【土木学会論文集　第389号／Ⅳ-8　1988年1月】

嗜好変化を内生化した比較静学に関する理論的研究

THEORETICAL STUDY ON COMPARATIVE STATIC ANALYSIS WITH ENDOGENOUS TASTE CHANGES

小林潔司*・張　衛彬**・吉川和広***

By Kiyoshi KOBAYASHI, Wei-Bin ZHANG and Kazuhiro YOSHIKAWA

Comparative static analysis deals with the study of how, in a given economic model, endogenous variables react to given changes in exogenous variables or parameters. Although the method has been applied in various fields in socio-economic systems, it has well-known drawbacks in coping with taste changes in the sense that taste changes will usually cause shifts in effective values of variables. In this paper, we try to describe endogenous taste changes by a form of Lie transformations and present a general methodology of comparative static analysis for dealing with taste changes. We show applicability of our new methodology by demonstrating two generic examples, that is retail-location model and residential location model.

Keywords: *comparative static analysis, endogenous taste changes, Lie transformation*

1. はじめに

P. Samuelson (1947) の先駆的な研究[1]以来，比較静学に関する理論的・応用的研究は数多く蓄積されてきた．周知のとおり比較静学分析は，均衡状態にある経済現象において経済モデルにおけるあるパラメーターの値がシフトした場合，経済システムが新しい均衡に向かってどのように変化していくかを分析する方法である．Samuelson は比較静学に関する数学的基礎を与え，その後研究が積み重ねられたものの，彼が提案した枠組の実質的な進展はなかったといっても過言ではない[2]．

比較静学は1つの均衡状態から別の均衡状態へのシステムの変化を，その過渡的調整過程を問題とせずに研究する方法である．比較静学では過渡的調整過程を考慮しないため，方法論上種々の問題はあるものの，その方法が各種の政策分析のための実用的な理論的枠組を提供するため土木計画の領域でもその方法論はよく用いられてきた[3]．Samuelson 流の比較静学において，システムのパラメーターの変化はそれぞれ外生的に独立して与えられる．そして，外生的なパラメーターの変化がシステムの均衡解（内生変数）に及ぼす影響を分析する．その際，個人の嗜好あるいは効用関数はシステムの外的条件の変化に対して不変であるという仮定を設けている．しかし，社会・経済システムの問題は人間を取り扱った問題であり，外的条件の変化に対する嗜好の不変性という前提が成立する保証はない．つまり，個人はシステムの環境条件の変化に適応して自らの嗜好（効用関数）を再編成し，その結果として個人行動は変化する．従来の比較静学の方法は，このような個人の嗜好変化の問題を直接的に扱うことができないという限界をもっている．

経済システムの比較静学への Lie 変換の応用に関しては，Sato (1981, 第4章第2節) の先駆的な研究[4]がある．彼は「r-パラメーター無限小変換の存在」という弱い仮定の下で，個人の嗜好変化を直接考慮できるような比較静学の方法を示し適用例をいくつか紹介している．のちに3. で考察するように，そこでは Lie 変換のパラメーターはモデルの定数や係数とは無関係にモデルの外部において定義されるにとどまっている．Sato は，嗜好変化を内生化する比較静学の可能性を示唆している[4] (1981, 第4章第2節の脚注7, 8) が，3. で述べるような理由により嗜好変化を内生化した比較静学を十分に展開できているとはいえない．一方，土木計画学の

* 正会員　工博　鳥取大学助教授　工学部社会開発システム工学科（〒680　鳥取市湖山町南4-101）
** 学生会員　工修　京都大学大学院　土木工学専攻（〒606　京都市左京区吉田本町）
*** 正会員　工博　京都大学教授　工学部土木工学科（同上）

領域では，たとえば余暇時間や所得の増大が交通・立地行動にどのような影響を及ぼすのか，あるいは大規模な土木施設の建設・運用が国民や地域住民の効用や嗜好にどのような影響を及ぼすのかといった政策論的な分析が不可欠である．個人の嗜好変化を外生変数や政策変数と無関係に定義することは問題が多く，むしろシステムの外生変数の変化が個人の嗜好にどのような変化を及ぼし，その結果としてシステムの均衡解がどのように変化するかという比較静学分析が必要である．

本研究ではモデルのパラメーターの変化によって生じる嗜好変化をLie変換としてモデル化し，Lie変換を内生的に組み込んだような比較静学分析の方法を提案するとともに，土木計画学の分野における適用可能性について考察することとする．以下，本論文の2. ではまずLie変換を用いた比較静学の一般論を従来の方法と比較しながら述べる．次いで，3. ではLie変換を用いた一般的な比較静学に基づいて，嗜好変化を内生化した比較静学の方法を提案する．最後に，4. において嗜好変化を内生化した比較静学の適用事例を2つ取り上げ，所得の変化といった外的条件の変化が個人の嗜好および行動にどのような変化を及ぼすか比較静学分析する．

2.　Lie変換を用いた比較静学の方法

（1）従来の比較静学の方法

ここでは，従来の比較静学の方法を一般的な効用最大化問題（P-1）を例にとり簡単に説明する．

$$\textbf{Maximize}\quad Z=U(X,\ \varepsilon)\cdots\cdots(1)$$

$$\textbf{subject to}\quad g_j(X,\ \varepsilon)=0,\ (j=1,\ \cdots,\ m)\cdots\cdots(2)$$

ただし，$X=(X_1,\ \cdots,\ X_n)\geqq 0$，$U(X)$，$g_j(X)$ は X, ε に関する滑らかな一価関数であり，2回連続微分可能であると仮定する．簡単のために U, g_j は2階の最適条件を自動的に満足すると仮定する．$\varepsilon=(\varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_r)$ は r 個のパラメーターのベクトルである．パラメーターとはその値が外生的に変化する可能性があることを示しており，パラメーターがどのように問題とかかわっているかは問題としない．つまり，式（1），（2）に含まれる任意の定数あるいは関数式のパラメーター等が比較静学の対象となり得る．いま，問題（P-1）のラグランジュ関数 L を次式のように定義する．

$$L(X,\ \lambda,\ \varepsilon)=U(X,\ \varepsilon)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j(X,\ \varepsilon)\cdots\cdots(3)$$

このとき，1階の最適条件は

$$h_i=\partial L/\partial X_i=0,\ H_j=\partial L/\partial\lambda_j=0$$
$$(i=1,\ \cdots,\ n\,;\ j=1,\ \cdots,\ m)\cdots\cdots(4)$$

となる．式（3）を式（4）に代入すれば，

$$U^i(X,\ \varepsilon)-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j^i(X,\ \varepsilon)=0,\ (i=1,\ \cdots,\ n)$$
$$-g_j(X,\ \varepsilon)=0,\ (j=1,\ \cdots,\ m)\cdots\cdots(5)$$

となる．ここで，$U^i=\partial U/\partial X_i$, $g_j^i=\partial g_j/\partial X_i$ である．式（4）を $\varepsilon_s(s=1,\ \cdots,\ r)$ で微分すると次式を得る．

$$\sum_{k=1}^{n}h_i^k\partial X_k/\partial\varepsilon_s+\sum_{j=1}^{m}h_i^j\partial\lambda_j/\partial\varepsilon_s=-h_i^s$$
$$\sum_{k=1}^{n}H_j^k\partial X_k/\partial\varepsilon_s=-H_j^s$$
$$(i=1,\ \cdots,\ n\,;\ j=1,\ \cdots,\ m)\cdots\cdots(6)$$

ここに，$h_i^k=\partial h_i/\partial X_k$, $h_i^j=\partial h_i/\partial\lambda_j$, $h_i^s=\partial h_i/\partial\varepsilon_s$, $H_j^k=\partial H_j/\partial X_k$, $H_j^s=\partial H_j/\partial\varepsilon_s$（$i,\ k=1,\ \cdots,\ n\,;\ j=1,\ \cdots,\ m$）である．式（6）に式（4），（5）を代入し，

$$\begin{bmatrix} U^{ik}-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j^{ik} & -g_j^i \\ -g_j^k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_k}{\partial\varepsilon_s} \\ \dfrac{\partial\lambda_j}{\partial\varepsilon_s}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} h_i^s \\ H_j^s\end{bmatrix}\cdots\cdots(7)$$

を得る．ただし，$U^{ik}=\partial U^i/\partial X_k$, $g_j^{ik}=\partial g_j^i/\partial X_k$（$i,\ k=1,\ \cdots,\ n\,;\ j=1,\ \cdots,\ m$）である．式（7）の左辺第1項を W と行列表示し，$\partial M/\partial\varepsilon_s=(\partial X_k/\partial\varepsilon_s,\ \partial\lambda_j/\partial\varepsilon_s)'$, $\partial N/\partial\varepsilon_s=(h_i^s,\ H_j^s)'$ と表記する．U, g_j が2階の最適条件を満足するので W の逆行列 W^{-1} が存在し，以下のようなパラメーター ε_s に関する比較静学の評価式を得る．

$$\partial M/\partial\varepsilon_s=-W^{-1}\partial N/\partial\varepsilon_s\cdots\cdots(8)$$

したがって，基本問題（P-1）が与えられれば，外生的なパラメーター ε_s の変化に対して均衡解がどのように変化するかを式（8）で評価できる．なお，従来の比較静学分析では外生的に与えられたパラメーター ε_s（$s=1,\ \cdots,\ r$）の変化に対して，個人の嗜好あるいは技術の構造は変化しないという前提をおいている．

（2）r-パラメーター無限小変換

Sato（1981，第4章）[4] も述べているようにLie変換を用いて比較静学分析を効果的に行うことができる．通常の比較静学では，モデルの任意の定数，係数に関する比較静学が可能であるが，Satoの比較静学ではパラメーターがどのように問題とかかわるかが重要となる．いま，Lie変換のパラメーターがモデルの定数や係数と無関係にモデルの外部で定義されていると仮定しよう．Lie変換はモデルの変数の有効値（effective value）の変化をもたらす．本稿で取り上げる効用最大化問題の場合，有効値の変化を嗜好変化と解釈できる．つまり，個人の嗜好変化が起きれば，同じ変数の値に対しても異なる評価を与えることとなる[5]．このような外生的なパラメーターの変化が変数の有効値に及ぼす影響をLie変換として記述する[6]．いま，最適条件 h_i, H_j に含まれる変数 X_k（$k=1,\ \cdots,\ n$）がパラメーター ε の変化により，その有効値が $\overline{X}_{ki}$, $\overline{X}_{kj}$（$i,\ k=1,\ \cdots,\ n\,;\ j=1,\ \cdots,\ m$）となったとしよう．

$$\overline{X}_{ki}=\theta_{ki}(X_1,\ \cdots,\ X_n:\varepsilon),\ (i,\ k=1,\ \cdots,\ n)$$
$$\overline{X}_{kj}=\theta_{kj}(X_1,\ \cdots,\ X_n:\varepsilon),\ (j=1,\ \cdots,\ m)\cdots\cdots(9)$$

なお，$(X_1,\ \cdots,\ X_n)$ は変換を受ける前の変数，$\varepsilon=(\varepsilon_1,$

$\cdots, \varepsilon_r)'$ である．式（９）は変数 X_j の測定単位を与える局所座標系間の写像を表現している．

次に，問題（P-1）の最適解が式（９）に示す変換の作用を受け変化したと考える．変換を受ける前後において問題（P-1）の最適条件が成立することより，

$$h_i(X, \lambda)=0 \rightarrow h_i(X, \lambda, \varepsilon)=0$$

$$H_j(X)=0 \rightarrow H_j(X, \varepsilon)=0 \tag{10}$$

が成立しなければならない．一方，式（９）のパラメーター変化の下で，制約条件に含まれる変数 X の有効値は h_i, H_j ごとにそれぞれ $\overline{X}_i$, $\overline{X}_j$ に変化することより，

$$h_i(X, \lambda, \varepsilon)=h_i(\overline{X}_i, \lambda)$$

$$H_j(X, \varepsilon)=H_j(\overline{X}_j) \tag{11}$$

が成立する．Sato[4]（第４章）は変換（９）の下でのパラメーター変化（11）を「代替的パラメーター変化」(substitutional parameter changes) とよんでいる．ここで，Lie 変換の無限小変換を導入する．いま，$\varepsilon=0$ のとき $\overline{X}_{ki}=X_k$, $\overline{X}_{kj}=X_k$ $(i, k=1, \cdots, n; j=1, \cdots, m)$ という恒等変換を意味すると考え，恒等変換の近傍で Lie 変換を近似すると，

$$\delta X_{ki}=\sum_{s=1}^{r} \xi_{kis}\delta\varepsilon_s+0(\varepsilon^2), \ (i=1, \cdots, n)$$

$$\delta X_{kj}=\sum_{s=1}^{r} \xi_{kjs}\delta\varepsilon_s+0(\varepsilon^2), \ (i=1, \cdots, m) \tag{12}$$

である．ここに，$0(\varepsilon^2)$ は ε に関する高次の無限小項，$\xi_{kis}=\partial\theta_{ki}/\partial\varepsilon_s$, $\xi_{kjs}=\partial\theta_{kj}/\partial\varepsilon_s$ である．なお，一般的に θ_{ki}, θ_{kj} は Lie 群の性質[6]を満足するが，群の仮定は比較静学において必ずしも必要でない．Sato[4]（第４章）も述べているように，恒等変換をもたらす r-パラメーター無限小変換 ξ_{kis}, ξ_{kjs} の存在を仮定すればよい．すなわち，任意の無限小変換は恒等変換をもたらすような任意の無限小変換の一次結合で表現できるからである．

以上は Sato[4]が導入した Lie 変換の概要であるが，土木計画の分野で比較静学を用いる場合，「ある政策を導入した前後での均衡の変化を調べる」といったようにある特定の時間経過に対して比較静学を行う場合が多い．そこで，Sato の Lie 変換をある無限小時間に統一して表現できるように修正する[6]．本研究ではパラメーター ε_s は時間とともに変化すると考え，無限小時間 δt に対して $\varepsilon_s=\kappa_s\delta t$ と近似されると仮定する．ここに，κ_s はパラメーターの無限小時間 δt 当たりの無限小変化量である．このとき，無限小変換 η_{ki}, η_{kj} を

$$\eta_{ki}=\sum_{s=1}^{r}\kappa_s \xi_{ijs}, \quad \eta_{kj}=\sum_{s=1}^{r}\kappa_s \xi_{kjs} \tag{13}$$

と定義すれば，式（12）は次のように簡略化される．

$$\delta X_{ki}=\eta_{ki}\delta t+0(\varepsilon^2), \ (i=1, \cdots, n)$$

$$\delta X_{kj}=\eta_{kj}\delta t+0(\varepsilon^2), \ (j=1, \cdots, m) \tag{14}$$

（３） Lie 変換を用いた比較静学の方法

ここで第 s 番目のパラメーター ε_s の変化に伴う比較静学の評価を考えよう．パラメーター ε_s による無限小作用素を Lie 記号を用いて以下のように定義する．

$$\phi_{is}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{kis}\partial/\partial X_k, \ (i=1, \cdots, n)$$

$$\Phi_{js}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{kjs}\partial/\partial X_k, \ (j=1, \cdots, m) \tag{15}$$

ϕ_{is}, Φ_{js} はそれぞれパラメーター ε_s の変化が問題（P-1）の１階の最適条件 h_i, H_j $(i=1, \cdots, n; j=1, \cdots, m)$ に作用する無限小作用素を意味している．ここで，次の補題を得る．

補題１：問題（P-1）における変数 $X_k(k=1, \cdots, n)$ がパラメーター ε_s の外生的な変化により，Lie 変換（９）の作用を受けたとき，ε_s の変化が問題（P-1）の最適条件 h_i, H_j $(i=1, \cdots, n; j=1, \cdots, m)$ に及ぼすインパクトの大きさ h_i^s, H_j^s を恒等変換の近傍で

$$h_i^s=\phi_{is}h_i \quad (i=1, \cdots, n)$$

$$H_j^s=\Phi_{js}H_j \quad (j=1, \cdots, m) \tag{16}$$

と近似できる．

（証明）まず，h_i^s について，パラメーター ε_s の変化が最適条件に及ぼす影響を調べる．そこで，ε_s 以外のパラメーターの値を０に固定して最適条件 h_i を恒等変換の近傍で ε_s に関して Taylor 展開する．最適条件 h_i が解析的であれば，h_i は $\varepsilon_s=0$ の近傍で $\overline{h}_i=h_i+(\partial\overline{h}_i/\partial\varepsilon_s)_0\varepsilon_s$ と展開できる．$\overline{\xi}_{kis}=\partial\overline{\theta}_{ki}/\partial\varepsilon_s$, $\overline{\phi}_{is}\overline{h}_i=\sum_k\overline{\xi}_{kis}\partial\overline{h}_i/\partial\overline{X}_k$, $(i=1, \cdots, n)$ とすれば，$(\overline{\xi}_{kis})_0=\xi_{kis}$, $(k, i=1, \cdots, n)$, $(\overline{\phi}_{is}\overline{h}_i)_0=\sum_k\xi_{kis}\partial h_i/\partial X_k=\phi_{is}h_i$ が成立する．一方，

$$\begin{aligned}\partial\overline{h}_i/\partial\varepsilon_s&=\textstyle\sum_k\partial\overline{h}_i/\partial\overline{X}_{ki}\partial\overline{X}_{ki}/\partial\varepsilon_s\\&=\textstyle\sum_k\overline{\xi}_{kis}\partial\overline{h}_i/\partial\overline{X}_{ki}\\&=\overline{\phi}_{is}\overline{h}_i\end{aligned} \tag{17}$$

が成立する．したがって，

$$\begin{aligned}(\partial\overline{h}_i/\partial\varepsilon_s)_0&=(\textstyle\sum_k\partial\overline{h}_i/\partial\overline{X}_{ki}\partial\overline{X}_{ki}/\partial\varepsilon_s)_0\\&=(\overline{\phi}_{is}\overline{h}_i)_0=\phi_{is}h_i\end{aligned} \tag{18}$$

となる．H_j に関しても同様にして $\partial H_j/\partial\varepsilon_s=\Phi_{js}H_j$ を得る．(Q.E.D)

次に，無限小時間 δt に対してパラメーター ε_s $(s=1, \cdots, r)$ が $\varepsilon_s=\kappa_s\delta t$ を満足するように同時に変化したとしよう．無限小作用素を ψ_i, Ψ_j を式（14）を用いて

$$\psi_i=\sum_{k=1}^{n}\eta_{ki}\partial/\partial X_k, \ (i=1, \cdots, n)$$

$$\Psi_j=\sum_{k=1}^{n}\eta_{kj}\partial/\partial X_k, \ (j=1, \cdots, m) \tag{19}$$

と定義する．このとき，次の補題を得る．

補題２：問題（P-1）の変数 $X_k(k=1, \cdots, n)$ が，

パラメーター ε の外生的な変化により Lie 変換の作用（9）を同時に受けたとき，ε の変化が問題（P-1）の最適条件 h_i, H_j（$i=1, \cdots, n$；$j=1, \cdots, m$）に及ぼすインパクトの大きさ Δh_i, ΔH_j を恒等変換の近傍で

$$\Delta h_i = \sum_s h_i^s = \phi_i h_i$$
$$\Delta H_j = \sum_s H_j^s = \Psi_j H_j \cdots\cdots (20)$$

と近似できる．

（証明）式（18）と式（19）より

$$\Delta h_i = \sum_{s=1}^{r} (\partial \bar{h}_i / \partial \varepsilon_s)_0$$
$$= \left(\sum_{s=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \partial \bar{h}_i / \partial \bar{X}_{ki} \partial \bar{X}_{ki} / \varepsilon_s \right)_0 = \phi_i h_i \cdots\cdots (21)$$

を得る．H_j に関しても同様にして $\Delta H_j = \sum_s H_j^s = \Psi_j H_j$ を得る．（Q.E.D.）

補題 1，2 より，Lie 変換を用いた場合の比較静学の評価式を得る．すなわち，式（8）の右辺を式（16）を用いて書き替えることにより，

$$\partial M / \partial \varepsilon_s = -W^{-1} \Phi_s(h, H) \cdots\cdots (22)$$

を得る．ここに，$\partial M / \partial \varepsilon_s = (\partial X_k / \partial \varepsilon_s, \partial \lambda_j / \varepsilon_s)'$, $\Phi_s(h, H) = (\phi_{1s} h_1, \cdots, \phi_{ns} h_n, \Phi_{1s} H_1, \cdots, \Phi_{ms} H_m)'$ である．次に，パラメーター ε が同時に変化したときの合成効果 $\partial M / \partial \varepsilon = (\partial X_k / \partial \varepsilon, \partial \lambda_j / \varepsilon)'$ を求める．ただし $\partial X_k / \partial \varepsilon = \sum_s \partial X_k / \partial \varepsilon_s$, $\partial \lambda_j / \partial \varepsilon = \sum_s \partial \lambda_j / \varepsilon_s$ である．ここで，式(20) を用いれば，次式のようになる．

$$\partial M / \partial \varepsilon = -W^{-1} \Psi(h, H) \cdots\cdots (23)$$

ただし，$\Psi(h, H) = (\phi_1 h_1, \cdots, \phi_n h_n, \Psi_1 H_1, \cdots, \Psi_m H_m)'$ である．ここに，次の定理を得る．

定理 1：問題（P-1）の最適解がパラメーター変化により式(9)に示すような作用を受けるとき，パラメーター ε_s の変化による比較静学の評価式は恒等変換の近傍で式（22），すべてのパラメーターが変化した場合は式（23）により近似できる．

最後に，嗜好変化の比較静学と通常の比較静学の関連に関して簡単に言及しておく．2. で述べた比較静学は，Lie 変換として外生的に定義された嗜好変化が問題の最適解にどのような影響を及ぼすかという，いわば「外生的嗜好変化の比較静学」を行っており，モデルのパラメーター（定数，係数）が変化した場合の比較静学とはねらいがまったく異なっている．モデルのパラメーターが変化し，その結果嗜好が変化すると同時に最適解が変化するというメカニズムを分析するためには次節で述べる嗜好変化を内生化した比較静学が必要となる．

3. 嗜好変化を内生化した比較静学

Sato[4]（第 4 章第 2 節）は，Lie 変換を用いた需要関数，派生需要の比較静学の方法を提案し，比較静学の適用例を紹介している．そこでは，嗜好変化を示す Lie 変換の形を与件として事前に想定している．Lie 変換は群を生成する[4]（付録）が，適用例で用いている効用関数，制約条件はすべて Lie 変換により生成される群の性質を満足している．群表現された効用関数，制約条件に含まれるパラメーターは，外生的に与えた Lie 変換のパラメーターにほかならず，このパラメーターは，通常，モデルで用いられる定数や係数とは性格を異にしている．モデルで用いる関数は群の性質を満足しないのが普通であり，通常の関数のパラメーターを Lie 変換のパラメーターとして採用できる保証はない．Sato[4]（第 4 章脚注 7，8）は，資源項が変化した場合の比較静学の可能性を示唆しているが，以下で明らかにするように，（i）効用関数のパラメーターに関しては Lie 変換のパラメーターとして用いることができるが，（ii）制約条件のパラメーターをそのまま Lie 変換のパラメーターとして採用できないのである．

上述したように，Sato の比較静学は基本的に Lie 変換のパラメーターがモデルと独立に定義できる場合を対象としたものであり，そのままではモデル（特に，制約条件）の定数や係数を Lie 変換のパラメーターとして用いることはできない．そのためには，（i）事前に想定した Lie 変換から生成される群を用いて効用関数や制約条件を表現するか，あるいは，（ii）Lie 変換の形に関して制約を設ける必要がある．Sato が示した適用例は前者の立場に立っているが，この場合，Lie 変換がモデルとは独立に外生的に定義されているため「問題の外部で定義される嗜好変化がモデルの最適解にどのような影響を及ぼすか」といった，いわゆる「外生的嗜好変化の比較静学」を行っているにすぎない．一方，土木計画の分野では，嗜好変化を外生的に定義するよりも，たとえば，所得の向上が嗜好を変化させ，その結果最適行動が変化するといったプロセスを分析できるほうが望ましい．そのためには，たとえば所得のようにモデルに含まれる定数や係数が Lie 変換のパラメーターとして採用される必要がある．この場合，上述したように Lie 変換の形に関して制約を付加する必要があるが，効用関数，制約条件を群表現する必要がないため，取り扱うことができる問題の範囲は格段に増加する．モデルで定義されている係数や定数の変化を Lie 変換のパラメーターとして明示的に取り上げた比較静学の方法を，「嗜好変化を内生化した比較静学」とよぶこととする．

さて，2. で述べた比較静学の方法を「嗜好変化を内

生化した比較静学」に応用しよう．2. で述べた比較静学の方法をそのまま応用すれば非常に繁雑になるため，ここでは前提条件を付加し応用性の高い比較静学の方法を提案する．まず比較静学の方法を簡単にするため，

$$\phi_{is}=\Phi_{js}=\Phi_s \quad\cdots(24)$$

$$\psi_i=\Psi_j=\Psi,$$

$$(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m;s=1,\cdots,r) \quad\cdots(25)$$

と仮定する．この仮定は「嗜好変化が各変数に及ぼす変換のパターンは，その変数がどの制約条件に含まれていようが同一である」ことを意味し，式（9）に示すような一般的な嗜好変化を考えるよりはむしろ現実的な仮定である．式（9）に示すLie変換が必要となる理由として，（i）一般に，式（24），（25）が必ずしも成立するとは限らないこと（たとえば，Sato[4]は式（24）が成立しないような例を挙げている．），（ii）式（9）に示す変換はその特殊例として式（24），（25）に示す変換を含んでいるという点が挙げられる．しかし，本稿で対象とする効用最大化問題では，変換後の効用関数の形式に何も制約を課していないため，式（24），（25）を満足する無限小変換が存在することが保証される．なお，変換後の効用関数の形式に制約がある場合（たとえば，Lie変換の作用を受けても効用水準が変化しないという効用関数の完全変換可能性[4]制約がある場合）において，このような無限小変換が存在するための一般的な条件に関しては今後の検討課題としたい．

さて，式（24），（25）を仮定した場合の比較静学の評価式は，Φ_s, Ψ を用いることにより，

$$\partial M/\partial\varepsilon_s=-W^{-1}\Phi_s(h,H) \quad\cdots(26)$$

$$\partial M/\partial\varepsilon=-W^{-1}\Psi(h,H) \quad\cdots(27)$$

となる．ここに $\Phi_s(h,H)=(\Phi_s h_1,\cdots,\Phi_s H_m)'$, $\Psi(h,H)=(\Psi h_1,\cdots,\Psi H_m)'$ である．

（1） 効用関数のパラメーターの比較静学

本ケースにおける計画問題（P-2）を以下のように定義する．$U(X,\alpha)$ を効用関数，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ を効用関数のパラメーターと考える．財 X_i に対する需要関数は次の問題の最適解を求めることによって得られる．

Maximize $U(X,\alpha)$

subject to $g_j(X)=0,\ (j=1,\cdots,m) \quad\cdots(28)$

このとき1階の最適条件は

$$h_i=U^i-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g_j^i=0,\ (i=1,\cdots,n)$$

$$H_j=-g_j(X)=0,\ (j=1,\cdots,m) \quad\cdots(29)$$

となる．ここで，パラメーター α_s が

$$\overline{\alpha}_s=\alpha_s+\varepsilon_s,\ (s=1,\cdots,r) \quad\cdots(30)$$

と変化し，α_s の変化が変数 X_i に及ぼす作用を

$$\overline{X}_i=\theta_i(X,\alpha_s+\varepsilon_s),$$

$$(i=1,\cdots,n;s=1,\cdots,r) \quad\cdots(31)$$

と定義する．さらに，恒等変換 $\overline{X}_i=X_i$ の近傍で，

$$\overline{X}_i=X_i+(\partial\theta_i/\partial\varepsilon_s)_0\varepsilon_s=X_i+\xi_{is}\varepsilon_s \quad\cdots(32)$$

と近似する．変換（31）の代替的パラメーター変化

$$h_i(X,\lambda,\alpha_s+\varepsilon_s)=h_i(\overline{X},\lambda)$$

$$H_j(X,\alpha_s+\varepsilon_s)=H_j(\overline{X}) \quad\cdots(33)$$

が成立すると考えた場合，補題1より

$$h_i^s=\Phi_s h_i,\ (i=1,\cdots,n) \quad\cdots(34)$$

が成立する．ただし，$\Phi_s=\sum_k\xi_{ks}\partial/\partial X_k$ である．このとき，定理1より比較静学の基本方程式

$$\begin{bmatrix} U^{ik}-\sum_j\lambda_j g_j^{ik} & -g_j^i \\ -g_j^k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial X_k/\partial\alpha_s \\ \partial\lambda_j/\partial\alpha_s \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} \Phi_s h_i \\ \Phi_s H_j \end{bmatrix} \quad\cdots(35)$$

を得る．$g_j^i=\partial g_j/\partial X_i$ である．$\partial M/\partial\alpha_s=(\partial X_k/\partial\alpha_s, \partial\lambda_j/\partial\alpha_s)'$，式（35）の左辺第1項を W, $\Phi_s(h,H)=(\Phi_s h_1,\cdots,\Phi_s H_m)$ と表記すれば，比較静学の評価式は，

$$\partial M/\partial\alpha_s=-W^{-1}\Phi_s(h,H) \quad\cdots(36)$$

となる．また，パラメーター $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ が同時に変化した場合の比較静学の評価式は次式で示される．

$$\partial M/\partial\alpha=-W^{-1}\Psi(h,H) \quad\cdots(37)$$

系1：問題（P-2）における効用関数の嗜好パラメーター α_s が変化した場合の比較静学の評価式は式（36）により，パラメーター α が同時に変化した場合の評価式は式（37）により恒等変換の近傍で近似できる．

先述のSatoの適用例では事前に与えたLie変換から生成される群を用いて効用関数を定義しているが，本稿の考察により群表現されていない一般の効用関数を用いても効用関数のパラメーターの比較静学分析が可能であることであることが判明した．実証分析における適用性という視点からは本稿の方法の方が望ましいと考える．嗜好変化を計測する場合，Satoの方法では計測に用いることのできるLie変換の形式は1種類のみである．異なる嗜好変化のタイプを想定しようとすれば，効用関数の定式化そのものを変更しなければならない．一方，本稿で述べた方法では，モデルで用いた効用関数に対して種々の形式のLie変換を定義することが可能であり，どの形式がいいかを実際にデータに基づいて実証的に検証できる．なお，モデルのパラメーターの値が変化するような動的モデルの推計は，パラメーター写像（parameter mapping）[7]を用いることによりアプローチできる．本稿で提案した方法はさらに，嗜好変化を内蔵したようなパラメーター写像を含む動学モデルの推定問題に応用できる．パラメーター写像の研究に関しては今後の課題としたいが，本稿の4. では小売業立地モデルにおいて嗜好変化の影響を測定する方法を簡単に示すことと

する．

（2） 資源パラメーターの比較静学

ここでは効用最大化問題における資源パラメーターの外生的な変化が，まず消費者の個々の財 X_i（$i=1, \cdots, n$）に対する嗜好を変化させ，その結果として消費行動が変化する場合の比較静学の方法を提案する．そこで，次のような効用最大化問題（P-3）を考えよう．

$$\text{Maximize} \quad U(X)$$
$$\text{subject to} \quad g_s(X)=\alpha_s, \quad (s=1, \cdots, m) \cdots\cdots (38)$$

この問題の1階の最適条件は同じく式（29）で与えられる．ここで，パラメーター α_s の変化を

$$\bar{\alpha}_s=\alpha_s+\varepsilon_s \cdots\cdots (39)$$

と定義する．このとき，パラメーター ε_s の変化によって生じる嗜好変化を Lie 変換を用いて

$$\bar{X}_i=\theta_i(X, \alpha_s+\varepsilon_s) \cdots\cdots (40)$$

と記述する．当然のことながら $\varepsilon_s=0$ のとき，式（40）は恒等変換 $\bar{X}_i=X_i$ となる．ここで，式（40）を ε_s に関して恒等変換の近傍で展開し一次の項までとれば，

$$\bar{X}_i=X_i+(\partial\theta_i/\partial\varepsilon_s)_0\varepsilon_s$$
$$=X_i+\xi_{is}\varepsilon_s \cdots\cdots (41)$$

となる．本ケースの場合，Lie 変換（41）が代替的パラメーター変化に直接作用する．任意の Lie 変換が常に代替的パラメーター変化を満足するとは限らない．そこで，問題の第 s 番目の代替的パラメーター変化，$H_s(X, \varepsilon_s)=\alpha_s+\varepsilon_s-g_s(\bar{X})$ が任意の ε_s に対して不変である条件を求める．任意の ε_s に対して代替的パラメーター変化（11）が恒等的に成立するための条件は，$\varepsilon_s=0$ の近傍で $\partial H_s(X, \varepsilon_s)/\partial\varepsilon_s=0$ が成立することである．つまり，

$$\partial H_s/\partial\varepsilon_s=\alpha_s-g_s(X)+\left(1-\sum_{k=1}^{n}g_s^k\xi_k\right)_0\varepsilon_s$$
$$=0 \cdots\cdots (42)$$

が成立する．$H_s(X, 0)=\alpha_s-g_s(X)=0$ より

$$\sum_{k=1}^{n}g_s^k\xi_k=1 \cdots\cdots (43)$$

を得る．つまり，嗜好変化は任意の関数をとり得るのではなく，式（43）を満足するものに限られる．式（43）が成立するという条件の下で

$$h_i(X, \lambda, \alpha_s+\varepsilon_s)=h_i(\bar{X}, \lambda)$$
$$H_j(X, \alpha_s+\varepsilon_s)=H_j(\bar{X}) \cdots\cdots (44)$$

が成立する．このとき，

$$(\partial\bar{h}_i/\partial\alpha_s)_0=(\textstyle\sum_k\partial\bar{h}_i/\partial\bar{X}_k\partial\bar{X}_k/\partial\alpha_s)_0$$
$$=\textstyle\sum_k\xi_{ks}\partial h_i/\partial X_k=\Phi_s h_i \cdots\cdots (45)$$
$$(\partial\bar{H}_j/\partial\alpha_s)_0=\Phi_s H_j \cdots\cdots (46)$$

となる．パラメーター α_s が変化したときの比較静学の評価式は以下のようになる．

$$\partial M/\partial\alpha_s=-W^{-1}\Phi_s(h, H) \cdots\cdots (47)$$

ただし，$\Phi_s(h, H)=(\Phi_s h_1, \cdots, \Phi_s H_m)$ である．パラメーターが同時に変化したときの比較静学の評価式は

$$\partial M/\partial\alpha=-W^{-1}\Psi(h, H) \cdots\cdots (48)$$

となる．なお，$\Psi(h, H)=(\Psi h_1, \cdots, \Psi H_m)$ である．ここに次の系を得る．

> 系2：問題（P-3）において資源パラメーター α_s が変化した場合の比較静学の評価式，およびパラメーター α が同時に変化した場合の評価式は，式（43）を満足する無限小変換に対して恒等変換の近傍でそれぞれ式（47）および式（48）で近似できる．

（1）で示した効用関数のパラメーターの比較静学と異なり，本ケースの場合，Lie 変換の形式に制約条件を付加する必要が生じる．この点が2. で示した「外生的嗜好変化の比較静学」と異なる点である．すなわち，嗜好変化をモデルのパラメーターと無関係にモデルの外部で定義する場合には，Lie 変換の形式を自由に選べる．しかし，嗜好変化を内生化する場合は，資源項の変化と Lie 変換が同時に代替的パラメーター変化を恒等的に満足させる必要が生じる．その結果，モデル自体が，その中で起こり得る嗜好変化のタイプを限定することとなる．ここでは，制約条件式，$g_s(X)$ に含まれるパラメーターの比較静学については言及していない．この場合，制約式の完全変換可能性（holotheticity）[4]（第2章）について言及する必要があり，本稿の域を越える．この問題に関しては今後の課題としたい．

4. 嗜好変化を内生化した比較静学の適用事例

（1） 効用関数のパラメーターの比較静学（小売業立地モデルへの適用）

過去の異なる時間断面を対象として都市モデルを複数個作成した場合，異なるパラメーターの値をもつモデルが作成できる場合がある．モデルを作成した時点によってパラメーターの値が異なる原因としては種々考えられるが，ここではそれが家計の嗜好の変化によって生じている場合を考えよう．A.G. Wilson (1978) は伝統的な小売業立地モデルである Huff モデルを拡張し，それと同値な解を与える数理計画問題を提案した[8]．彼の提案したアプローチの方法は小売業立地モデルのみならず空間相互モデル一般に適用可能であるが，ここでは以下のような小売業立地モデルを取り上げる．

$$\text{Maximize} \quad Z=-1/\beta\textstyle\sum_{ij}S_{ij}\ln S_{ij}+$$
$$\textstyle\sum_{ij}S_{ij}(\alpha/\beta\ln W_j-C_{ij})$$
$$\text{subject to} \quad \textstyle\sum_j S_{ij}=O_i, \quad (i=1, \cdots, m)$$
$$\textstyle\sum_j W_j=W \cdots\cdots (49)$$

ここに，S_{ij}：ゾーン ij 間トリップ数，O_i：ゾーン i における発生トリップ数，W_j：ゾーン j における小売業

数，W：地域全体での小売業数，C_{ij}：ゾーン ij 間の費用距離である．また，α：商店の規模に関する魅力度を示すパラメーター，β：距離抵抗に関するパラメーターである．さらに，Wilson は式（49）の目的関数がランダム効用理論から導出できる地域の総消費者余剰と同値であることを示している．

a）小売業立地モデルの比較静学　問題（49）の制約条件のラグランジュ乗数を λ_i, μ, ラグランジュ関数を L とすれば，1階の最適条件は，

$$\partial L/\partial S_{ij}=-\ln S_{ij}/\beta+\alpha/\beta\ln W_j-\lambda_i-1/\beta-C_{ij}=0,$$
$$\partial L/\partial W_j=\alpha/\beta\textstyle\sum_i S_{ij}/W_j-\mu=0,$$
$$\partial L/\partial\lambda_i=O_i-\textstyle\sum_j S_{ij}=0$$
$$\partial L/\partial\mu=W-\textstyle\sum_j W_j=0 \quad\cdots\cdots(50)$$

となる．目的関数のパラメーター α, β が外生的に

$$\overline{\alpha}=\alpha+\varepsilon_1,\ \overline{\beta}=\beta+\varepsilon_2 \quad\cdots\cdots(51)$$

と変化したとき，嗜好変化が変数 S_{ij}, W_j に及ぼすインパクトを Lie 変換により

$$\overline{S}_{ij}=\theta_{ij}(S_{ij},\ W_j,\ \alpha+\varepsilon_1,\ \beta+\varepsilon_2)$$
$$\overline{W}_j=\theta_j(S_{ij},\ W_j,\ \alpha+\varepsilon_1,\ \beta+\varepsilon_2) \quad\cdots\cdots(52)$$

と記述する．いま，2つの異なる時点で観測した変数値の組を（S_{ij}, $\overline{S}_{ij}$），（W_j, $\overline{W}_j$）とし，これらのデータに基づいて2時点でそれぞれ別のモデルを推計したとしよう．推計したモデルのパラメーターの組をそれぞれ（α, $\overline{\alpha}$），（β, $\overline{\beta}$）とする．簡単のために観測される O_i, W は比較静学の前後で一定と考える．当然のことながら，以下の議論は O_i, W の値も変化する場合にも，前述の資源パラメーターが変化する場合の比較静学の方法と本ケースの方法を組み合わせることにより容易に拡張可能である．いま，パラメーター α, β を嗜好変化を示す代理指標と考えよう．式（52）は，嗜好変化をその代理パラメーターである α, β の変化として表現し，嗜好変化とそれによる行動の変化を α, β をパラメーターとする Lie 変換として表現する方法を示している．

ここで，$\xi_{ij1}=\partial\theta_{ij}/\varepsilon_1$, $\xi_{ij2}=\partial\theta_{ij}/\varepsilon_2$, $\xi_{j1}=\partial\theta_j/\partial\varepsilon_1$, $\xi_{j2}=\partial\theta_j/\partial\varepsilon_2$ と定義すれば，式（52）は

$$\overline{S}_{ij}=S_{ij}+\xi_{ij1}\varepsilon_1+\xi_{ij2}\varepsilon_2$$
$$\overline{W}_j=W_j+\xi_{j1}\varepsilon_1+\xi_{j2}\varepsilon_2 \quad\cdots\cdots(53)$$

と近似できる．ここで，系1よりパラメーター ε_s（$s=1$, 2）が単独に変化した場合の比較静学の評価式は

$$\partial M/\partial\varepsilon_s=-W^{-1}\Phi_s(h,\ H)\quad(s=1,\ 2)\quad\cdots\cdots(54)$$

ここに，W は $(m+1)^2\times(m+1)^2$ 行列であり，その内容は式（50）を S_{ij} あるいは W_j に関して偏微分することにより得られる．$\Phi_s(h,\ H)$ は $(m+1)^2$ 次元のベクトルで，$\Phi_s(h,\ H)=(\Phi_{ijs}h_{ij},\ \Phi_{ijs}h_j,\ \Phi_{ijs}H_i,\ \Phi_{ijs}H_\mu)$ となる．$\Phi_s(h,\ H)$ の各要素を具体的に求めれば，

$$\Phi_{ijs}h_{ij}=-1/(\beta S_{ij})\xi_{ijs}+\alpha/(\beta W_j)\xi_{js}$$
$$\Phi_{ijs}h_j=\alpha/(\beta W_j)\textstyle\sum_i\xi_{ijs}-\alpha/(\beta W_j^2)(\sum_i S_{ij})\xi_{js}$$
$$\Phi_{ijs}H_i=-\textstyle\sum_j\xi_{ijs}$$
$$\Phi_{ijs}H_\mu=-\textstyle\sum_j\xi_{js}\quad\cdots\cdots(55)$$

となる．ここに，$h_{ij}=\partial L/\partial S_{ij}$, $h_j=\partial L/\partial W_j$, $H_i=\partial L/\partial\lambda_i$, $H_\mu=\partial L/\partial\mu$ である．またパラメーター α, β が同時に変化した場合の比較静学の評価式は

$$\partial M/\partial\varepsilon=-W^{-1}\{\Phi_1(h,\ H)+\Phi_2(h,\ H)\}$$
$$=-W^{-1}\Psi(h,\ H)\quad\cdots\cdots(56)$$

以上の成果に基づいて効用関数のパラメーターが変化した場合の各変数の変化の動向を比較静学的に検討できる．ここでは紙面の都合上，比較静学の結果についての考察は省略することとする．

b）無限小変換の推計方法　以上で示した比較静学の方法は嗜好変化（つまり無限小変換）を推計する方法を与える．なお，本稿は Lie 変換を用いた比較静学の方法を提案することを目的としており，ここでは嗜好変化の実証的な推計方法の基本的な考え方を述べるにとどめ，その詳細に関しては別の機会に譲ることとする．

さて，異なる時点におけるトリップ分布（S_{ij}, $\overline{S}_{ij}$）と小売業分布（W_j, $\overline{W}_j$）が観測されたと考える．いま，$\partial M/\partial\varepsilon=(\overline{S}_{ij}-S_{ij},\ \overline{W}_j-W_j)$ と近似すれば，$\partial M/\partial\varepsilon$ は観測値より計算可能である．2つの時点で異なるモデルを作成し，パラメーター値（α, $\overline{\alpha}$），（β, $\overline{\beta}$）を推計すれば，W^{-1} は観測値 W_j, S_{ij} を用いて算定できる．式(56)の右辺の $\Psi(h,\ H)$ は無限小変換 ξ_{ijs}, ξ_{js} に関する線形式であり，ξ_{ijs}, ξ_{js} の係数も観測値，α, β を用いて算定できる．無限小変換は $\xi_{ijs}=\partial\theta_{ij}/\partial\varepsilon_s$, $\xi_{js}=\partial\theta_j/\partial\varepsilon_s$ であり，それぞれ S_{ij}, W_j, α, β の関数 τ_{ijs}, ρ_{js} として，

$$\xi_{ijs}=\tau_{ijs}(S_{ij},\ W_j,\ \alpha,\ \beta,\ \zeta)+\gamma_{ijs}$$
$$\xi_{js}=\rho_{js}(S_j,\ W_j,\ \alpha,\ \beta,\ \zeta)+\gamma_{js}\quad\cdots\cdots(57)$$

と記述しよう．なお，$S_j=\sum_i S_{ij}$；γ_{ijs}, γ_{js} は誤差項，ζ は式 (57) に含まれる未知パラメーターである．さらに，式（57）を式（56）に代入し，式（57）に含まれる ζ を未知数と考えると，式（56）はこの未知数に関する観測方程式と考えることができる．未知数 ζ の値はたとえば最小二乗法により推計できる．これにより，モデルの嗜好パラメーター値の変化の原因となった嗜好変化を実証的にモデル化できる．しかし，効用関数のパラメーターの比較静学からは無限小変換 ξ_{ijs}, ξ_{js} の形を特定できない．このため，τ_{ijs}, ρ_{js} の関数形をいろいろ想定し，無限小変換の推計精度を比較検討する必要があろう．

（2） 資源パラメーターの比較静学（住宅立地行動分析への適用）

新都市経済学的な視点からの住宅立地行動に関する研究は Alonso (1964)[9] を契機とし，多くの研究者によって拡張，精緻化されてきた．住宅立地行動に関する比較静学分析[10]も数多くなされてきている．しかし，嗜好変化を直接扱った比較静学の研究はそれほど多くなく，著

者の知るかぎり若干の研究[11),12)]があるのみである．Lie変換による比較静学分析として Kobayashi et al. (1987)[6)] がある．これらの研究はいずれも嗜好変化を内生化しておらず，嗜好変化の比較静学の方法としては限界がある．ここでは，嗜好変化を内生化した比較静学の方法を住宅立地行動の分析に適用する．なお，本稿は比較静学の適用方法を示すことを目的としており，議論の展開をわかりやすくするために住宅立地モデルをできるだけ簡単化して考察をすすめることとする．

a）住宅立地行動モデルの定式化　ここでは従来の研究[9)]と同様に，（ i ）家計は CBD で勤務し CBD から放射上に広がった交通経路に沿って立地する，（ ii ）家計は予算制約の下で住宅サービス，CBD からの時間距離によって構成される効用関数を最大化するという仮定を設ける．基本モデルを以下のように定式化しよう．

$$\text{Maximize} \quad U(Q, X)$$
$$\text{subject to} \quad Y=PQ+C(X) \cdots\cdots(58)$$

ここに，Y：所得，Q：住宅サービス，X：CBD からの時間距離，D：住宅サービスのレント，C：立地点固有に要する費用（地代等）である．通常の住宅立地モデルでは C に通勤費用が含まれるがここでは考慮していない等，基本モデルは過度に簡単化しており，現象的にはいろいろ問題はある．すでに述べたように，ここでは嗜好変化を内生化した比較静学の適用方法を示すことに主眼を置いており，比較静学分析そのものを考察の対象としていないことを断っておく．もちろん，本研究で提案する比較静学の方法論を，実際的なモデルに適用できることはいうまでもないが，それに関しては別の機会に譲ることとする．また，過去の研究と同様に，費用関数 C，効用関数 U は次の条件を満足すると仮定する．

$$dC/dX \geqq 0,\ U^X \leqq 0 \cdots\cdots(59)$$

$$\partial U^Q/\partial Q \leqq 0,\ \partial U^Q/\partial X \leqq 0,\ \partial U^X/\partial X \geqq 0 \cdots\cdots(60)$$

ただし，$U^Q=\partial U/\partial Q$，$U^X=\partial U/\partial X$ である．ここで，ラグランジュ関数を以下のように定義する．

$$L=U(Q, X)+\lambda(Y-PQ-C(X)) \cdots\cdots(61)$$

λ はラグランジュ乗数である．1階の最適条件は

$$h_Q(Q, X, \lambda)=U^Q-\lambda P=0$$
$$h_X(Q, X, \lambda)=U^X-\lambda C^X=0$$
$$H_\lambda(Q, X, \lambda)=Y-PQ-C(X)=0 \cdots\cdots(62)$$

ここで，所得 Y の変化を次式で表わそう．

$$\overline{Y}=Y+\varepsilon \cdots\cdots(63)$$

以上のようなパラメーター変化に対する嗜好変化を

$$\overline{Q}=\theta_Q(Q, X : \varepsilon)$$
$$\overline{X}=\theta_X(Q, X : \varepsilon) \cdots\cdots(64)$$

と記述する．この場合の代替的パラメーター変化は

$$h_Q(Q, X, \lambda, \varepsilon)=h_Q(\overline{Q}, \overline{X}, \lambda)$$
$$h_X(Q, X, \lambda, \varepsilon)=h_X(\overline{Q}, \overline{X}, \lambda)$$
$$H_\lambda(Q, X, \varepsilon)=H_\lambda(\overline{Q}, \overline{X}) \cdots\cdots(65)$$

となる．$\xi_Q=\partial\theta_Q/\partial\varepsilon$，$\xi_X=\partial\theta_X/\partial\varepsilon$ と定義し，式（64）を

$$\overline{Q}=Q+\xi_Q\varepsilon,\ \overline{X}=X+\xi_X\varepsilon \cdots\cdots(66)$$

と近似する．ここで系 2 より，無限小変換は式（43）を満足するものでなければならない．すなわち，

$$P\xi_Q+C^X\xi_X=1 \cdots\cdots(67)$$

が成立しなければならない．式（67）を変形すれば，

$$\xi_Q=1/P-C^X\xi_X/P \cdots\cdots(68)$$

となる．式（68）は基本モデルと整合のとれる嗜好変化のパターンを示している．逆にいえば，実際に起こっている嗜好変化のパターンが式（68）を満足しない場合には基本モデルを用いることができない．式（68）は効用関数 U を含まず，制約条件に含まれている定数 P と関数 C のみを含んでいる．つまり，嗜好変化のパターンは家計の効用関数の形に依存しない．家計の行動を規制している制約条件が家計の嗜好変化のパターンを決定するわけである．近年，住宅立地行動モデルが拡張・精緻化され数多くのモデルが提案されているが，これらのモデルが許容する嗜好変化のタイプを考察することは意義のあることだと考える．しかし，これに関する詳細は本稿の域を越えるので，ここではこれ以上言及しない．

b）比較静学の評価式の誘導　式（62）を Q, X に関して偏微分し，系 2 を適用すれば，パラメーター ε が変化した場合の比較静学の基本方程式

$$\begin{bmatrix} U^{QQ} & U^{QX} & -P \\ U^{QX} & U^{XX}-\lambda C^{XX} & -C^X \\ -P & -C^X & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial Q/\partial\varepsilon \\ \partial X/\partial\varepsilon \\ \partial\lambda/\partial\varepsilon \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} \Phi h_Q \\ \Phi h_X \\ \Phi h_\lambda \end{bmatrix} \cdots\cdots(69)$$

を得る．Φ は無限小作用素 $\Phi=\xi_Q\partial/\partial Q+\xi_X\partial/\partial X$ である．いま，式（69）を $W\partial M/\partial\varepsilon=-\Phi(h, H)$ と行列表示すれば，比較静学の評価式

$$\partial M/\partial\varepsilon=-W^{-1}\Phi(h, H) \cdots\cdots(70)$$

を得る．ここに，W^{-1} は (3×3) 行列であり，その (i, j) 要素を以下に示す．

$$\tilde{W}_{11}=(C^X)^2/|W|$$
$$\tilde{W}_{12}=PC^X/|W|$$
$$\tilde{W}_{13}=(PU^{XX}-\lambda PC^{XX}-C^XU^{QX})/|W|$$
$$\tilde{W}_{21}=PC^X/|W|$$
$$\tilde{W}_{22}=-P^2/|W|$$
$$\tilde{W}_{23}=(C^XU^{QQ}-PU^{QX})/|W|$$
$$\tilde{W}_{31}=(PU^{XX}-\lambda PC^{XX}-C^XU^{QX})/|W|$$
$$\tilde{W}_{32}=(C^XU^{QQ}+PU^{QX})/|W|$$
$$\tilde{W}_{33}=\{U^{QQ}(U^{XX}-\lambda C^{XX})-U^{QX}\}/|W| \cdots\cdots(71)$$

ただし，$|W|$ は行列式である．さらに，系 2 に基づいて $\Phi(h, H)$ の各要素を具体的に求めれば，

$$\Phi_1 h_Q=\xi_Q U^{QQ}+\xi_X U^{QX}$$
$$\Phi_2 h_X=\xi_Q U^{QX}+\xi_X(U^{XX}-\lambda C^{XX})$$

$$\Phi_3 H_\lambda = 1-(P\xi_Q+\xi_X C^X) \quad (=0) \cdots\cdots(72)$$

となる．なお，ここで比較のため従来の比較静学の方法による所得変化の評価式を求める．式（8）における $\partial N/\partial\varepsilon$ を求めると

$$\partial N/\partial\varepsilon=(0,\ 0,\ 1)' \cdots\cdots(73)$$

となり，次式のような評価式を得る．

$$\partial M/\partial\varepsilon=(-\tilde{W}_{13},\ -\tilde{W}_{23},\ -\tilde{W}_{33})' \cdots\cdots(74)$$

すなわち，通常の資源項の比較静学では最適解の変化は逆行列 W^{-1} の第3列の要素のみが関連している．

c）比較静学の評価　ここで，所得が変化した場合の比較静学分析を行うために，まず行列式 W を第3列に関して展開すれば，

$$|W|=P\begin{vmatrix} U^{QX} & U^{XX}-\lambda C^{XX} \\ P & C^X \end{vmatrix}+C^X\begin{vmatrix} U^{QQ} & U^{QX} \\ -P & -C^X \end{vmatrix} \cdots\cdots(75)$$

を得る．従来の研究と同様に式 (59), (60) を仮定する．また，U^{XX} は通勤時間に関する限界効用の変化の度合を示しており，その値は十分に小さい（通勤時間の線形関数で十分に近似できる）と仮定しよう．いま，U^{XX} が十分に小さいと仮定すれば，$|W|>0$ となる．同様にして $\tilde{W}_{11}>0$, $\tilde{W}_{12}<0$, $\tilde{W}_{21}<0$, $\tilde{W}_{22}<0$ を得る．さて，式 (72) において $\Phi_3 H_\lambda=0$ を考慮すれば，

$$dQ/d\varepsilon=-(\tilde{W}_{11}\Phi_1 h_Q+\tilde{W}_{12}\Phi_2 h_X)$$
$$dX/d\varepsilon=-(\tilde{W}_{21}\Phi_1 h_Q+\tilde{W}_{22}\Phi_2 h_X) \cdots\cdots(76)$$

となる．いま，所得の変化により生じる嗜好変化のパターンとして，（ⅰ）$\xi_Q\geq 0$, $\xi_X\geq 0$,（ⅱ）$\xi_Q<0$, $\xi_X\geq 0$,（ⅲ）$\xi_Q\geq 0$, $\xi_X<0$ という3つの場合を考えよう．なお，式 (68) および，$P>0$, $C^X>0$ の仮定より $\xi_Q<0$, $\xi_X<0$ の場合は起こり得ない．$dQ/d\varepsilon$, $dX/d\varepsilon$ の符号を評価すれば，それぞれ（ⅰ）$dQ/d\varepsilon\gtrless 0$, $dX/d\varepsilon<0$,（ⅱ）$dQ/d\varepsilon\gtrless 0$, $dX/d\varepsilon\gtrless 0$,（ⅲ）$dQ/d\varepsilon\gtrless 0$, $dX/d\varepsilon\gtrless 0$ となる．ここに，$\gtrless$ はその符号が一意的には決まらないことを意味し，その正負は式 (72) において，$\xi_Q U^{QQ}+\xi_X U^{QX}$，あるいは，$\xi_Q U^{QX}+\xi_X(U^{XX}-\lambda C^{XX})$ という2つの項の符号によって決まる．換言すれば，その符号は嗜好変化の方向とその強さと密接な関係があるわけである．

最後に，問題 (58) に従来の比較静学の方法を適用し，上述の結果と比較してみよう．この場合，$dQ/d\varepsilon$, $dX/d\varepsilon$ の符号を評価すれば，式 (74) から $dQ/d\varepsilon>0$, $dX/d\varepsilon<0$ を得る．すなわち，所得が増加すれば住宅の質が増加し，通勤距離は短くなる．つまり，家計はより都心に近く，かつより質の高い住宅を取得しようとする結果が得られる．しかしながら，嗜好変化を考慮した場合は嗜好変化のパターン（強さとその変化の方向）によって比較静学の結果は異なる．もちろん，問題の設定いかんによって異なった結果が得られることはいうまでもないが，少なくとも式 (58) に示したような簡単な問題においても消費者の嗜好変化のパターンは住宅需要の形成に重要でかつ複雑な影響を与えることが判明した．

5. おわりに

本研究は，嗜好変化を内生化した比較静学の方法に関する理論的な枠組について考察したものである．従来，嗜好変化のモデル化の重要性に関しては，数多くの研究者によって指摘されてきたものの，比較静学に関する研究において嗜好変化はきわめて限定された形で取り扱われてきたのが現状である．たとえば，DeSalvo (1985)[12] は嗜好変化を直接扱った比較静学の方法を研究しているが，彼の研究はある特殊なパターンに従う嗜好変化を取り扱っているにすぎず，一般的な嗜好変化の枠組を提示するに至っていない．また，Sato[4] の研究は Lie 変換を用いた嗜好変化の比較静学の一般的な枠組を与えるものであるが，そこでは外生的な嗜好変化を扱うにとどまっている．本研究では Sato の方法を基礎として Sato とは異なった解釈と方法論を提示するとともに，嗜好変化を内生化した比較静学の数学的な枠組について理論的に考察したものである．

さて，本研究では，嗜好変化を内生化した比較静学の方法を，具体的に（ⅰ）効用関数のパラメーターがシフトした場合，（ⅱ）資源パラメーターがシフトした場合を対象として述べるとともに，比較静学の適用事例として，（ⅰ）小売業立地モデル，（ⅱ）住宅立地行動モデルを取り上げその適用方法を示した．特に，資源パラメーターの比較静学においては，基本モデルを不変に保つ嗜好変化のパターンは，基本モデルの効用関数の形ではなく，制約条件をどのように定式化するかという問題と密接な関係があることを明らかにした．本研究で提案した比較静学の方法は，たとえば，技術変化といったようにシステムの外部の変化がシステムの内部の変数の意味（有効値）を変化させるような問題に幅広く適用可能である．また，都市・交通モデリングの分野でも，例として取り上げた以外の問題にも応用が可能であり，このような応用研究に関しては，稿を改めて発表したいと考える．

最後に，今後の研究課題に関してとりまとめておく．まず，第一に制約条件の資源パラメーターに関する比較静学の方法については説明したものの，制約条件式に含まれるパラメーターの比較静学に関しては何も言及していない．この場合，比較静学分析を行うためには，まず制約条件式の構造の不変性を検討しなければならない．この問題は数学的には Lie 群上での関数の完全変換可能性（holotheticity）[4] を議論する問題に帰着する．これに関しても現在知見をいくつか得ており[13),14)]，別の機会に発表する予定である．第二に，本研究では資源パラメーターのシフトとともに効用水準も変化することを前

提としている．しかしながら，本研究での方法論を実用化するためには，効用関数が嗜好変化に対して不変であることが望ましい場合もある．たとえば，アクセシビリティ指標は多くの交通モデルや土地利用モデルに用いられているが，アクセシビリティ指標が嗜好変化に対して不変であれば，すなわち，嗜好変化が起こっても同じ効用水準を与えるのであれば，嗜好変化に対して不変性をもつモデリングが可能である．これに関しては，別の機会に発表したいと考える．最後に，本研究ではある無限小時間 δt における無限小のパラメーター変化を対象とした比較静学の方法を提案している．このままでは，離散的に変化する大規模な外的インパクトの比較静学には用いることができない．これは，ここで提案した方法論のみの問題点ではなく，比較静学分析の方法が一般的にもっている問題でもある．しかしながら，一般に個人行動には習慣性がある[15]とされており，嗜好変化を議論する限り無限小変換の存在を仮定しても差し支えないと考える．もちろん，本研究で提案した方法を連続性が仮定できないような問題にも拡張可能である．Anderson が提案したように，Envelope 理論を用いた方法[16]の適用も考えられる．これに関しては今後の課題としたい．

なお，本研究の遂行にあたって Prof. Å. Andersson（Umeå 大学），Prof. Lakshmanan（Boston 大学），Prof. Fujita（Pennsilvania 大学）との議論を通じて貴重なコメントを得た．本研究の一部は Umeå 大学 CERUM の Working Paper[6] として発表しており，Prof. B. Johansson（CERUM 所長）より多くの助言を得た．また，本稿の査読者の方からも貴重なコメントをいただいた．最後に，本研究の遂行にあたっては文部省科学研究費（奨励研究（A）62750523）の補助を得ている．ここに，感謝の意を表します．

参考文献

1) Samuelson, P.：Foundations of Economic Analysis, Harvard University Press, 1947.
2) Silberberg, E.：A Revision of comparative static methodology in economics, or how to do comparative statics on the back of an envelope, J. Eco. Theory, Vol. 7, pp. 159～172, 1974.
3) たとえば，吉田哲夫：交通施設の総合的評価手法に関する研究，京都大学博士論文，1985.
4) Sato, R.：Theory of Technical Change and Economic Invariance-Application of Lie Groups, Academic Press, 1981.
5) 小林潔司・張　衛彬・吉川和広：Lie 群論による世帯の嗜好変化とデベロッパーの行動に関する理論的研究，土木計画学研究・論文集，No. 4，pp. 141～148，1986.
6) Kobayashi, K., Zhang, W. B. and Yoshikawa, K.：A New Comparative Static Approach to Household's taste change by Lie Group Theory, Infrastructure and Building Sector Studies, No. 7, CERUM, Sweden, 1987.
7) Bennett, R. J.：Spatial Time Series, Analysis-Forecasting-Control, Pion Limited, 1978.
8) Wilson, A. G., Coelho, J. D., MacGrill, S. M. and Williams, H. C. W. L.：Optimization in Locational and Transport Analysis, John Wiley & Sons, 1981.
9) Alonso, A.：Location and Land Use-Toward a General Theory of Land Rent, Harvard University Press, 1964.
10) たとえば，Yamada, H.：On the theory of residential location：Accessibility, space, leisure, and environmental quality, J. of Reg. Sci., Vol. 25, No. 2, pp. 159～173, 1985.
11) Muellbauer, J.：The cost of living and taste and quality change, J. Eco. Theory, Vol. 10, pp. 269～283, 1975.
12) DeSalvo, J. S.：A Model of urban household behavior with leisure choice, J. Reg. Sci., Vol. 25, No. 2, pp. 159～173, 1985.
13) Zhang, W. B., Kobayashi, K. and Yoshikawa, K.：Housing production function and taste changes of households, Kyoto Univ. Research Report, No. 87-PT-01, 1987.
14) 小林潔司・張　衛彬：嗜好変化が住宅サービスの生産に及ぼす影響に関する二三の考察，第 42 回土木学会年次学術講演会講演概要集，pp. 396～397，1987.
15) たとえば，El-Safty, A. E.：Adaptive behavior, demand and preferences, J. Eco. Theory, Vol. 13, pp. 298～318, 1976.
16) Anderson, R. K. and Takayama, A.：Comparative static with discrete jumps in shift parameters, or, how to do economics on the sadle (-point), J. Eco. Theory, Vol. 21, pp. 491～509, 1979.

（1987. 1. 6・受付）