

## Kalman フィルター有限要素法による逆解析と観測節点配置

## BACK ANALYSIS BY KALMAN FILTER-FINITE ELEMENTS AND A DETERMINATION OF OPTIMAL OBSERVED POINTS LOCATION

村上 章\*・長谷川高士\*\*

By Akira MURAKAMI and Takashi HASEGAWA

This paper focuses on the following two topics : one is a new back analysis method using Kalman Filter-Finite Elements ; the other is a determination of optimal location of observed nodal points for back analysis. A formulation is shown on Finite Element Method in conjunction with Kalman filter for two dimensional and plane strain problem, where Lamé's constants of non-homogeneous regions are solved. In the numerical procedure, the location of observed nodal points is determined taking into account the 'sensitivity' coefficients. These coefficients are defined as the derivatives of observed displacements by unknown parameters. The role and the meaning of 'sensitivity' coefficients in the Kalman Filter-Finite Elements are also discussed. The numerical performances for various problems in the field of geomechanics are described, and the applicability of the above procedure to some back analysis problems is examined on the comparison with the results by another algorithms.

*Keywords : Kalman filter, FEM, back analysis, observation, sensitivity*

## 1. はじめに

地盤の変形あるいは土中水の浸透挙動を予測する手段として、有限要素法による数値解析法が種々の場に対して発達してきた。このような数値解析の精度は、入力物性定数の正確さによるところが大きいけれども、実地盤において信頼性の高い諸物性値やその位置を知ることが、必ずしも常に可能ではない。

この問題を解決するために、観測される変位や地下水位をもとに、通常の有限要素解析とは逆に入力物性定数を求める逆解析手法がいくつか提案された。これらの手法は、一般に次の3つの範ちゅうに分類される：1) 直接法<sup>1),2)</sup> (通常の有限要素解析と逆の定式化により未知物性定数を求める)；2) 間接法<sup>3),4)</sup> (特別な定式化を必要とせず、数理計画法における探索法を用いる)；3) ベイズアプローチ<sup>5),6)</sup> (観測量の誤差を考慮することが可能であり、得られた未知数の信頼度についても情報を与える)。これらの手法はいくつかの実事例について、それぞれの成果を挙げている。

上記の逆解析法は、それぞれの方法ごとに得失を有し

ている：1) については、目的に応じた定式化が必要であり、観測にかかわる誤差を考慮できないので、解析結果が計測誤差の影響を顕著に受ける；2) については、定式化が非線形問題に対しても、線形問題と全く同じでよい利点がある。しかし、しばしば計算時間が長くなることや観測誤差に関する考慮が可能でないという欠点を有する；3) は、観測量に誤差を考慮することができ、逆解析されたパラメーターの不確定性の評価も可能である。しかし、逆解析結果に影響すると考えられる、観測節点配置の設計を特に配慮していない。これらの解析法の比較は、文献18) および19) に詳しい。

本論文は、原位置において観測節点の適切な配置を決定し、かつ地盤の物性定数を把握することを目的として、新しい逆解析法を示す。すなわち、Kalman フィルターと有限要素法とを結合させた解法 (Kalman フィルター有限要素法とよぶ) を用いる。ただし、地盤モデルは二次元平面ひずみにおいて構成関係が弾性的な場合であり、未知数には非均質領域における Lamé の定数をとる。

以下ではまず、2. で Kalman フィルター有限要素法の定式化について述べる。3. では、他の逆解析法との比較を目的とした数値計算例に基づいて、本法の妥当性を検証する。さらに、4. において、逆解析における観測節点の配置決定と逆解析手法との関連を定量的に考察

\* 正会員 工修 京都大学助手 農学部農業工学科  
(〒606 京都市左京区北白川道分町)

\*\* 正会員 農博 京都大学教授 農学部農業工学科 (同上)

する。

### 2. Kalman フィルター有限要素法<sup>7),8)</sup>

Kalman フィルターの土質工学への適用としては、次のものが挙げられる：星谷ら<sup>9)</sup>は、地盤の液状化を表現するのに一次元等価線形モデルを仮定し、このモデルパラメーター同定に Kalman フィルターを用いた。また、彼らは杭の  $K$  値の推定<sup>10)</sup>、動的問題における減衰定数や固有振動数の同定<sup>11)</sup>あるいは非線形回帰モデルのパラメーター同定<sup>12)</sup>に重み付き反復計算過程を含む拡張 Kalman フィルター (EK-WGI) を適用した。斉藤ら<sup>13)</sup>は、山留め掘削工事過程における壁体傾斜角の計測データのみから、壁体の曲げモーメント、側圧および地盤反力係数を推定するのに拡張 Kalman フィルターを用いた。一方、土岐ら<sup>14)</sup>は、断層の破壊過程を追跡することを目的とし、模擬波形あるいは発破記録を利用して、インパルス時系列の抽出を行った。また、著者ら<sup>15),16)</sup>も浅岡モデルの係数抽出や漏水量予測に Kalman フィルターを適用した。

Kalman フィルターの基礎式を構成するのは、離散時間では次式のごとき観測式および状態式である<sup>17)</sup>。

$$\text{観測式} : \mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{状態式} : \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\mathbf{y}_t$ ：観測量ベクトル ( $p \times 1$ )、 $\mathbf{x}_t$ ：未知数ベクトル ( $n \times 1$ )、 $\mathbf{H}_t$ ：観測行列 ( $p \times n$ )、 $\mathbf{F}_t$ ：状態遷移行列 ( $n \times n$ )、 $\mathbf{G}_t$ ：駆動行列 ( $n \times m$ )、 $\mathbf{v}_t$ ：観測雑音 ( $p \times 1$ )、 $\mathbf{w}_t$ ：システム雑音 ( $m \times 1$ )。式 (1) は、未知数ベクトル  $\mathbf{x}$  と観測ベクトル  $\mathbf{y}$  との関係を記述する。観測条件を記述する場合、観測行列の要素は観測位置を示すため、0 または 1 だけから成る。また、式 (2) は未知数の状態の時間的推移を記述する。さらに、雑音ベクトルは以下の性質を有するものとする。

$$E(\mathbf{w}_t) = E(\mathbf{v}_t) = \mathbf{0} \dots\dots\dots (3)$$

$$E \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{v}_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_s^T & \mathbf{v}_s^T \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_t \end{pmatrix} \delta_{ts}, \mathbf{R}_t > \mathbf{0} \dots\dots (4)$$

$$E \{ \mathbf{w}_t, \mathbf{x}_s^T \} = E \{ \mathbf{v}_t, \mathbf{x}_s^T \} = \mathbf{0} \text{ for } t \geq s \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $E\{\cdot\}$ ：期待値、 $\delta_{ts}$ ：Kronecker のデルタ。

本論で対象とする問題は、パラメーター同定である。この場合、未知パラメーターにはそれ自身の時間的遷移構造を記述する表現がない。したがって、状態式には時間軸について一定であるという条件を付与する。一方、観測式には物理モデルを等価変形した式をあてることになる。

#### (1) 観測式

二次元平面ひずみ弾性つり合い問題に関して、有限要素剛性方程式は

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \dots\dots\dots (6)$$

として与えられる。ここで、観測変位成分がベクトルの先頭に位置するように、配列の並べかえを行う。さらに、 $\lambda_i$  および  $\mu_i$  が領域  $i$  における Lamé の定数であるとすると、式 (6) は次式に書き換えられる：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^* \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\mathbf{u}^*$ ：観測変位、 $\mathbf{u}$ ：未知あるいは境界変位、 $\mathbf{K}_{ij}$ ：剛性部分行列、 $\mathbf{f}^*$ ：観測位置に対応する荷重ベクトル。

式 (7) から、未知および境界変位を消去すると、式 (8) を得る：

$$\mathbf{f}^* - \mathbf{Q}(\lambda_i, \mu_i) \mathbf{f} = \left[ \sum_i (\lambda_i \mathbf{K}_{11}^{(i)} + \mu_i \mathbf{K}_{12}^{(i)}) - \mathbf{Q}(\lambda_i, \mu_i) \cdot \sum_i (\lambda_i \mathbf{K}_{21}^{(i)} + \mu_i \mathbf{K}_{22}^{(i)}) \right] \mathbf{u}^* \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $\mathbf{Q}(\lambda_i, \mu_i) = \sum_i (\lambda_i \mathbf{K}_{11}^{(i)} + \mu_i \mathbf{K}_{12}^{(i)}) \cdot \left[ \sum_i (\lambda_i \mathbf{K}_{22}^{(i)} + \mu_i \mathbf{K}_{21}^{(i)}) \right]^{-1} \mathbf{K}_{21}^{(i)}$ ： $l$  番目の領域における剛性部分行列  $\mathbf{K}_{ij}$  のうち Lamé の定数  $\lambda$  でまとめられる成分、 $\mathbf{K}_{ij}^{(i)}$ ： $l$  番目の領域における剛性部分行列  $\mathbf{K}_{ij}$  のうち Lamé の定数  $\mu$  でまとめられる成分。弾性定数として Lamé の定数をとるとき、これらの定数は剛性部分行列において  $\mathbf{K}_{ij} = \lambda \mathbf{K}_{ij} + \mu \mathbf{K}_{ij}$  のように 1 次の形式でしか入らないので、以下の式変形には都合がよい。

上式の右辺において、この場合の未知数である、 $\lambda_i$  および  $\mu_i$  をくくり出すために書き直せば、次式となる<sup>6)</sup>。

$$\mathbf{f}^* - \mathbf{Q}(\lambda_i, \mu_i) \mathbf{f} = [(\mathbf{K}_{11}^{(i)} - \mathbf{Q}\mathbf{K}_{21}^{(i)})\mathbf{u}^*, (\mathbf{K}_{12}^{(i)} - \mathbf{Q}\mathbf{K}_{22}^{(i)})\mathbf{u}^*, \dots, (\mathbf{K}_{11}^{(n)} - \mathbf{Q}\mathbf{K}_{21}^{(n)})\mathbf{u}^*, (\mathbf{K}_{12}^{(n)} - \mathbf{Q}\mathbf{K}_{22}^{(n)})\mathbf{u}^*] \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_n \end{Bmatrix} \dots\dots (9)$$

式 (9) 右辺に雑音ベクトルを付加することで、この問題における観測式を与えることができる。式 (1), (9) からわかるように、変形荷重ベクトルが Kalman フィルターの観測ベクトルを形成する。しかし、ここでは領域の形状、構造、境界条件などとともに荷重条件は既知と仮定しているため、この場合においては実際に観測される量である変位が観測ベクトルに相当するのではなく、観測行列の成分として入るといった変則的な形式となっている。

#### (2) 状態式

未知数  $\lambda_i$  および  $\mu_i$  は定数であるので、状態式としては次式を与えることができる。

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_n \end{Bmatrix}_{k+1} = [\mathbf{I}] \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu_n \end{Bmatrix}_k \dots\dots\dots (10)$$

上式は未知パラメーターについて時間的定常条件を記述するものであり、このような条件に誤差は混入しないものと考えられるため、ここではシステムノイズを含めていない。

観測式(9)において、観測行列要素に未知数が残る。このような非線形システムに対しては、次に示す Kalman フィルターアルゴリズムを反復して、推定値が収束するまで計算を実行しなければならない。すなわち、数値計算にあたってはどの時間においても同じ値を観測するという読みかえを行い、式(9)および(10)に現われる添字  $k$  は本来時間軸であるが、この場合においては繰返し軸方向にとられる。なお、こうした読みかえは、参考文献10)にあるEK-WGI法において重みが1である場合に相当する。

式(1)および(2)(この場合、式(9)および(10))で記述されるシステムに対する Kalman フィルターのアルゴリズムは、以下に示すステップとして与えられる<sup>17)</sup>。

フィルター方程式：

$$\hat{x}_{t+1/t} = F_t \hat{x}_{t/t} \dots\dots\dots (11)$$

$$\hat{x}_{t/t} = \hat{x}_{t/t-1} + K_t [y_t - H_t \hat{x}_{t/t-1}] \dots\dots\dots (12)$$

Kalman ゲイン：

$$K_t = P_{t/t-1} H_t^T [H_t P_{t/t-1} H_t^T + R_t]^{-1} \dots\dots\dots (13)$$

推定誤差共分散行列：

$$P_{t+1/t} = F_t P_{t/t} F_t^T + G_t Q_t G_t^T \dots\dots\dots (14)$$

$$P_{t/t} = P_{t/t-1} - K_t H_t P_{t/t-1} \dots\dots\dots (15)$$

初期条件：

$$\hat{x}_{0/-1} = \bar{x}_0, P_{0/-1} = \Sigma_0 \dots\dots\dots (16)$$

### 3. 数値解析<sup>7)</sup>

前章で述べた定式化による数値計算例を示す。他の解析法との比較のうへで検証を行うために、荒井らが使用したモデル<sup>3)</sup>(図-1)に基づいた解析を実施する。彼らはこのモデルを通じて、間接法とベイズアプローチとの比較を行っており<sup>18)</sup>、また Gioda らもいくつかの間接法アルゴリズムによる求解過程の差異を論じている<sup>19)</sup>ので、同じ条件で比較・検証を行うこととする。

このモデルは、均質あるいは非均質(二層あるいは三層)な材料から成る掘削地盤モデルである。荒井ら<sup>18)</sup>に

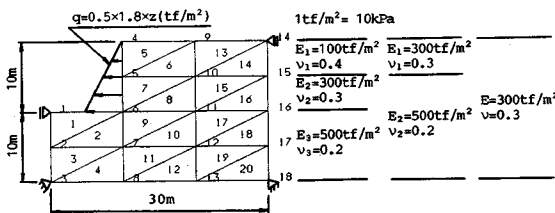


図-1 解析モデル (荒井ら<sup>3)</sup>による)

従い、次の四種のケースを解析する：

- I. 均一地盤であるとき、観測変位として、節点番号 4, 5, 6 の両方向変位を選ぶ；
- II. 均一地盤であるとき、観測変位として、節点番号 4, 5, 6 の水平方向変位のみを選ぶ；
- III. 二層から成るとき、観測変位として、節点番号 1 の鉛直変位、節点番号 4, 5, 6, 9 の両方向変位、節点番号 14 の鉛直変位を選ぶ；
- IV. 三層から成るとき、観測変位として、節点番号 1 の鉛直変位、節点番号 4, 5, 6, 9 の両方向変位、節点番号 14 の鉛直変位を選ぶ。

上記それぞれのケースについて、Kalman フィルター有限要素法で解析を行う。ただし、Kalman フィルター有限要素法で求めるのは Lamé の定数であるので、反復計算で求まるごとに、ヤング率とポアソン比に変換する。上の例では、観測点に荷重が作用しているので、式(9)左辺の第2項は零であり、観測ベクトルの成分は第1項、すなわち縮小された荷重ベクトルのみとなる。ここで、Kalman フィルター有限要素法に必要な入力値は、次のようである：

$$R = 1.0 \times 10^{-3}, P \text{ の対角項 } 1.0 \times 10^{10}$$

ここで、 $R$  は式(4)における行列  $R_t$  の対角項を表わし、観測変位の共分散値が一様に  $1.0 \times 10^{-3}$  であることを意味する。また、 $P$  は推定誤差共分散行列初期値の対角項を表わす。推定の初期値は、荒井らのそれと同一とした。また、推定誤差共分散行列対角項の初期値は、推定の収束速度に影響する<sup>20)</sup>が、ここでは、与えられた変位の誤差がそれほど大きくないものとした。この方法による解析結果を、荒井らが参考文献18)で示した間接法による解およびベイズアプローチによる解と比較する。図-2~5にその結果を示す。

ケース I：図-2に解析結果を示す。Kalman フィルター有限要素法では、推定値の立上りが速いようである。しかし、ポアソン比に対する推定経過にみられるように、立上りの速さに比べれば、収束がやや遅い。この場合においては、いずれの方法でも真値に収束する。

ケース II：図-3に解析結果を示す。ケース I とは観測成分数が減少したほかは、同じ条件である。推定傾向に大きな差異はないけれども、観測成分の減少は特に、ポアソン比の推定精度を劣化させる効果を有している。この場合もやはり、推定値は真値に収束する。

ケース III：図-4(a)に第一層に対する結果を、図-4(b)に第二層に対する結果を示す。未知数は4つに増えたが、10個の観測成分が良好な推定値を与えている。推定傾向の基本的性状はケース I や II と比べ、変化していない。

ケース IV：図-5(a)に第一層に対する結果を、図-5

(b) に第二層に対する結果を、図-5(c) に第三層に対する結果を示す。この場合の結果は、これまでのケースと異なり、第二層あるいは第三層で推定値、ことにポア

■—■ 荒井らの方法    ○—○ Kalman フィルター有限要素法  
 ×—× Cividini らの方法

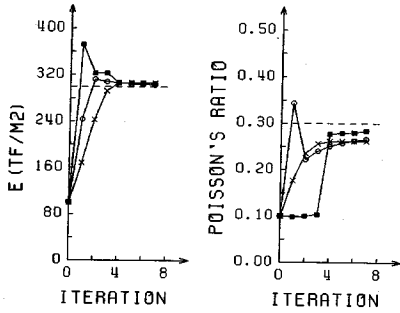


図-2 ケース I の解析結果

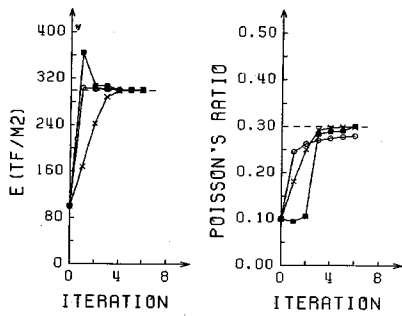


図-3 ケース II の解析結果

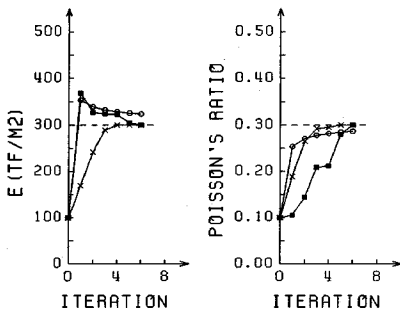


図-4(a) ケース III (第一層) の解析結果

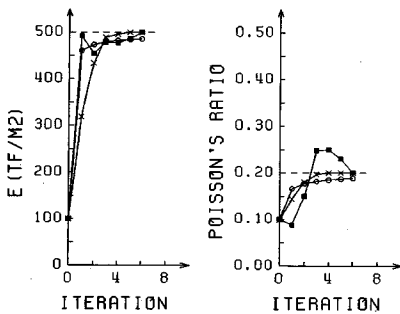


図-4(b) ケース III (第二層) の解析結果

ソン比の推定精度が劣化している。この理由として第一層に比して、第二・第三層ではその領域内または領域境界上に、多くの観測節点を有していないことが考えられる。

すべてのケースを通じて、Kalman フィルター有限要素法は比較的良好な推定値を与える。表-1 に各ケースにおける、同法による収束推定値を示す。結果を通じて

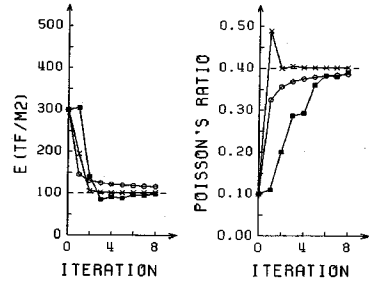


図-5(a) ケース IV (第一層) の解析結果

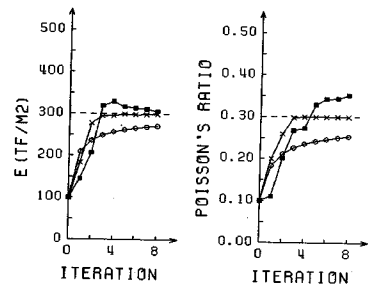


図-5(b) ケース IV (第二層) の解析結果

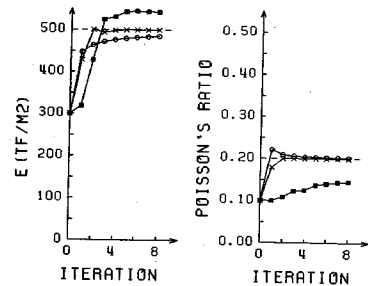


図-5(c) ケース IV (第三層) の解析結果

表-1 Kalman フィルター有限要素法による推定精度 (%)

ケース	E*	v*	
I	100.1	97.3	
II	99.7	95.6	
III	第一層	104.1	98.3
	第二層	98.8	98.0
IV	第一層	110.8	98.8
	第二層	95.3	91.7
	第三層	98.7	100.5

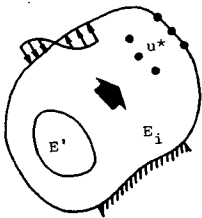
次のことがいえる：1) 収束に至る速度は、ベイズアプローチが最も速い；2) 間接法や Kalman フィルター有限要素法では、真値への到達速度が層により異なる；3) 推定値の立上がりは、ベイズアプローチや Kalman フィルター有限要素法が速いけれども、収束速度と一義的な関係をもたない。

4. 観測節点配置

逆解析で入力となる測定値は、設置可能な位置に配置された計器観測のうちの全部または一部であり、一部をとるときは、解析者がその場所や値を有意に選択することとなる。得られた推定値の精度は、地盤のモデル化に大きな誤りがなく、観測値に誤差が少ないと仮定すれば、このような観測節点の配置に大きく左右されよう。

ここでは観測量の精度が十分であるとき、注目すべき領域に対して最も“鋭敏な”いくつかの節点を観測位置に選ぶことにより、観測節点の最適な位置を知ろうとする。この観測位置は、次の2つの場合に用いることができると考える：①逆解析において物性定数を精度よく求めるため、これに適した配置の観測節点を設ける。ただし、原位置での土質調査から、非均質な領域の存在およびその位置が既知であり、物性定数の値にもある程度見込みが可能であるとする；②構造物施工後における構造物自身あるいは基礎地盤の挙動把握や挙動管理を行うために、適切な位置で観測を実施する。

図—6 を対象として考える。非均質な解析領域の中で、



図—6 概念図

注目すべきあるいは、求めたい物性（たとえば、ヤング率）をもつ領域が観測節点に与える影響を明らかにする。この注目領域はたとえば、破碎帯のように強度の弱い層などをとることができる。式（7）を与えるのと同様の手続きにより、有限要素剛性方程式から出発して式（17）を得る。ただし、この表記において、 $E_i$  は注目対象外の領域  $i$  におけるヤング率、 $E'$  は注目する領域のヤング率である。

$$[E_1 K^1 + \dots + E_n K^n + E' K'] \begin{Bmatrix} u^* \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^* \\ f \end{Bmatrix} \dots\dots(17)$$

ここで、 $K^i = \begin{bmatrix} K_{11}^i & K_{12}^i \\ K_{21}^i & K_{22}^i \end{bmatrix}$ ,  $K' = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K'_{22} \end{bmatrix}$

また、式（17）から、未知および境界変位を消去して式（18）を得る。

$$u^* = [(E_1 K_{11}^1 + E' K') - (E_1 K_{12}^1 + E' K'_{12}) \cdot (E_1 K_{22}^1 + E' K'_{22})^{-1} (E_1 K_{21}^1 + E' K'_{21})]^{-1} \cdot [f^* - (E_1 K_{12}^1 + E' K'_{12}) (E_1 K_{22}^1 + E' K'_{22})^{-1} f] = h(E_i, E') \quad (i: \text{sum}) \dots\dots\dots(18)$$

式（18）を  $E'$  で偏微分することにより、“観測変位の注目すべき材料に対する感度”をベクトルで与えることができる：

$$\partial u^* / \partial E' = -A(E_i, E')^{-1} [K'_{11} - K'_{12} (E_1 K_{22}^1 + E' K'_{22})^{-1} \cdot (E_1 K_{21}^1 + E' K'_{21}) + B(E_i, E') K'_{22} \cdot (E_1 K_{22}^1 + E' K'_{22})^{-1} (E_1 K_{21}^1 + E' K'_{21}) - B(E_i, E') K'_{21}] A(E_i, E')^{-1} \cdot [f^* - B(E_i, E') f] + A(E_i, E')^{-1} \cdot [-K'_{12} (E_1 K_{22}^1 + E' K'_{22})^{-1} f + B(E_i, E') K'_{22} \cdot (E_1 K_{22}^1 + E' K'_{22})^{-1} f] \dots\dots\dots(19)$$

ここに、 $A(E_i, E') = -[(E_1 K_{11}^1 + E' K'_{11}) - (E_1 K_{12}^1 + E' K'_{12}) \cdot (E_1 K_{22}^1 + E' K'_{22})^{-1} (E_1 K_{21}^1 + E' K'_{21})]$   
 $B(E_i, E') = (E_1 K_{12}^1 + E' K'_{12}) (E_1 K_{22}^1 + E' K'_{22})^{-1}$   
 (  $i: \text{sum}$  )

上記の感度係数の個々の値はそれぞれ独立ではなく、観測節点の組合せに従属している。また、各領域の位置や弾性係数の値が概略にしても知れていることを前提としている。

この感度係数はまた、Kalman フィルターの観測行列を構成する。式（18）のような未知数について非線形な表現では、観測式（1）を得るのに、線形化手法（式(18)右辺を時刻  $t-1$  における推定値  $\hat{x}_{t-1}$  のまわりで Taylor 展開させ、2 次以上の項を無視することで線形化する：Appendix 参照）を用いる場合がある。このとき、式（19）の感度係数は、観測行列の要素を構成する。この要素はまた、ベイズアプローチという‘感度行列’の成分でもある<sup>6)</sup>。

このようにして得られる感度係数の値を用いて、現場における可能な計器配置からいかなる組合せを選ぶべきか、どの節点を重点配置に選ぶか、逆にどの節点を考慮の対象からはずしてよいかを決める手順を考える。まず、ある観測節点組に対して得られた感度係数ベクトルを評価するのに、ベクトルの長さを用いることにする。たとえば、ユークリッドノルムをとることができる：

$$(\partial u^* / \partial E' \cdot \partial u^* / \partial E')^{1/2} \dots\dots\dots(20)$$

ただし、次の2つの事柄に注意する：1つは、ノルムの値は一般に節点の個数（ベクトルの成分数）が増せば、必ず増す。換言すれば、位置よりはむしろ節点の個数に支配されてしまう；もう1つは、このノルムが物理的な意味をもたないことである。前者については、式（21）で表わされるノルムの値を成分数で除すことにより個数

に支配される側面を回避でき、後者についてはノルムが単なる尺度であると考え、特にその意味をここでは考えないことにする。

$$\frac{(\partial u^*/\partial E' \cdot \partial u^*/\partial E')^{1/2}}{N} \dots \dots \dots (21)$$

このノルムを成分数で除した値を「影響指標」と考えることにする。そして、実施可能な計器配置の中から、この影響指標の大きい組を選ぶことで、ある領域に鋭敏な観測節点配置の組合せが知れるものとする。また、新たな節点を観測配置に対して参入させるとき、当該節点の感度値が影響指標より大きなものを選別すればよいものとする。

以下の2つの例でこれを説明しよう。まず、3.の解析例を取り上げる。いま、注目層として第二層を取り上げる。この層に注目したとき、感度係数分布は、水平変位および鉛直変位についてそれぞれ、図-7(a), (b) のようである。両図から地表面で感度が大きく、注目層の逆解析のためにはこの面上で変位を観測すればよいと考えられる。図-7(a) から、水平変位については節点番号5付近で、また、図-7(b) から、鉛直変位については節点番号4付近で、それぞれ感度が最大であることがわかる。式(21)で表わされる影響指標を、3.における解析ケースごとに算出し、その結果を表-2に示す。

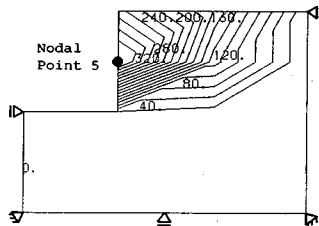


図-7(a) 水平観測変位に対する節点感度分布 ( $\times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{tf}$ )

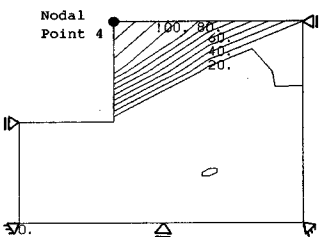


図-7(b) 鉛直観測変位に対する節点感度分布 ( $\times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{tf}$ )

表-2 各ケースにおける影響指標値

ケース	影響指標値 ( $\times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{tf}$ )
I	0.079
II	0.051
III	0.050
IV	0.034

ここで、感度の大きさが逆解析精度に与える影響を調べるために、同じ例において感度の高い観測点(たとえば、節点番号4, 5など)の代わりに別の位置にあるより感度の低い節点を選び、Kalman フィルター有限要素法により逆解析を行う。先の例でいうケースIVに関して数値計算を実行するが、代替節点を選ぶに際して観測変位成分数(この場合は10)が変化しないようにする。この理由として、観測変位成分の数が逆解析の精度に影響を与えること<sup>18)</sup>を掲げることができる。実行した計算結果を表-3に示す。この結果からは節点番号4を観測位置から除外しても精度に大きな差はみられないものの、節点番号4および5さらには6を除外すれば、著しく精度が減少することがわかる。

さらに、より具体的なケースについて適用した結果を示す。図-8はあるコンクリートダムおよびダム基礎をモデルとした有限要素図である。また、ダム本体打設以前の土質調査に基づく、ダム基礎部の物性は図-9のようである。この基礎では、やや強度の少ない薄層がほぼ水平面をなして存在しており、その上部と下部の挙動を一体化させる目的でトンネル形式のコンクリート構造物(ダウエルコンクリートとよぶ)が打設されている。こ

表-3 観測位置が逆解析精度に及ぼす影響

観測節点	同定精度(%)					
	E <sub>1</sub>	ν <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	ν <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	ν <sub>3</sub>
① 5,6,9:両方向 1,14,15,16:鉛直	117.7	92.5	95.8	96.0	97.3	103.5
② 5,6,9,10:両方向 1,14:鉛直	101.6	100.5	100.6	98.7	100.6	98.0
③ 6,10,11,12:両方向 1,14:鉛直	344.6	92.5	62.9	83.3	80.3	73.5
④ 10,11,12:両方向 14,15,16,17:鉛直	312.0	98.3	58.5	120.0	53.7	162.0

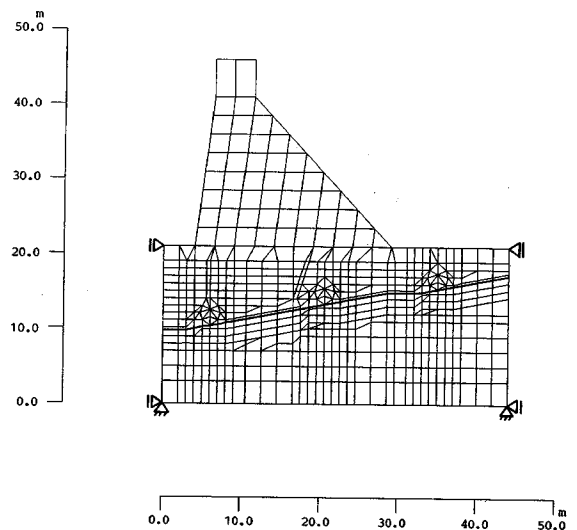


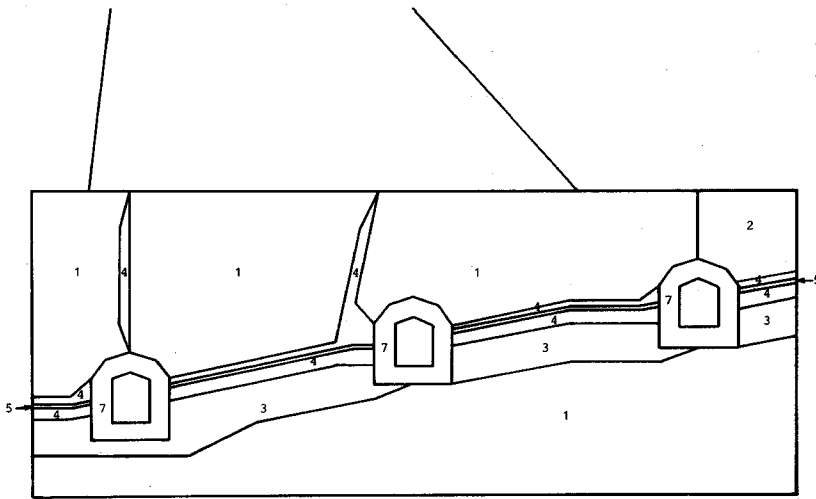
図-8 解析モデル

の場合に薄層を注目領域に選び、この領域に鋭敏な節点の位置を求め、ダム本体打設後の挙動管理のための資料として供することを考える。その際、観測可能量はコンクリート打設部から地中に配置する変位計による相対変位であるとし、想定されるいくつかの観測位置候補からその有効な位置を決定しようとする。

図一10(a), (b) は、鉛直および水平観測変位に対する感度分布である。注目層のまわりで大きな値をとっており、この層の下部やダム本体では観測変位に影響が少ないことがわかる。そうした傾向を踏まえて、ダウエルコンクリートからどの方向へ変位観測を実施すればよいかを、より具体的に考える必要がある。

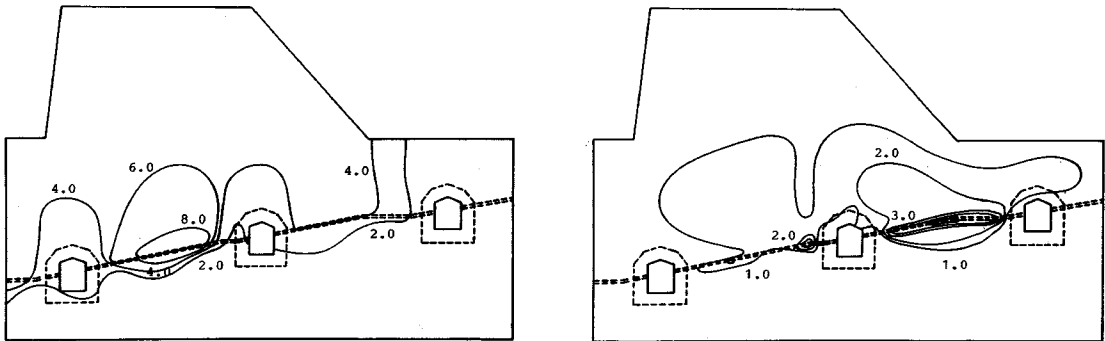
そこで、図一11(a), (b), (c) にそれぞれ上流側、中

間および下流側ダウエルコンクリートに対する変位観測のモデルケースと、それぞれの観測点における感度値を表わす。(a)~(c) のそれぞれについて、内空表面の一点を起点として基礎内部への変位観測を想定した配置を示している。なお、2点間の相対変位が観測されるものと想定し、図一11における各観測方向上の測定点における水平・鉛直各感度値の和を図中に記載している。ただし、観測方向が水平であれば、鉛直感度は零であるとし、観測方向が鉛直であれば水平感度は零であるとした。これらの値から、それぞれのケースについて矢印で指摘した観測位置が上記の目的に最もかなったものであると考えられる。



材料物性		
材料番号	弾性係数 (tf/m <sup>2</sup> )	ポワソン比
1	640,000	0.2
2	320,000	0.2
3	200,000	0.25
4	50,000	0.35
5	24,000	0.4
6	2,000,000	0.2
7	2,000,000	0.2

図一9 原位置調査による諸物性



(a) 鉛直観測変位

(b) 水平観測変位

図一10 観測変位に対する節点感度分布 ( $\times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{tf}$ )

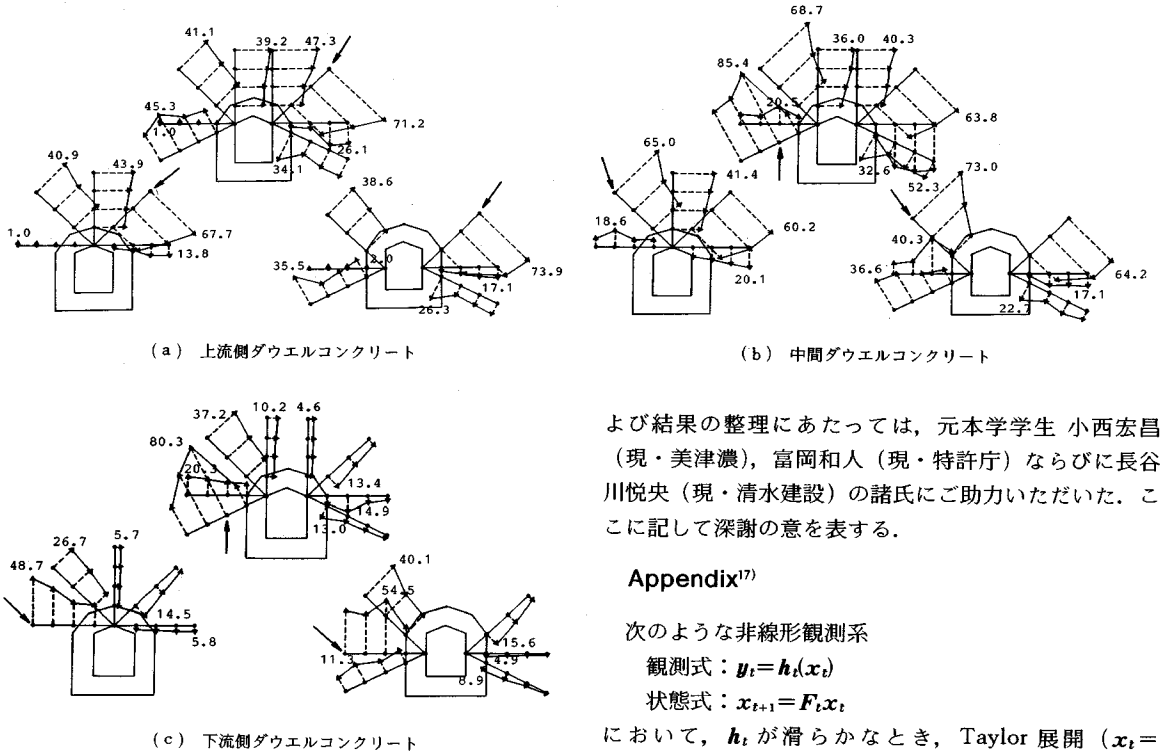


図-11 変位観測モデルケースと観測変位感度値  
( $\times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{tf}$ )

5. 結 論

逆解析のための観測節点配置を考慮して、新しい逆解析法の定式化および数値解析例を示した。数値解析においては、他の逆解析法（間接法、ベイズアプローチ）との比較を行った。得られた主要な結論を列記すると、以下のようである。

(1) 場の方程式を有限要素法で空間離散化した結果を Kalman フィルターの観測式に繰り込み、物性定数を推定する手法を示した。観測にかかわる誤差を共分散の形で入力し、考慮することができる。

(2) 掘削モデルにおいて、従来の方法と数値計算結果により、推定経過および推定精度を比較した。その結果、収束に至る速度の点で本方法はやや劣るものの、精度の面では遜色ないことを示した。

(3) 観測節点の配置は、“観測変位の注目すべき材料に対する感度係数”の値に従い、可能な計器配置の中から選定することを提案した。また、この感度係数の値が拡張 Kalman フィルターにおいて、観測行列の成分となることを示した。

本研究の一部は、昭和 61 年度文部省科学研究費（奨励研究 (A) 61760200) を使用した。また、数値計算お

よび結果の整理にあたっては、元本学学生 小西宏昌（現・美津濃）、富岡和人（現・特許庁）ならびに長谷川悦央（現・清水建設）の諸氏にご助力いただいた。ここに記して深謝の意を表する。

Appendix<sup>17)</sup>

次のような非線形観測系

$$\text{観測式: } y_t = h_t(x_t)$$

$$\text{状態式: } x_{t+1} = F_t x_t$$

において、 $h_t$  が滑らかなとき、Taylor 展開 ( $x_t = \hat{x}_{t/t-1}$  のまわり) による線形化を観測式に施す：

$$h_t(x_t) \cong h_t(\hat{x}_{t/t-1}) + H_t(x_t - \hat{x}_{t/t-1})$$

ここに、 $H_t = \left( \frac{\partial h_t}{\partial x_t} \right)_{x_t = \hat{x}_{t/t-1}}$

この観測行列  $H$  はたとえば、未知数  $x_t$  が  $(E_t, E^T)$  であるとき、

$$H_t = \left[ \frac{\partial h_t}{\partial E_t}, \frac{\partial h_t}{\partial E^T} \right] = \left[ \frac{\partial u^*}{\partial E_t}, \frac{\partial u^*}{\partial E^T} \right]$$

2 次以上の項を無視して観測式を書き直すと、次の線形観測系を得る：

$$\text{観測式: } \eta_t = H_t x_t (\eta_t = y_t - h_t(\hat{x}_{t/t-1}) + H_t \hat{x}_{t/t-1})$$

$$\text{状態式: } x_{t+1} = F_t x_t$$

これに対しては、通常の Kalman フィルターを適用できる。このような非線形観測系の Taylor 展開に基づいた線形化による定式化は、拡張 Kalman フィルターとよばれる。

参 考 文 献

- 1) Kavanagh, K. and Clough, R. W. : Finite element applications in the characterization of elastic solids, Int. J. Solids Structures, Vol. 7, pp.11-23, 1971.
- 2) 桜井春輔・武内邦文：トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法，土木学会論文報告集，No.337, pp.137-145, 1983.
- 3) Arai, K., Ohta, H. and Yasui, T. : Simple optimization techniques for evaluating deformation moduli from field observations, Soils and Foundations, Vol.23,



- No. 1, pp.107~113, 1983.
- 4) 荒井克彦・片瀬貴文：トンネル内空変位計測に基づく地盤変形・強度定数の推定，土質工学会論文報告集，第24巻，第2号，pp.171~179, 1984.
  - 5) Beliveau, J. G. : Identification of viscous damping in structures from model information, *J. Applied Mechanics*, Vol. 98, pp.335~339, 1976.
  - 6) Cividini, A., Maier, G. and Nappi, A. : Parameter estimation of a static geotechnical model using a Bayes' approach, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol. 20, No. 5, pp.215~226, 1983.
  - 7) 村上 章・長谷川高士：Kalman フィルタ有限要素法による逆解析とその適用性，第43回農業土木学会京都支部研究発表会講演要旨集，pp.40~41, 1986.
  - 8) 村上 章・長谷川高士：Kalman フィルタ有限要素法による弾性係数の同定解析，第41回土木学会年次学術講演会講演概要集，Ⅲ-324，pp.647~648, 1986.
  - 9) 星谷 勝・斉藤悦郎：液状化を伴う地盤の等価線形化，土木学会論文報告集，No.340，pp.59~65, 1983.
  - 10) Hoshiya, M., Kodama, K. and Sakai, K. : Identification of coefficient of horizontal subgrade reaction by EK-WGI method, *Proc. 1st East Asian Conf. Struc. Eng. and Construction*, pp.1664~1675, 1986.
  - 11) Hoshiya, M. and Maruyama, O. : Adaptive multiple nonlinear regression analysis and engineering applications, *Proc. 1st East Asian Conf. Struc. Eng. and Construction*, pp.2004~2011, 1986.
  - 12) Hoshiya, M. and Maruyama, O. : Dynamic parameters identification by EK-WGI procedure, *Proc. 8th European Conf. Earthquake Eng.*, pp.81~88, 1986.
  - 13) 斉藤悦郎・山県達弥・古賀重利：EK-WGI 法による山留め計測データ処理，フジタ工業技術研究所報，第22号，pp.89~94, 1986.
  - 14) 土岐憲三・佐藤忠信・清野純史・市原和彦：カルマンフィルターを用いた断層破壊過程の同定，京都大学防災研究所年報，第29号B-2，pp.1~16, 1986.
  - 15) Murakami, A. and Hasegawa, T. : Observational prediction of settlement using Kalman filter theory, *Proc. 5th Int. Conf. Num. Meth. in Geomech.*, Vol. 3, pp.1637~1643, 1985.
  - 16) 長谷川高士・村上 章：Kalman フィルタによるダム漏水量の予測—ダムの安全性管理—，農業土木学会論文集，第126号，pp.1~8, 1986.
  - 17) 片山 徹：応用カルマンフィルター，朝倉書店，1983.
  - 18) 荒井克彦・宮田幹夫：確率論的逆解析手法の適用性，第21回土質工学研究発表会講演概要集，pp.1089~1090, 1986.
  - 19) Gioda, G., Pandolfi, A. and Cividini, A. : A comparative evaluation of some back analysis algorithms and their application to in situ load tests, *Proc. 2nd Int. Symp. Field Measurements in Geomech.*, Kobe, 1987.
  - 20) 斉藤悦郎：EK-WGI 法の開発と振動工学における同定問題への応用に関する研究，学位論文，武蔵工業大学，1986.  
(1987. 6. 10・受付)