣を異にする。支配断面においては、(18), (25) 両式が共に成立しなければならぬから、両式より  $Q$  を消去すれば

$$\cos i = 2(\theta - d \cos i - H_0) \left\{ \frac{1}{\rho_0 + d} + \frac{B(d)}{I(d)(\rho_0 + d)} \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

が得られ、(26) 式は、運動方程式 (13) または (25) 式の解の多様性を唯一に規定する支配条件を与えるもので、ここに (26) 式を開水路流れの支配条件式と定義する。

(26) 式において  $\rho_0 \rightarrow \infty$  の極限、すなわち直線水路の場合は、

$$d + \frac{1}{2} \frac{\int_0^d B d \eta}{B(d)} = \frac{\theta - H_0}{\cos i} \quad \dots\dots\dots (27)$$

となり流積が  $A = ad^s$  で表わされる時は、 $B(d) = \frac{dA}{d(d)} = asd^{s-1}$  であるから、一般に

$$d = \frac{2S}{2S+1} \frac{\theta - H_0}{\cos i} \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。すなわち

矩形断面; (S=1)  $d = \frac{2}{3} \frac{\theta - H_0}{\cos i} = \frac{2}{3} (\theta - H_0)$  ( $i \neq 0$  の場合)

放物線形断面; (S=3/2)  $d = \frac{3}{4} \frac{\theta - H_0}{\cos i} = \frac{3}{4} (\theta - H_0)$  ( $i \neq 0$  の場合)

逆立三角形断面; (S=2)  $d = \frac{4}{5} \frac{\theta - H_0}{\cos i} = \frac{4}{5} (\theta - H_0)$  ( $i \neq 0$  の場合)

より、周知の表現に一致する。

なお(26)式で与えられた支配条件式は、一般に  $\rho_0 > 0$  すなわち曲率が上に凸で、流れが常流から射流に連続的に変化する場合のみ適用される。水路床の曲率が下に凸であれば勾配が次第に緩くなる流れであつて、かかる流れには下流方向に漸近線をもつ水面曲線が存在しないから、ここに急激なエネルギー損失を伴う跳水現象等が生ずる事となり支配断面を議論する事は無意味である。

5. 開水路流れの存在条件

以上述べたところは、開水路流れが前提的に存在する事を仮定しているもので、ここに開水路流れの存在条件について考察する必要がある。

筆者が先にダムを越流する流れについて述べた通り<sup>2)</sup>、水流が大気に接して開水路として存在するためには、極限条件として内部圧力が絶対圧力 0 以上でなければならない。一般に内部圧がある限界圧以下になれば、流線は隣接流線または水路床から離れ自由射出水となり、も早や開水路流れは存在しない事になる。

曲率が上に凸な流れに負圧の生ずる場合は、水路床に最底水圧が生じ、その値は(11)式において  $\eta = 0$  とおけば

$$p_B = wd \cos i - \frac{wV^2}{2g} \left\{ \frac{\int_0^d Bd \eta}{I(d)} \right\}^2 \left\{ \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{(\rho_0 + d)^2} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

となる(ただし  $p_B < 0$ )。絶対圧力 0 を  $-p_A (= -10 \text{ ton/m}^2)$  とし、先に筆者が提案した安定係数<sup>2)</sup>、 $k_c$  を用い、限界圧力を  $-k_c p_A$  とおけば(29)式より次の様に表現される。

$$\frac{wV^2}{2g} \left( \frac{\int_0^d Bd \eta}{I(d)} \right)^2 \left( \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{1}{(\rho_0 + d)^2} \right) - wd \cos i \leq k_c p_A$$

これを整理すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{V}{\sqrt{gd}} &\leq \left( 1 + \frac{d}{\rho_0} \right) \sqrt{\frac{2}{\frac{d}{\rho_0} \left( 2 + \frac{d}{\rho_0} \right)}} \left( \frac{I(d)}{\int_0^d Bd \eta} \right) \sqrt{\frac{k_c p_A}{wd} + \cos i} \\ \text{あるいは} & \sqrt{\frac{2}{\frac{d}{\rho_0} \left( 2 + \frac{d}{\rho_0} \right)} (D) \left( \frac{k_c p_A}{wd} + \cos i \right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

となる。(30)式は鉛直曲率を有する任意断面形開水路流れの存在条件を与えるもので、第2式の右辺を開水路流れの存在に関する限界フルード数  $F_{rc}'$  と定義すれば

$$F_{rc}' = \sqrt{\frac{2}{\frac{d}{\rho_0} \left( 2 + \frac{d}{\rho_0} \right)} \frac{1}{(D)} \left( \frac{k_c p_A}{wd} + \cos i \right)} \dots\dots\dots (31)$$

一般に開水路流れが存在するためには流れに沿うすべての点において

$$\frac{F_r}{F_{rc}'} \leq 1$$

(ここに、 $F_r = \frac{V}{\sqrt{gd}}$  = その点の実際のフルード数)

が成立しなければならない。すなわち、これに(31)、(32)両式より

$$\frac{F_r}{F_{rc}'} = \sqrt{\frac{d}{\rho_0} \left( 2 + \frac{d}{\rho_0} \right)} \sqrt{\frac{\frac{\theta - H_0}{d} - \cos i}{\frac{k_c p_A}{wd} + \cos i}} \leq 1$$

これを更に整理すれば

$$d^3 \cos i + d^2 (2 \rho_0 \cos i - \theta + H_0) + d (\rho_0^2 \cos i - 2 \rho_0 \theta + 2 \rho_0 H_0) + \rho_0^2 \frac{k_c p_A}{w} \leq 0 \dots\dots\dots (32)$$

となる。これを開水路の存在条件式と定義する。

(32) 式には、(D) 項が含まれておらないから、一般に開水路流れの存在条件は、断面形に関係しない事がわかる。また、(31) 式において  $\rho_0 \rightarrow \infty$  の極限をとれば、右辺は  $\infty$  となるから、直線開水路の存在条件はフルード数に制約されない。

### 6. 特定断面に対する積分

次に (14), (18), (25) の各式で与えられる D 項,  $\phi$  の極小条件式, 支配条件式の積分を, B が d の単一の関数で表現される数種の断面について解折する。

(i) 矩形断面 図-3 において

$$I(d) = \int_0^d \frac{Bd\eta}{\rho_0 + \eta} = B \log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0}, \quad \int_0^d Bd\eta = B \cdot d,$$

$(\rho_0 + d)/\rho_0 = \bar{d}$  とおけば,  $I(d) = B \log \bar{d}$ ,

$$D \text{ 項}; \quad D = \left( \frac{1}{\log \bar{d}} \frac{d}{\rho_0 + d} \right)^2 \dots \dots \dots (33)$$

$$\phi \text{ の極小条件式}; \quad \frac{g \cos i}{Q^2} = \frac{\log \bar{d} + 1}{B^2 \{ \log \bar{d} (\rho_0 + d) \}^3} \dots \dots \dots (34)$$

$$\text{支配条件式}; \quad \frac{\cos i}{2(\theta - d \cos i - H_0)} = \frac{1 + \log \bar{d}}{(\rho_0 + d) \log \bar{d}} \dots \dots \dots (35)$$

図-4 矩形断面の D 項

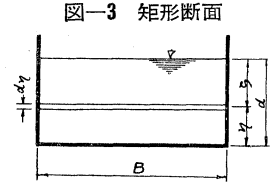
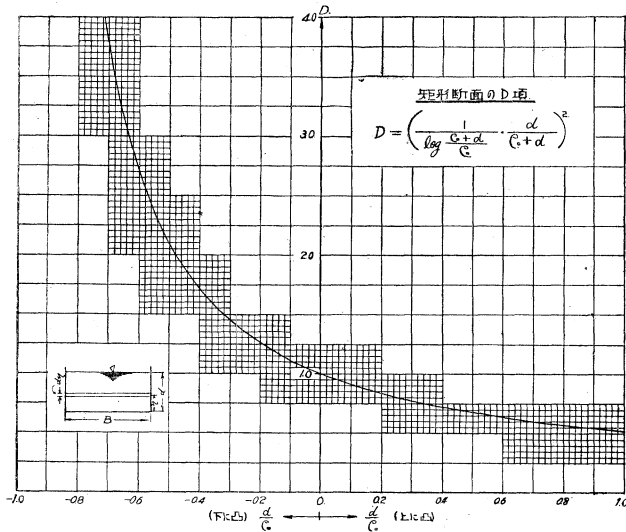
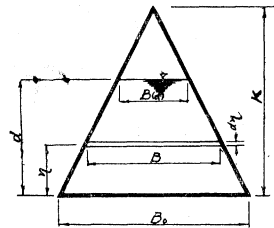


図-3 矩形断面

(33), (34), (35) の各式は筆者が矩形断面に対し、単独に誘導したもの<sup>1), 2)</sup>, と完全に一致する。また、(33) 式の D の値を  $d/\rho_0$  に対して数値計算すれば、図-4 の通りで、これは筆者が矩形断面に対して先に示した図<sup>6)</sup>において  $D_2$  (下に凸な場合の D) の縦軸に対して反転し  $D_1$  (上に凸なる場合の D),  $D_2$  両曲線を連続せしめたものに一致する。

図-5 正立三角形断面



(ii) 正立三角形断面 図-5 において,  $B_0$  = 底幅,  $K$  = 高さ (ただし,  $K \geq d$ )

$$B = \left( \frac{K - \eta}{K} \right) B_0, \quad B(d) = \left( \frac{K - d}{K} \right) B_0$$

$$\therefore \int_0^d Bd\eta = \frac{dB_0}{K} \left( K - \frac{d}{2} \right)$$

$$I(d) = \int_0^d \frac{Bd\eta}{\rho_0 + \eta} = \frac{B_0}{K} \{ -d + (K + \rho_0) \log \bar{d} \}$$

$$\therefore D \text{ 項}; \quad D = \left\{ \frac{d[K - (d/2)]}{-d + (K + \rho_0) \log \bar{d}} \left( \frac{1}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2 \dots \dots \dots (36)$$

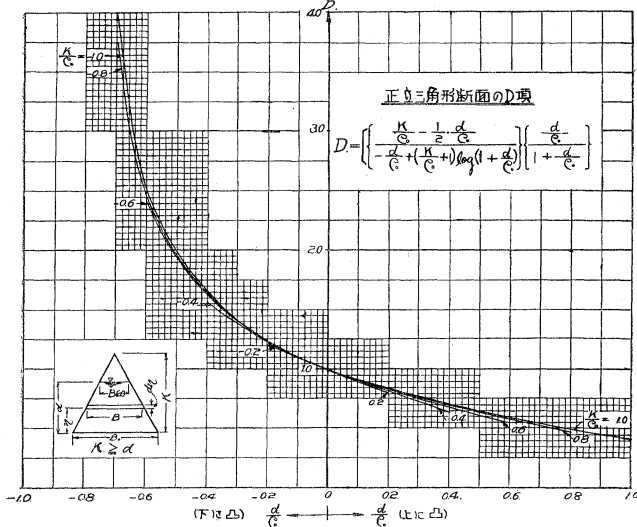
$\phi$  の極小条件式;

$$\left( \frac{B_0}{K} \right)^2 \frac{g \cos i}{Q^2} = \frac{(K - 2d) + (K + \rho_0) \log \bar{d}}{[-d + (K + \rho_0) \log \bar{d}] (\rho_0 + d)^3} \dots \dots \dots (37)$$

$$\text{支配条件式}; \quad \frac{\cos i}{2(\theta - d \cos i - H_0)} = \left\{ \frac{K - 2d + (K + \rho_0) \log \bar{d}}{-d + (K + \rho_0) \log \bar{d}} \right\} \left( \frac{1}{\rho_0 + d} \right) \dots \dots \dots (38)$$

(36) 式より、この場合の D 項は、 $\rho_0, d, K$  の関数で  $B_0$  に無関係である。D の値を  $d/\rho_0$  に対して図示すれば図-6 の通りである。

図-6 正三角形断面のD項

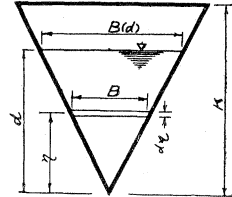


なお、 $\lim_{K \rightarrow \infty} D = \left( \frac{1}{\log \bar{d}} \frac{d}{\rho_0 + d} \right)^2$  となり  
 矩形断面の場合に一致する。

(iii) 逆立三角形断面 図-7 におい

て、 $B = \frac{\eta}{K} B_0$ ,  $B(d) = \frac{d}{K} B_0$

図-7 逆立三角形断面



$$\therefore \int_0^d B d \eta = \frac{B_0}{K} \frac{d^2}{2}$$

$$\therefore D \text{項}; \quad D = \left\{ \left( \frac{2}{d - \rho_0 \log \bar{d}} \right) \left( \frac{1}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2 \dots \dots \dots (39)$$

φ の極小条件式;

$$\left( \frac{B}{K} \right)^2 \left( \frac{g \cos i}{Q^2} \right) = \frac{2 d - \rho_0 \log \bar{d}}{\{(\rho_0 + d)(d - \rho_0 \log \bar{d})\}^3} \dots \dots \dots (40)$$

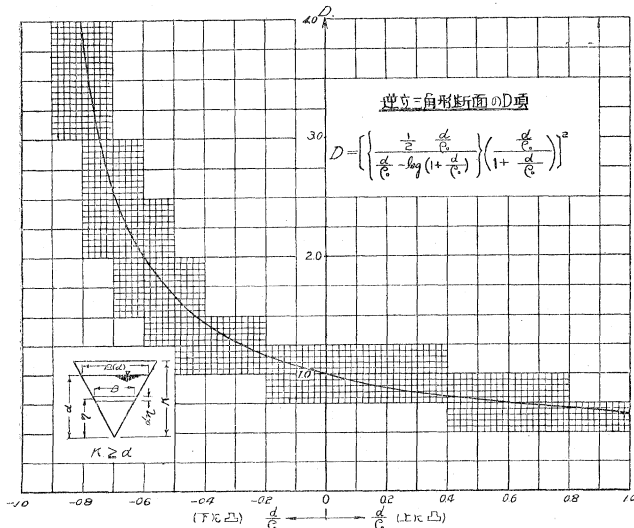
$$\text{支配条件式}; \quad \frac{\cos i}{2(\theta - d \cos i - H_0)} = \frac{2 d - \rho_0 \log \bar{d}}{(\rho_0 + d)[d - \rho_0 \log \bar{d}]} \dots \dots \dots (41)$$

(39) 式より、この場合のD項は  $\rho_0, d$  のみの函数で  $K, B_0$  に無関係である。Dの値を  $d/\rho_0$  をに対して計算すれば、図-8 の通りである。

(iv) 梯形断面 図-9 において、 $B = B_d - \frac{\eta}{K}(B_d - B_u)$ ,  $B(d) = B_d - \frac{d}{K}(B_d - B_u)$

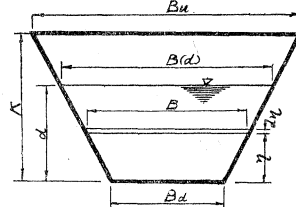
$$\int_0^d B d \eta = \left( B_d \cdot d - \frac{B_d - B_u}{K} \frac{d^2}{2} \right)$$

図-8 逆立三角形断面のD項



$$\int_0^d \frac{B d \eta}{\rho_0 + \eta} = \left( \log \frac{\rho_0 + d}{\rho_0} \right) \times \left\{ B_d + \frac{\rho_0(B_d - B_u)}{K} \right\} - \frac{d}{K} (B_d - B_u)$$

図-9 梯形断面



$$\therefore D \text{項: } D = \left[ \frac{d \left\{ B_d - \frac{d}{2K} (B_d - B_u) \right\}}{\left\{ B_d + \frac{\rho_0}{K} (B_d - B_u) \right\} \log \bar{d} - \frac{d}{K} (B_d - B_u)} \frac{1}{\rho_0 + d} \right]^2 \dots \dots \dots (42)$$

$\phi$  の極小条件式;

$$\frac{Bd^2 \cdot g \cdot \cos i}{Q^2} = \frac{1 - \frac{2d}{K} \left( 1 - \frac{B_u}{B_d} \right) + \log \bar{d} \left\{ 1 + \frac{\rho_0}{K} \left( 1 - \frac{B_u}{B_d} \right) \right\}}{\left[ \log \bar{d} \left\{ 1 + \frac{\rho_0}{K} \left( 1 - \frac{B_u}{B_d} \right) \right\} - \frac{d}{K} \left( 1 - \frac{B_u}{B_d} \right) \right]^3 (\rho_0 + d)^3} \dots \dots \dots (43)$$

支配条件式;

$$\frac{\cos i}{2(\theta - d \cos i - H_0)} = \frac{1 - \frac{2d}{K} \left( 1 - \frac{B_u}{B_d} \right) + \log \bar{d} \left\{ 1 + \frac{\rho_0}{K} \left( 1 - \frac{B_u}{B_d} \right) \right\}}{\left[ \log \bar{d} \left\{ 1 + \frac{\rho_0}{K} \left( 1 - \frac{B_u}{B_d} \right) \right\} - \frac{d}{K} \left( 1 - \frac{B_u}{B_d} \right) \right] (\rho_0 + d)} \dots \dots \dots (44)$$

(42) 式において  $\lim_{B_u \rightarrow 0} D$ ,  $\lim_{B_d \rightarrow 0} D$ ,  $\lim_{K \rightarrow \infty} D$  の極限をとれば、それぞれ

$$\lim_{B_u \rightarrow 0} D = \left\{ \frac{d[K - (d/2)]}{-d + (K + \rho_0) \log \bar{d}} \left( \frac{1}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2,$$

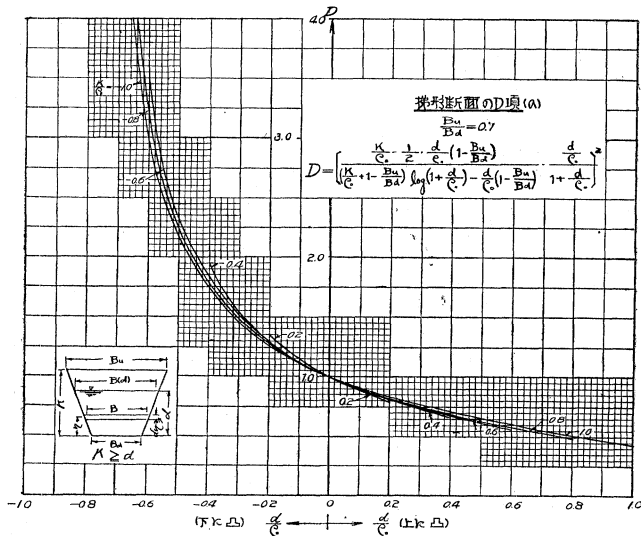
$$\lim_{B_d \rightarrow 0} D = \left\{ \frac{(d^2/2)}{d - \rho_0 \log \bar{d}} \left( \frac{1}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} D = \left\{ \frac{1}{\log \bar{d}} \frac{d}{(\rho_0 + d)} \right\}^2$$

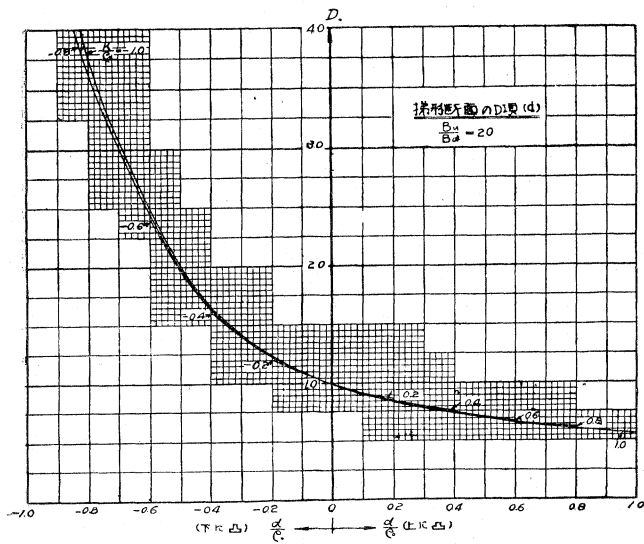
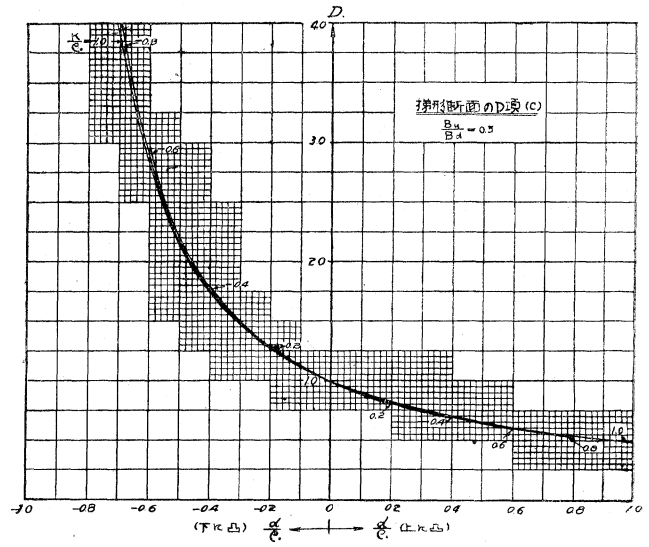
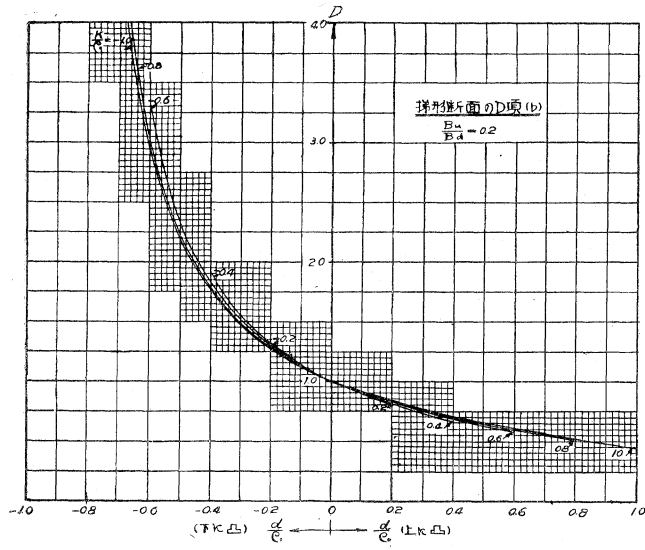
となり、各、正立三角形、逆立三角形、矩形の場合に一致する。

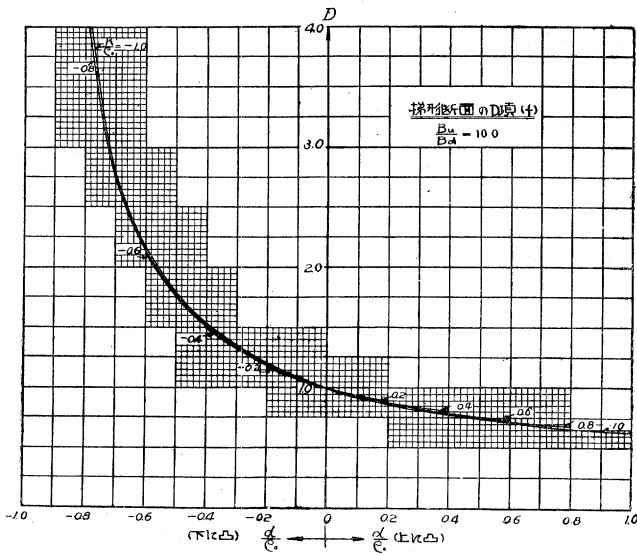
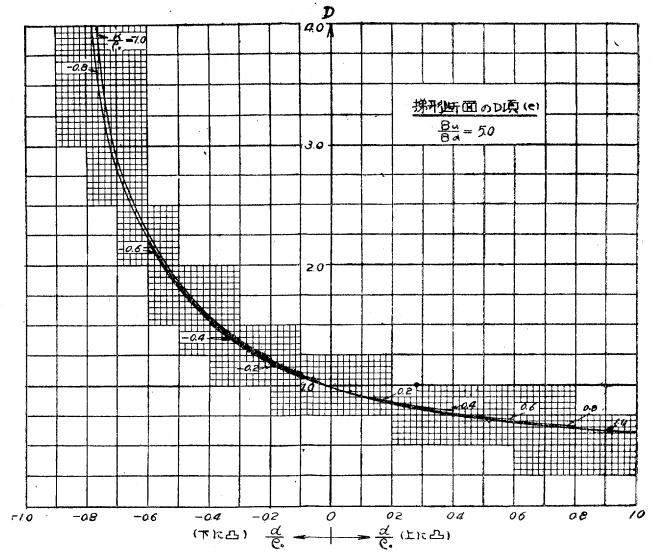
(42) 式の  $D$  の値を  $d/\rho_0$  に対して計算すれば 図-10 のとおりである。なお図においては  $B_u/B_d = 0, 1, \infty'$  の場合を除いてあるが、それぞれ正立三角形、矩形、逆立三角形、の場合を参照されたい。

図-10 梯形断面の  $D$  項 (a) (b) (c) (d) (e) (f)







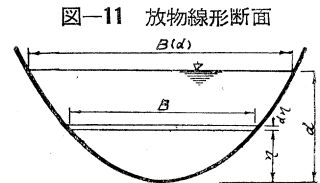


(v) 放物線形断面 図-11 において,  $B = kv\sqrt{\eta}$ ,  $B(d) = kv\sqrt{d}$

$$\int_0^d B d \eta = \frac{2k}{3} d^{3/2}$$

$$\int_0^d \frac{B d \eta}{\rho_0 + \eta} = 2k \left( \sqrt{d} - \sqrt{\rho_0} \tan^{-1} \sqrt{\frac{d}{\rho_0}} \right) \quad (\rho_0 > 0 \text{ の場合})$$

$$2k \left( \sqrt{d} + \frac{\sqrt{-\rho_0}}{2} \log \frac{\sqrt{-\rho_0} - \sqrt{d}}{\sqrt{-\rho_0} + \sqrt{d}} \right) \quad (\rho_0 < 0 \text{ の場合})$$



D項;

$$D = \left. \begin{aligned} &\rho_0 > 0 \quad D = \left\{ \frac{\sqrt{d|\rho_0}}{3(\sqrt{d|\rho_0} - \tan^{-1}\sqrt{d|\rho_0})} \left( \frac{d}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2 \\ &\rho_0 < 0 \quad D = \left\{ \frac{\sqrt{-d|\rho_0}}{3\left(\sqrt{-d|\rho_0} + \frac{1}{2} \log \frac{1 - \sqrt{-d|\rho_0}}{1 + \sqrt{-d|\rho_0}}\right)} \left( \frac{d}{\rho_0 + d} \right) \right\}^2 \end{aligned} \right\} \dots (45)$$

φ の極小条件式;

$$\frac{4k^2\rho_0^4 \cdot g \cdot \cos i}{Q^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{d}{\rho_0}} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{d}{\rho_0}}\right)}{\left\{\left(\sqrt{\frac{d}{\rho_0}} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{d}{\rho_0}}\right)\left(1 + \frac{d}{\rho_0}\right)\right\}^3} \dots\dots\dots (46)$$

(ただし  $\rho_0 > 0$ )

支配条件式;

$$\frac{\cos i}{2(\theta - d \cos i - H_0)} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{d}{\rho_0}} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{d}{\rho_0}}}{(\rho_0 + d)\left(\sqrt{\frac{d}{\rho_0}} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{d}{\rho_0}}\right)} \dots\dots\dots (47)$$

(ただし  $\rho_0 > 0$ )

この場合、φ の極小条件式、支配条件式は、前述のとおり  $\rho_0 < 0$  に対しては意味がないから  $\rho_0 > 0$  に対してのみ誘導してある。(45) 式の D の値を  $d/\rho_0$  に対して計算すれば、図-12 のとおりである。

図-12 放物線形断面の D 項

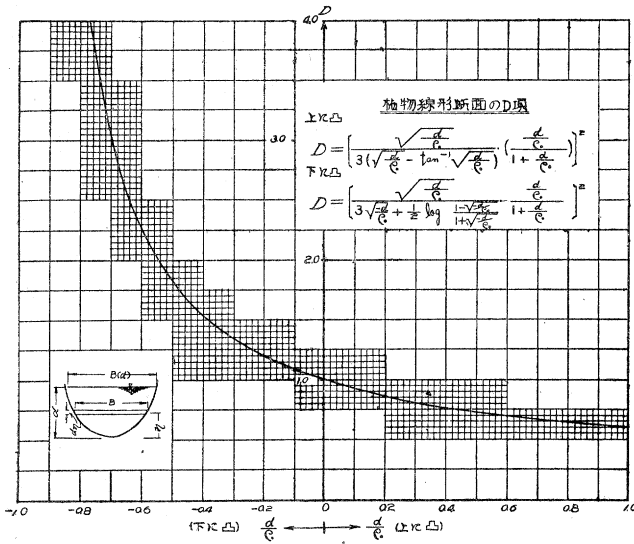
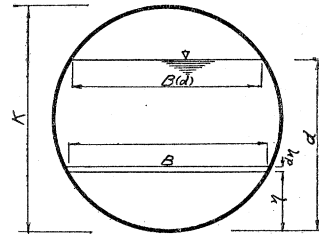


図-13 円形断面



(vi) 円形断面 図-13 において、 $B = \sqrt{2(\eta K - \eta)}$ ,  $B(d) = 2\sqrt{d(K-d)}$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^d B d \eta &= \frac{K^2}{2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{d}{K-d}} - \sqrt{d(K-d)} \left(\frac{K}{2} - d\right) \\ I(d) &= \frac{4K^2}{\rho_0} \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + (K/\rho_0)^2}} + \frac{1}{2} \frac{\rho_0 d}{K^2} \sqrt{\frac{K-d}{d}} - \frac{2\rho_0^2 + \rho_0 K}{2K^2} \tan^{-1} \sqrt{\frac{K-d}{d}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_0^2}{K^2} \sqrt{1 + \frac{K}{\rho_0}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{\rho_0(K-d)}}{\sqrt{d(\rho_0 + K)}} \right\} \end{aligned}$$

∴ D 項;  $\frac{d}{\rho_0} = \alpha$ ,  $\frac{d}{K} = \beta$ ,  $\frac{\alpha}{\beta} = m$ ,  $\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} = t$ ,  $\sqrt{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta}} = s$ ,  $\sqrt{1 + \frac{\alpha}{\beta}} = u$  とおくと

$$D = \left[ \frac{\frac{1}{2} \tan^{-1} t - \beta t \left(\frac{1}{2} - \beta\right)}{4(1+\alpha) \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta t}{m} - \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2}\right) \tan^{-1} t + \frac{u}{m^2} \tan^{-1} s \right\}} \right]^2 \dots\dots\dots (48)$$

φ の極小条件式;

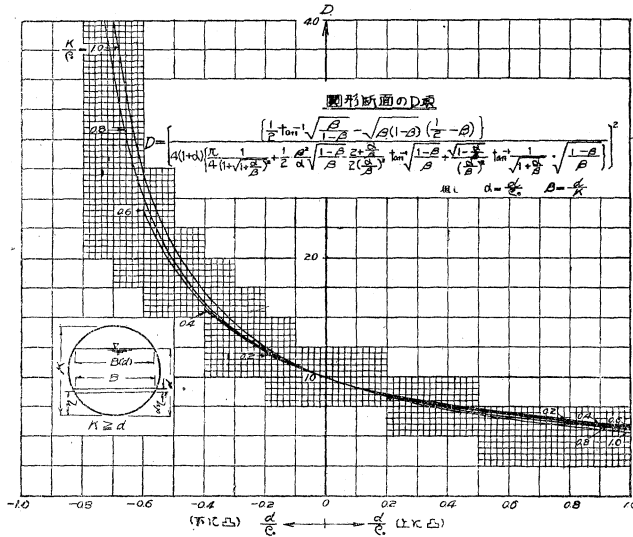
$$\frac{16gK^5 \cos i}{Q^2} = \frac{m \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta t}{m} - \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2}\right) \tan^{-1} t + \frac{u}{m^2} \tan^{-1} s \right\} + \frac{\beta t}{2}}{(1+\alpha)^3 \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta t}{m} - \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{2}\right) \tan^{-1} t + \frac{u}{m^2} \tan^{-1} s \right\}^3} \dots\dots\dots (49)$$

支配条件式；

$$\frac{K \cos i}{2(\theta - d \cos i - H_0)} = \frac{m \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta t}{m} - \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \right) \tan^{-1} t + \frac{u}{m^2} \tan^{-1} s \right\} + \frac{\beta t}{2}}{(1+\alpha) \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta t}{m} - \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \right) \tan^{-1} t + \frac{u}{m^2} \tan^{-1} s \right\}} \quad \dots\dots\dots(50)$$

(48) 式の  $D$  の値を  $\alpha$ ，すなわち  $d/\rho_0$  に対して計算すれば 図-14 の通りである。

図-14 円形断面の  $D$  項



## 7. あとがき

本論文は、筆者がこれまで取扱ってきた鉛直曲率を有する開水路流れに対する解析的な研究を、任意の断面形流れに適用し得る如く普遍的に体系化したものである。最も意図した所は、この種の流れの解析的な構造を表現することではあるが、なお本文中にあげた曲線図を利用すれば、数値計算を簡単に行い得る様配慮したつもりである。紙数の関係で、上記理論に基いて行なつた円形断面トンネル流れに関する興味ある数値解折例を敘述できなかったが、また稿を新めて各位の御批判をあおぎたいと思う。

本論文取りまとめに当つて鳴子工事事務所金子晃技官，並びに真見実，遊佐多み子，両補助員の御助力に負う所が大きかつた事を述べ、厚く御礼申し上げる。

## 参考文献

- 1) 井田至春：“自由表面を有する急勾配流れ” 土木学会誌，40 卷 3 号，または“同題” 東北地建第 5 回技術研究会論文集，昭和 29 年 2 月
- 2) 井田至春：“ダムを越流する流れの解析的研究”，土木学会論文集第 32 号（昭 31.2）
- 3) 本間 仁：水理学，（技術者のための流体の力学）p. 166
- 4) 前出 1) の p. 18
- 5) 井田至春：“水理計算に依る河川の計画” 東北地建第 2 回技術研究会論文集，昭和 26 年 1 月
- 6) 前出 1) の p. 19（図-3）

（昭. 30. 9. 30）