

不均質場における降雨後の不圧地下水状態の統計的評価

STOCHASTIC ESTIMATION OF UNCONFINED GROUNDWATER HEAD FIELD
AFTER RAINFALL IN HETEROGENEOUS REGION

高木不折*・原田守博**

By Fusetsu TAKAGI and Morihito HARADA

Unconfined groundwater behavior is generally complex in time and space due to variety of hydrogeological properties in the flow region. It is necessary for the simulation analysis to characterize the uncertainty about the head field and to evaluate the accuracy of observed hydraulic head. In the present paper, assuming statistical homogeneity, the variogram which expresses a spatial structure of the head field was derived analytically from the physical laws. This theoretical variogram was consistent with the variogram that was calculated using observed data. The head fields after a rainfall were stochastically estimated by using the Kriging method and theoretical variogram. It has been clarified from the result that an extent of the role of observed data for the estimation of the head field becomes gradually important more and more through a long-term recession process.

Keywords: unconfined groundwater, heterogeneous region, variogram, Kriging method, conditional simulation

1. 序 論

近年、広域地下水のシミュレーション・モデルは、多層化・多次元化が進み、しだいに複雑なものとなってきた。それに伴って、解析に用いられる基礎データの重要性はますます高まっている。というのは、解析を支える観測データが質的量的に不十分なものであれば、パラメーターの増えた分だけ解析が曖昧なものとなり、精緻なモデルを用いたとしても、必ずしも解析精度の向上に結びつかないからである。したがって、よりよい解析を行うには、モデルの構造と観測データの精度との間に整合性がとれていることが大切であり、そのためには観測データの精度や信頼性を定量的に評価しておくことが必要となる。

通常の地下水解析では、水位の観測値を用いて、モデルパラメーターの同定や解析結果の検証がなされる。しかしながら、実際の地盤は水理特性が空間的に複雑に分布した不均質場であり、近距離の井戸での揚水試験値がオーダー的に異なることや、観測水位が局所的に特異な変動を示すことはまれではない。特に、台地や丘陵地の

不圧地下水位は、降雨の影響を受けて場所的に異なった挙動を示すことが多い。すなわち、実際の地下水流動は、不規則な不均質性をもつ帯水層とそこでの多様な水位変動の結果として生じており、帯水層の特性や水位の空間状態について、われわれが知り得る情報はごく限られている。従来、こうした現象に対し確定論的な取り扱いが行われてきたが、シミュレーションによって観測水位の一応の再現は可能であっても、非観測地点の水位の評価や領域全体の流量流束の把握には問題を生ずる場合が少なくない。

地下水解析に不確定性を導入するために、確率・統計論的な取り扱いをした研究は、すでに行われてきている。たとえば、流れ場の不均質性が水位の予測に及ぼす影響を検討したもの^{1)~4)}や空間的な水理パラメーターの分布を観測値から確率論的に推定する試み^{5)~10)}など、帯水層の不均質性の評価に重点を置いた研究が盛んである。しかし、不均質場における地下水位そのものの空間分布特性を検討したものは少ない。前述したように、観測水位データをシミュレーション解析に活用する意味において、観測水位の精度やその空間的代表スケールを定量的に評価することは工学的にきわめて重要であり、そのためには、地下水位の空間分布構造を把握することが必要である。

* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科
(〒464 名古屋市中千種区不老町)

** 正会員 工修 名古屋大学助手 工学部土木工学科 (同上)

本研究はその第一歩として、不圧地下水位、特に降雨によって涵養を受けた後の水位低減過程を対象に、水位の統計的空間構造の時間的変化を検討するとともに、それを通じて、地下水状態を考えるうえで観測水位がもつ意義について考察を行うものである。地下水位の空間状態の統計的推定法としては、Matheron による Kriging 法および Conditional Simulation¹⁴⁾ を採用している。これらの手法の適用にあたっては、variogram とよばれる統計的空間構造が重要な役割を果たすが、通常、多くの観測データに頼って経験的に求めているのが実状である。そこで本研究では、(1) 降雨後の不圧地下水状態について、variogram の近似解を地下水の基礎方程式を摂動展開することにより解析的に導出する。そして、(2) 理論的に導かれた variogram を実測水位から求めたそれと比較し、その妥当性を検証する。さらに、(3) その理論 variogram を媒介として Kriging 法を現地に適用し、降雨によって乱された地下水位の空間状態が、降雨後徐々に平準化してゆく非定常過程を視覚的に評価・考察している。

2. 小試験地における地下水位の多地点観測

実地盤における地下水位の空間状態と流れ場の性質とのかかわりを調べる目的で、丘陵地域に小試験地を設け、水位変動の多地点観測を行った。本章ではそのデータを示し、対象とする現象の特性を概観する。

(1) 観測の概要¹¹⁾

試験地域は濃尾平野北東端に位置しており、面積約 0.12 km²、地表勾配約 3° の緩傾斜地に 8 本の不圧地下水観測井、自記雨量計等が配置されている (図-1)。地質構造は、西南に 2~3° の単斜構造をもつ新第三紀層で、砂礫層と粘土・シルト層が互層を成している。観測井は深度 6~12 m の浅井戸で、1983 年 7 月から水位の自記計測が継続されている。

地下水位および雨量の観測データの一例を図-2 に示す。試験地域には、井戸揚水や農業灌漑等、地下水に影響

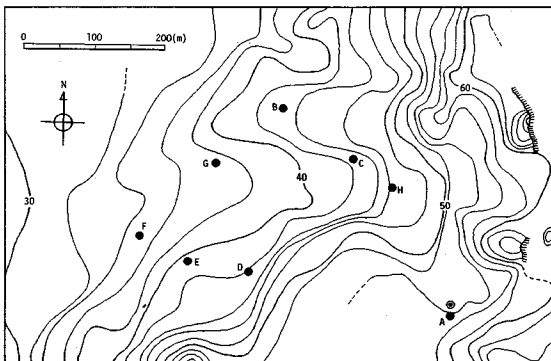


図-1 観測地域 (●観測井, ●自記雨量計, 標高は T.P.M.)

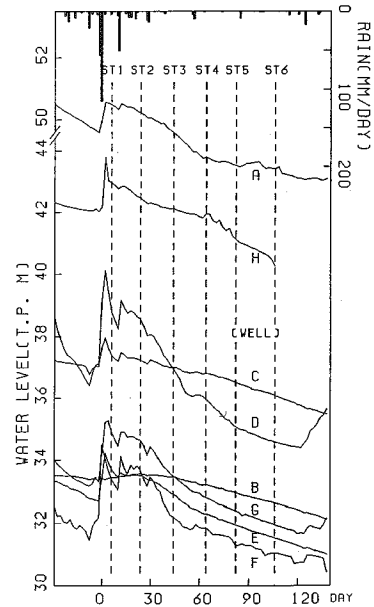


図-2 観測水位の変動 (1983.9~1984.2)

響を及ぼす人為的要因は存在しないため、地下水位の変動は降雨に強く支配されている。図にみられるように、降雨によって水位が上昇するのに要する時間は短く、各井戸で多少の差はあるものの数日未満である。降雨後の低減に要する時間がかかり長いことを考えると、週単位あるいは月単位の時間スケールでみれば、一雨ごとの水位上昇は瞬間的な現象とみなすことができる。すなわち、地下水位は降雨ごとの瞬時の上昇と長期にわたる低減を繰り返していると考えられる。

(2) 降雨による地下水状態の攪乱・平準化過程

図-2 に示したデータは、9 月末に 100 mm を越す豪雨がいった後、約 3 か月余りにわたって無降雨に近い期間が続いたときのものである。豪雨に伴って鋭い水位上昇がみられる井戸からほとんど応答しない井戸まで、水位の変動は場所的に大きく異なっている。一方、降雨後の水位低減勾配は、豪雨時の水位上昇が大きかった地点ほど低減当初の勾配が急で、しだいに緩やかな勾配に移行していることがわかる。このように降雨に対する水位応答特性が井戸ごとに異なるのは、帯水層の不均質さや降雨浸透の空間的非一様性に起因するものと考えられる。実地盤を水みち等のない連続な地層と考えれば、水位の上昇は時間的に早い現象であるので、帯水層の透水性のばらつきよりも、むしろ土壌のもつ水分貯留性の非一様性が大きく影響するものと推察される。ちなみに、一雨降雨量 (mm) と各井戸の水位上昇量の比を求めると、井戸により異なって 3~21% の値を示した。これに対し、現地の 10 か所で採取した土壌サンプルについ

て、土柱法・加圧板法により求めた水分特性曲線によると有効間隙率は4~18%であった。両者の変動幅はほぼ対応しているが、このことは、水分貯留性の場所的な差異が井戸ごとに水位上昇量の異なる一因であることを示唆している¹¹⁾。

さて、図-2で特に注目されることは、降雨直後は井戸ごとにまちまちであった水位の低減勾配が、90日程度経過した後ではすべての井戸間できわめて類似していることである。これは、無降雨期間が長く続くことによって、水位の局所的な変動成分が消滅し、地域全体といったより大きな空間スケールでの変動が表に現われてくるためと考えられる。

こういった降雨時および無降雨期における地下水状態の変化は、概念的には図-3のように考えることができる。すなわち、空間的に不均質な流れ場、たとえば水分貯留性が場所的に異なる領域に強雨が降ったとき(図(a))、地下水位は場所的に独立した形で瞬時に上昇し、空間的に凹凸の激しい地下水面が形成される(図(b))。その後、降雨のない、つまり外部から擾乱のない期間が続けば、地下水位は局所的に高い地点ほど早く低下し、水面の凹凸は徐々に平準化される(図(c))。井戸による水位観測は、この状態変化を限られたポイントで測っているに過ぎないといえる。本研究では、こうした降雨による地下水状態の空間変動を二次元場における確率事

象とみなし、無降雨期におけるその平準化過程を議論の対象とする。

3. ランダムな地下水状態の統計的取り扱い

(1) 帯水層の水理特性の空間的分布

前述したように、降雨による各地点の水位上昇量はその地点の帯水層の水理特性に依存すると考えられるから、降雨後の地下水位の空間的広がり、流れ場の水理特性の空間分布を反映しているといえる。

不均質な流れ場の水理特性の分布を考える場合、対象とする空間スケールが重要となる。たとえば、沖積平野全体の透水性の分布を考えるとき、地点ごとに値は変動するものの、上流の扇状地の方が下流の沖積低平地に比べ平均的に大きいという空間トレンドが存在する。そうしたトレンドは、多くの場合地質構造の形成過程に起因しており、丘陵地・台地・扇状地・沖積低地といった地形区分にほぼ対応すると考えられる。

しかしながら、対象領域が小さく同一の地形地質特性をもつとき、そこでの水理特性の分布は、平均値一定のランダム分布とみなすのが妥当であろう。実際、小さな領域では、平均値の空間変動を判読できるほどの詳細なデータを得ることは難しい。不均質場の評価に関する既往の研究では、空間的に統計的定常性を仮定したものが多く、本論においても、前章で扱ったような小領域を想定するので、場の水理特性は平均値一定でランダムに分布するものとする。

水理特性のランダムさの程度、すなわち確率分布についてであるが、多くの地域での測定結果から、透水係数 K は対数正規分布することが知られている。 K の常用対数変換値の標準偏差は、Freeze (1975)¹¹⁾によると20の調査地域で0.2~1.6、Delhomme (1979)¹²⁾によると13の地域で0.13~1.0と報告されている。こうした K の対数正規性は、著者らも濃尾平野において確認しており、標準偏差は0.89であった¹³⁾。帯水層の有効間隙率については通常、正規分布するものと考えられ、その標準偏差は3~7%という報告がある¹⁾。

(2) 地下水位の空間状態の統計的推定手法

地形地質特性が同一の小領域における、降雨後の地下水状態を考える。この領域では水理特性は空間的に統計的定常性をもつと考えられるので、水理特性の分布を反映した降雨による水位変動量の空間的広がりにも平均値一定のランダム分布が仮定できる。すなわち、地点 x (x は位置ベクトル)における水位変動量を $Z(x)$ とおくと、 $Z(x)$ は確率場における変量となる。確率場に2次の定常性を仮定すれば、任意の2地点 x_i, x_j において、

$$E[Z(x)] = m \quad (= \text{const.}) \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$E[(Z(x_i) - m)(Z(x_j) - m)] = \text{Cov}(D_{ij}) \quad \dots \dots \dots (2)$$

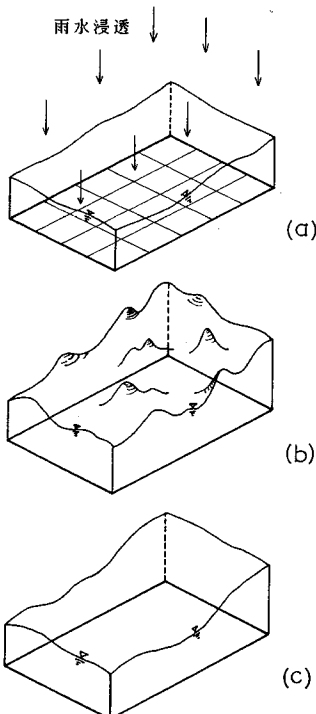


図-3 地下水状態の擾乱・平準化過程

ただし、 $D_{ij} = |x_i - x_j|$

が成立する。しかし、2次定常の仮定が強過ぎる場合は、式(2)を弱め、 $Z(x)$ の増分が定常と考えると、

$$E[Z(x_i) - Z(x_j)] = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$Var[Z(x_i) - Z(x_j)] = 2\gamma(D_{ij}) \dots\dots\dots (4)$$

この仮定は Intrinsic hypothesis とよばれる。関数 γ は semi-variogram (以下 variogram と略称) とよばれ、 $Z(x)$ の統計的な空間分布構造を表わしている。場のエルゴード性から、variogram は実測データを用いて次式で計算される。

$$2\gamma(D_{ij}) = \sum_{i,j} [Z(x_i) - Z(x_j)]^2 / N(D_{ij}) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $N(D_{ij})$ は距離 D_{ij} 離れた観測地点 i, j の組の数である。

この variogram を媒介として、観測値をもとに非観測点の状態推定を行う手法に Matheron による Kriging 法がある¹⁰⁾。Kriging 法は、観測値を確率場における実現値と考え、状態変数 $Z(x)$ の推定値を、次式を満たす最良線形不偏推定量 (B. L. U. E.) として求めるものである。

$$Var[\hat{Z}(x) - Z(x)] \rightarrow \min. \quad : \text{Best Estimator} \dots\dots (6)$$

$$\hat{Z}(x) = \sum_i^n W_i Z_i \quad : \text{Linear Estimator} \dots\dots (7)$$

$$E[\hat{Z}(x) - Z(x)] = 0 \quad : \text{Unbiased Estimator} \dots\dots (8)$$

ここに、 $\hat{Z}(x)$ は推定地点 x における $Z(x)$ の BLUE、 Z_i は観測点 i における観測値 ($i=1, 2, \dots, n$)、 W_i は Z_i の荷重係数であり、

$$\sum_i^n W_i = 1 \dots\dots\dots (9)$$

上記の諸式より、次の Kriging 方程式が導かれる。

$$\sum_j^n W_j \gamma(D_{ij}) + \mu = \gamma(D_i), \quad D_i = |x - x_i|, \quad i=1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 μ は Lagrange 定数である。式(9)、(10)を連立させた $(n+1)$ 個の方程式を解くことにより、任意の推定点の W_i と μ が得られ、式(7)により BLUE \hat{Z} が求められる。この \hat{Z} の推定誤差である Kriging 分散 (式(6)の最小値) は次式となる。

$$Var[\hat{Z}(x) - Z(x)]_{\min.} = \sum_i^n W_i \gamma(D_i) + \mu \dots\dots\dots (11)$$

したがって、確率変数 $Z(x)$ として地下水位の変動量をとれば、上記の手法により水位変動量の空間分布が推定できることになる。

4. 摂動展開による variogram の近似解

Kriging 法の適用にあたっては、状態変数の統計的空間構造として variogram を事前に知らねばならない。

対象領域内に観測点が豊富にある場合には、式(5)によって $\gamma(D)$ を推測することが可能であろうが、そうでない場合のために、地下水状態の variogram の一般的特性を明らかにしておくことは工学的に有用であると思われる。本章では、不均質な流れ場における不圧地下水を考え、降雨後の水位低減過程における variogram の形状変化を理論的に検討する。

(1) 基礎方程式と水位の一次近似解

水平一次元不圧地下水の基礎方程式は、ダルシー則と連続式より、

$$S(x) \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) H(x, t) \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} \right) + r_e(x, t) \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $H(x, t)$: 不透水基盤上の地下水深
 $r_e(x, t)$: 上方からの水供給強度
 $K(x)$: 透水係数
 $S(x)$: 有効間隙率

降雨によって形成された地下水位状態が無降雨期間に低減する過程を対象とし、初期時刻 $t=0$ を降雨直後にとる。いま、 $H(x, t)$ の場所的時局的平均値 $H_0 (=const.)$ を考え、

$$H(x, t) = H_0 + H'(x, t), \quad |H_0| \gg |H'|$$

として式(12)を線形化すると、

$$S(x) \frac{\partial H'(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x) H_0 \frac{\partial H'(x, t)}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (13)$$

流れの場が空間的に不均質であり、 $S(x)$ 、 $K(x)$ は次のようであるとする。

$$S(x) = S_0 + S'(x), \quad |S_0| \gg |S'|$$

$$Y(x) = Y_0 + Y'(x), \quad |Y_0| \gg |Y'|$$

$$\text{ただし、} Y(x) = \log e [K(x) H_0]$$

$$\therefore K(x) H_0 = \exp [Y_0 + Y'(x)] = \exp (Y_0) [1 + Y'/1! + Y'^2/2! + \dots]$$

$H'(x, t)$ についても平均値のまわりで変動すると考え、

$$H'(x, t) = h_0(x, t) + h_1(x, t) + h_2(x, t) + \dots$$

と展開すると式(13)は、

$$\begin{aligned} (S_0 + S'(x)) \frac{\partial}{\partial t} (h_0(x, t) + h_1(x, t) + h_2(x, t) + \dots) \\ = e^{Y_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{Y'}{1!} + \frac{Y'^2}{2!} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial x} (h_0(x, t) + h_1(x, t) + h_2(x, t) + \dots) \right] \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

となる。まず、式(14)は1次以上の項を無視すると、

$$\frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial h_0(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 h_0(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \lambda_0 = \frac{e^{Y_0}}{S_0} \dots\dots\dots (15)$$

と書きかえられ、 $h_0(x, t)$ は流れ場が均質で $S'(x)=0$ 、 $Y'(x)=0$ の場合の解に相当する。解析領域 R において、

$$\text{初期条件 } h_0(x, 0) = \phi_0(x)$$

$$\text{境界条件 } h_0(b, t) = 0, \quad b \in \text{Boundary}$$

のとき Green 関数を $G(x, t)$ とすれば,

$$h_0(x, t) = \int_R G(x, \xi, t) \phi_0(\xi) d\xi \dots \dots \dots (16)$$

特に R が無限領域のときは

$$h_0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \phi_0(\xi) d\xi,$$

ここで, $G(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda_0 t}} e^{-\frac{\alpha - \phi_0^2}{4\lambda_0 t}} \dots \dots \dots (17)$

次に, 式 (14) で 2 次以上の項を無視すると,

$$(S_0 + S'(x)) \frac{\partial}{\partial t} (h_0(x, t) + h_1(x, t)) = e^{\nu_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + Y') \frac{\partial}{\partial x} (h_0(x, t) + h_1(x, t)) \right] \dots (18)$$

式 (15) を考慮して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial h_1(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 h_1(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{S'(x)}{e^{\nu_0}} \frac{\partial h_0(x, t)}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[Y' \frac{\partial h_0(x, t)}{\partial x} \right] - \frac{S'(x)}{e^{\nu_0}} \frac{\partial h_1(x, t)}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[Y' \frac{\partial h_1(x, t)}{\partial x} \right] \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

いま, 流れの時間的空間的変動が小さいとして, $Y'(x)$, $S'(x)$, $h_1(x, t)$ およびそれらの導関数を微小と考えると, 式 (19) の右辺第三, 第四項は微小量の二乗となり, 近似的に無視できる. すると, 式 (19) は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial h_1(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 h_1(x, t)}{\partial x^2} &= f(x, t), \\ f(x, t) &= -\frac{S'(x)}{e^{\nu_0}} \frac{\partial h_0(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[Y' \frac{\partial h_0(x, t)}{\partial x} \right] \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

解析領域 R において,

初期条件 $h_0(x, 0) = \phi_0(x)$, $h_1(x, 0) = \phi_1(x)$

ただし, $\phi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x)$

境界条件 $h_0(b, t) = 0$, $h_1(b, t) = 0$

ただし, $b \in \text{Boundary}$

のとき式 (20) を解くと, 水位の第一次近似解は

$$\begin{aligned} h_1(x, t) &= \int_R G(x, \xi, t) \phi_1(\xi) d\xi \\ &+ \lambda_0 \int_0^t \int_R G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \dots (21) \end{aligned}$$

となる.

(2) 地下水位の variogram

初期状態が確定的に与えられるとき, $\phi_1(x) = 0$ であり, 式 (21) は第二項だけとなる. この第二項は, たとえば図-4 のように, $\phi_1 = 0$ のときの場の不均質性による水位の乱れ $h_1 + h_2 + \dots$ の近似値 $h_1(x, t)$ の時間的发展を与える. Dagan (1982) は, こうした場合について第二項のみに基づく variogram の時間的増加を解析的に検討している¹⁵⁾. しかし, 降雨によって形成された空間的にランダムな水位状態が, 無降雨期間に平準化する過程

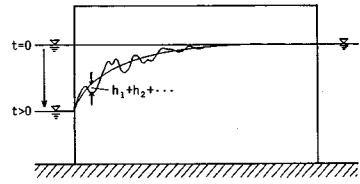


図-4 初期水位が確定的な場合の一例

を考えるとき, $\phi_1 \neq 0$ で第一項が存在する. さらに, 場の不均質性が小さく初期時刻から時間が長く経過していない状況では, $h_1(x, t)$ の挙動に対し第二項の果たす役割は, 第一項に比べむしろ小さいものと考えられる. もちろん, 無降雨期間が無限に長く続けば, 第二項の役割は増大しようが, 現実には適当な間隔で次の降雨がある. したがって, 実データを扱ううえでは, 式 (21) の第一項のみをとることで, 現象の大略が把握できるであろう.

R が無限領域の場合を考え, 式 (21) の第二項を無視すると,

$$h_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) \phi_1(\xi) d\xi \dots \dots \dots (22)$$

距離 D 離れた二地点における h_1 の差の二乗は,

$$\begin{aligned} [h_1(x+D, t) - h_1(x, t)]^2 &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{G(x, \xi, t)G(x, \eta, t) \\ &- G(x+D, \xi, t)G(x, \eta, t)\} \phi_1(\xi)\phi_1(\eta) d\xi d\eta \dots \dots (23) \end{aligned}$$

式 (4) より $H' = h_0 + h_1 + h_2 + \dots$ の variogram は,

$$\begin{aligned} 2\gamma(D) &= \text{Var} [H'(x+D, t) - H'(x, t)] \\ &= E \{ [H'(x+D, t) - h_0(x+D, t) \\ &- (H'(x, t) - h_0(x, t))]^2 \} \\ &= E \{ [h_1(x+D, t) + h_2(x+D, t) + \dots \\ &- (h_1(x, t) + h_2(x, t) + \dots)]^2 \} \\ &\approx E \{ [h_1(x+D, t) - h_1(x, t)]^2 \} \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

式 (23), (24) より

$$\begin{aligned} \gamma(D) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{G(x, \xi, t)G(x, \eta, t) \\ &- G(x+D, \xi, t)G(x, \eta, t)\} \cdot E \{ \phi_1(\xi)\phi_1(\eta) \} d\xi d\eta \\ &\dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

となる.

$\phi(x)$ の共分散および分散は,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\phi(\xi), \phi(\eta)) &= E \{ (\phi(\xi) - \phi_0(\xi))(\phi(\eta) - \phi_0(\eta)) \} \\ &= E \{ \phi_1(\xi)\phi_1(\eta) \} \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(\phi(\xi), \phi(\xi)) = E \{ \phi_1(\xi)\phi_1(\xi) \} = \sigma_\phi^2$$

$\phi(x)$ の自己相関関数 (正規化共分散) を ρ_ϕ とすると,

$$\text{Cov}(\phi(\xi), \phi(\eta)) = \rho_\phi(\xi - \eta) \cdot \text{Cov}(\phi(\xi), \phi(\xi))$$

$$\therefore E \{ \phi_1(\xi)\phi_1(\eta) \} = \sigma_\phi^2 \cdot \rho_\phi(\xi - \eta) \dots \dots \dots (26)$$

よって, 式 (25) は,

$$\begin{aligned} \gamma(D) &= \sigma_\phi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{G(x, \xi, t)G(x, \eta, t) \\ &- G(x+D, \xi, t)G(x, \eta, t)\} \cdot \rho_\phi(\xi - \eta) d\xi d\eta \\ &\dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

ここで、

$$F_1(D, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x+D, \xi, t) G(x, \eta, t) \rho_{\phi}(\xi - \eta) d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (28)$$

とおくと、

$$\gamma(D) = \sigma_{\phi}^2 [F_1(0, t) - F_1(D, t)] \quad \dots\dots\dots (29)$$

ρ_{ϕ} が white noise 近似できるとき、デルタ関数を用いて $\rho_{\phi}(\xi - \eta) = \rho_{\phi} \cdot \delta(\xi - \eta)$, $\rho_{\phi} : \text{const.}$ $\dots\dots\dots (30)$

$$\therefore F_1(D, t) = \rho_{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x+D, \xi, t) G(x, \eta, t) \cdot \delta(\xi - \eta) d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (31)$$

上式で $\int_{-\infty}^{\infty} G(x, \eta, t) \delta(\xi - \eta) d\eta = G(x, \xi, t)$ であるから、

$$F_1(D, t) = \rho_{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x+D, \xi, t) G(x, \xi, t) d\xi \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$= \frac{\rho_{\phi}}{\sqrt{8 \pi \lambda_0 t}} e^{-\frac{D^2}{8 \lambda_0 t}}$$

したがって式 (29)、すなわち $H'(x, t)$ の variogram は結局、

$$\gamma(D) = \frac{\sigma_{\phi}^2 \rho_{\phi}}{\sqrt{8 \pi \lambda_0 t}} (1 - e^{-\frac{D^2}{8 \lambda_0 t}}) \quad \dots\dots\dots (33)$$

と記されることになる。

図-5 に、上式に基づく variogram の時間的変動を示す。同図には、地下水位状態のもつ統計的な空間構造が、時間の経過とともに平準化してゆく過程が現われている。

(3) 水位変動速度の variogram

次に、地下水位の時間的変動速度の空間状態に対する variogram を求める。式 (22) を時間で微分すると、

$$\dot{h}_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x, \xi, t) \phi_1(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (34)$$

したがって、 $\dot{H}'(x, t)$ の variogram は

$$\gamma(D) = \frac{1}{2} \text{Var} [\dot{H}'(x+D, t) - \dot{H}'(x, t)]$$

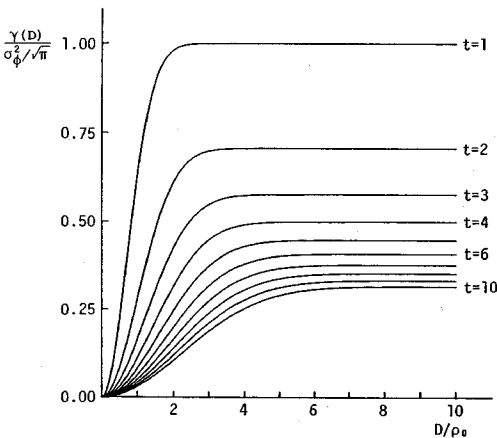


図-5 地下水位 $H'(x, t)$ の variogram ($\rho_{\phi} / \sqrt{8 \lambda_0} = 1.0$)

$$\begin{aligned} &\approx \frac{1}{2} E \{ [\dot{h}_1(x+D, t) - \dot{h}_1(x, t)]^2 \} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(x, \xi, t) \dot{G}(x, \eta, t) \\ &\quad - \dot{G}(x+D, \xi, t) \dot{G}(x, \eta, t)| \cdot E \{ \phi_1(\xi) \phi_1(\eta) \} d\xi d\eta \\ &= \sigma_{\phi}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}(x, \xi, t) \dot{G}(x, \eta, t) \\ &\quad - \dot{G}(x+D, \xi, t) \dot{G}(x, \eta, t)| \cdot \rho_{\phi}(\xi - \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

ここで、

$$F_2(D, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x+D, \xi, t) \dot{G}(x, \eta, t) \rho_{\phi}(\xi - \eta) d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (35)$$

とおけば、variogram は、

$$\gamma(D) = \sigma_{\phi}^2 [F_2(0, t) - F_2(D, t)] \quad \dots\dots\dots (36)$$

$\dot{G}(x, t) = \left(\frac{x^2}{4 \lambda_0 t^2} - \frac{1}{2t} \right) G(x, t)$ であり、さらに式 (30) を考慮すると、

$$F_2(D, t) = \rho_{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(x+D, \xi, t) \dot{G}(x, \xi, t) d\xi$$

$$= \frac{3 \rho_{\phi}}{16 \sqrt{8 \pi \lambda_0 t^5}} e^{-\frac{D^2}{8 \lambda_0 t}} \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{D^2}{8 \lambda_0 t} \right)^2 - 4 \left(\frac{D^2}{8 \lambda_0 t} \right) \right]$$

したがって、水位変動速度の variogram 式 (36) は

$$\gamma(D) = \frac{3 \sigma_{\phi}^2 \rho_{\phi}}{16 \sqrt{8 \pi \lambda_0 t^5}} \left[1 - e^{-\frac{D^2}{8 \lambda_0 t}} \left\{ 1 + \frac{4}{3} \left(\frac{D^2}{8 \lambda_0 t} \right)^2 - 4 \left(\frac{D^2}{8 \lambda_0 t} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (37)$$

となる。図-6 は、式 (37)、および式 (37) の | | 中の第二、第三項を除いた単純な場合、すなわち

$$\gamma(D) = \frac{3 \sigma_{\phi}^2 \rho_{\phi}}{16 \sqrt{8 \pi \lambda_0 t^5}} (1 - e^{-\frac{D^2}{8 \lambda_0 t}}) \quad \dots\dots\dots (38)$$

による \dot{H}' の variogram の時間的変動を示している。同図において、式 (37) の曲線には D の小さい範囲で、 $D \rightarrow \infty$ の場合より大きな値がみられる。これは解析に

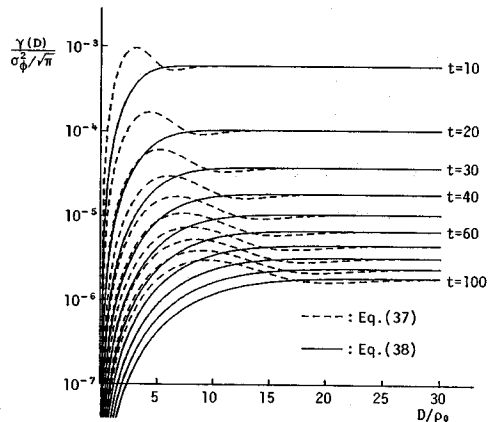


図-6 水位変動速度 $\dot{H}'(x, t)$ の variogram ($\rho_{\phi} / \sqrt{8 \lambda_0} = 1.0$)

おける種々の近似に基づくものと考えられるが、 D がある程度大きい範囲では式(38)の曲線と大差がないことから、以下ではより簡単な式(38)を用いることにする。

ところで、式(33)、(38)による variogram は、 D が増大するに従って、ある一定値に漸近する形状を示している。通常、この一定値を'sill', sillに到達する距離を'range'とよんでいる¹⁴⁾が、 $\gamma(D)$ が sill, rangeをもつとき、状態変数は2次の定常性に従うことが知られている。2次の定常性が成り立つとき、variogramと共分散との間には式(2)、(4)より次の関係がある。

$$\gamma(D) = Cov(0) - Cov(D) \dots \dots \dots (39)$$

図をみると、時間経過に伴って、rangeは徐々に増大、sillは急速に減少している。これは、現象が拡散的であり、 $\gamma(D)$ が時間の増加に対し逆比例する構造をもっているためである。

5. 降雨後の地下水位変動状態の統計的評価

(1) 実測値の variogram と近似解の比較

前章では、水平な無限帯水層を取り扱ったが、一般の広域地下水現象では、この条件は必ずしも満たされない。たとえば、帯水層が河川や湖沼に接する等、境界に近い地域では、地下水位への境界水理条件の影響が無視できない。また、通常、帯水層は少なからず傾斜をもっている。このような場合、地下水位の空間分布にはもはや平均値一定のランダム分布を仮定できず、なんらかの空間的ドリフトが存在する。

2. で述べた試験地域では、不透水基盤が緩やかに傾斜している。図-2に示した無降雨期の水位低減データにおいて、定常性を仮定した式(5)によって variogram を求めると、図-7が得られる。同図は、観測井間の距離を30mごとにクラス分けし、3つの時間断面(図-2のST.2, 4, 6)の観測値を用いたものである。図-7によると、 γ は D に関して放物線的に増加してい

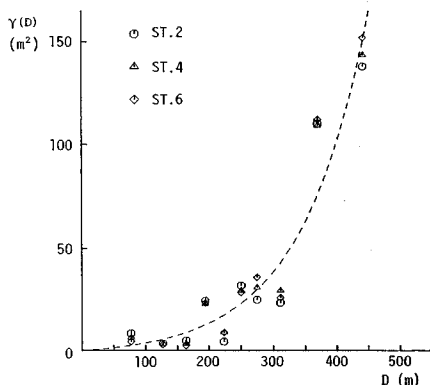


図-7 実測水位の variogram (式(5)による)

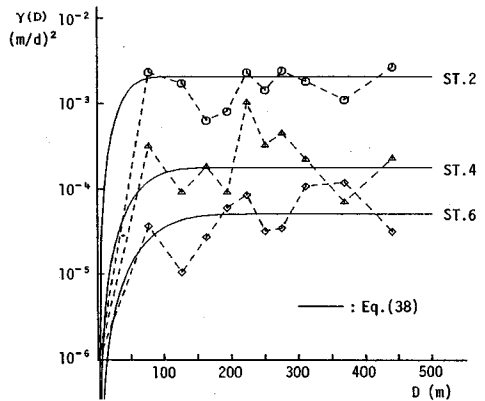


図-8 実測水位変動速度の variogram

るが、時間的な変化はほとんどみられない。各地点の地下水位が時間的に大きく変動しているにもかかわらず、 $\gamma(D)$ にそれが反映されないのは、不透水基盤の勾配等に起因する時間的に変化しない空間変動成分が、観測水位の空間変動のうち多くの部分を占めるためと考えられる。すなわち、標高値で表わされた観測水位は、基盤勾配の影響を受けて空間的ドリフトをもっており、式(3)の統計的定常性は成り立たない。

帯水層の傾斜による観測水位の空間ドリフトは、水位の時間的変動速度を考える場合には小さくなるものと考えられる。図-8は、図-7と同じデータを用いて、水位変動速度の variogram を式(5)より求めたものである。図中の実線は、 $\gamma(D)$ の理論解式(38)である^{注1)}。各時刻(ST.)において、プロットはある程度ばらついているものの、 D に関してほぼ一定の範囲にある。これは、水位変動速度の空間分布が一定の傾向をもたないランダム分布であることを意味している。異なった時刻間でのプロットを比較すると、 γ の値は、時間の経過に伴いオーダー的に低下しており、実線の理論解はその変化をよくとらえている。理論解の計算にあたっては、 $\lambda_0 = 10$ とされているが、これは、帯水層をたとえばシルト混じり細砂層と考え、 $e^{\gamma_0} = 1.0$, $S_0 = 0.1$ とおいた場合に相当する。もう1つのパラメーターである $\sigma_0^2 \rho_0$ は、初期水位の不確定成分 ϕ_1 の分散に関するもので、ここでは500とおいている。式(38)は、水平無限帯水層における近似解であり、厳密には傾斜した帯水層には適用できないが、当試験地域の基盤の傾斜は2~3°程度であるため、水位変動速度に関しては、図のような一致がみ

注1) 式(38)は一次元場の近似解である。等方二次元・三次元場における variogram は、一次元のものに比べ空間的変動性は同様であるが、sillの時間的低下が順次若干早くなる。しかし、この効果は低減当初に限られるので、図-8では近似的に実測値による variogram と一次元解とを対比した。

られるものと考えられる。

(2) Kriging 法の現地への適用

式 (38) で表現された variogram を用いて、試験地域の地下水位変動の状態推定を行う。任意の推定地点 x について、Kriging 方程式を解くことにより各観測値の荷重係数 W が求まり、式 (7) から \hat{H} の推定値が算出される。また、式 (11) によって Kriging 分散、すなわち推定値の信頼度が示される。

図-9, 10 は、図-2 に示した観測データの ST. 2, 4, 6 の3つの時間断面における Kriging 推定値と Kriging 分散である。推定地点は variogram の形状を反映するような空間密度でとるべきであるが、ここでは試行的に 38 m 間隔とし、領域全体で 135 点で行った。ST. 2 は豪雨後 24 日後の状態であって、図-9 の \hat{H} の推定値は井戸 D, F で高く尖り、井戸 B, E で逆に深くなる等、大きな変動を示している。ST. 4, ST. 6 は、無降雨期間がおのおの 64 日, 104 日続いた後の状態であって、 \hat{H}

の推定値の分布は徐々に滑らかなものに変わっている。一方、図-10 の Kriging 分散は、ST. 2, 4, 6 を比較して空間分布はあまり変わらないものの、その絶対値は急速に減少している。これは、 \hat{H} の variogram が時間的には図-6 のように変化するためであり、Kriging 推定値の信頼度が無降雨期間の経過とともに大きく向上していることを示している。

(3) 地下水状態の Conditional Simulation

先に述べた Kriging 推定値は、観測値を考慮した水位変動速度の BLUE であるが、真値そのものではない。ある地点 x の水位変動速度の真値 $Z(x)$ は、Kriging 推定値 $\hat{Z}(x)$ と Kriging 誤差 $e(x)$ の差であり、

$$Z(x) = \hat{Z}(x) - e(x), \quad e(x) = \hat{Z}(x) - Z(x) \dots \dots \dots (40)$$

とかける。 $\hat{Z}(x)$ の空間分布は $Z(x)$ の分布よりも $e(x)$ の分だけ滑らかなものとなるので、 $\hat{Z}(x)$ の分布から現象の空間的変動性をみることはできない。そこで、現象、すなわち地下水位変動速度の空間変動の様子を目に見え

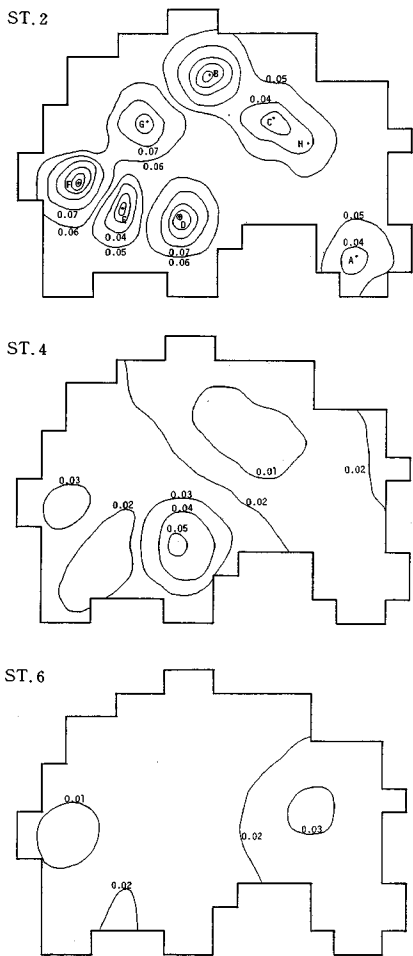


図-9 水位変動速度の Kriging 推定値 (m/day)

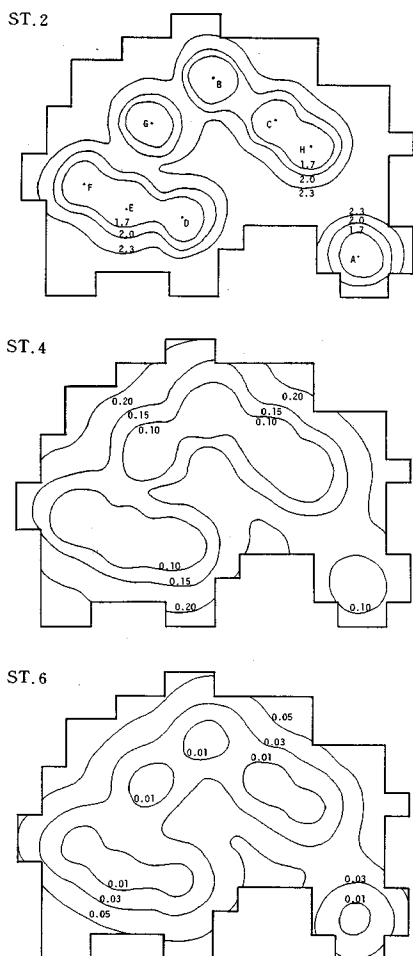


図-10 図-9 の Kriging 分散 ($\times 10^{-3}$, (m/day)²)

るようにするために、真値のもつ統計的空間構造に従いながら、観測地点でゼロとなるような $e(x)$ をモンテカルロ法的に発生させる Conditional Simulation を試みる。

いま、 $e(x)$ の共分散行列 $[S]$ を考える。観測点を除く二地点 l, m ($l, m=1, 2, \dots, K$) における Kriging 誤差を e_l, e_m とすると、

$$[S_{lm}] = E[(e_l - E[e_l])(e_m - E[e_m])] \dots (41)$$

式 (8) より $E[e(x)] = E[\hat{Z}(x) - Z(x)] = 0$

式 (7) より $e(x) = \hat{Z}(x) - Z(x) = \sum_i W_i Z_i - Z(x)$

したがって、式 (41) は

$$[S_{lm}] = E\left[\left(\sum_i W_{li} Z_i - Z_l\right)\left(\sum_j W_{mj} Z_j - Z_m\right)\right] \dots (42)$$

上式を展開し、式 (9), (10), (39) を考慮すると、

$$[S_{lm}] = \sum_j W_{mj} \gamma(D_{lj}) - \gamma(D_{lm}) + \mu_m \dots (43)$$

$$l, m=1, 2, \dots, K$$

特に、 $l=m$ のときは

$$[S_{mm}] = \sum_j W_{mj} \gamma(D_{jm}) + \mu_m \dots (44)$$

すなわち、 $e(x)$ の共分散行列の対角項は Kriging 分散に相当する。

さて、このようにして求められた $[S]$ は一般に正定値対称行列となるので、 $[S] = [Q][Q]^t$ と分解できる。 K 個の白色正規乱数を成分にもつ列ベクトルを $\{e_i, e_i$ ($i=1, 2, \dots, K$) を成分にもつ列ベクトルを $\{e\}$ とし、

$$\{e\} = [Q]\{e\} \dots (45)$$

とおくと、 $\{e\}$ は平均ゼロ、共分散 $[S]$ の正規乱数ベクトルとなる⁷⁾。したがって、地点 i における Kriging 推定値 \hat{Z}_i に e_i を加えることにより、 Z の Conditional Simulation を行うことができる。

図-11 は、図-9 と同じ 3 つの時間断面について行った Simulation 結果の一例である。同図には、確率場として真値のもつ 1 つの実現値が表わされており、水位変動速度の空間的変化特性を読み取ることができる。すなわち、ST.2 では、水位が急激に上昇する地点と緩やかな動きをする地点とがランダムに混在し、きわめて複雑な地下水状態を呈しているのに対し、ST.4, 6 では、時間の経過とともに、水位低減速度の分布が徐々に落ち着いたものに変わっていく様子が明瞭に示されている。

これらの図は、地下水位の観測データについて非常に重要なことを示唆している。すなわち、豪雨直後の ST.2 のような状態では、少ない観測地点で領域内の地下水水位変動の全体を把握することはかなり困難であるが、無降雨期間が長く続いた後では、わずかな観測地点でも広い地域の地下水状態を知ることができる。言い換えれば、観測データの信頼性・有用性は現象

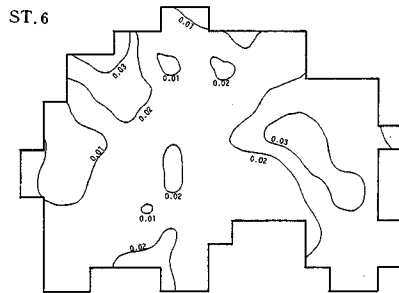
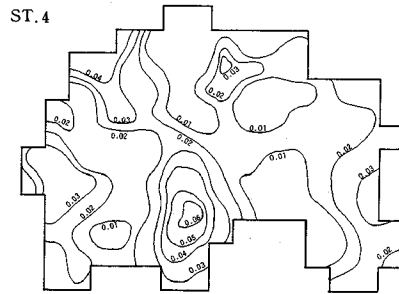
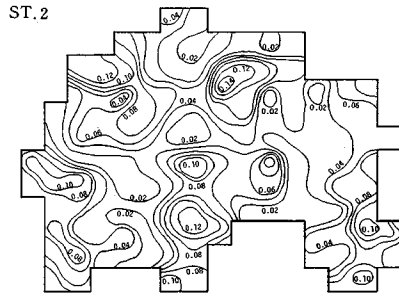


図-11 水位変動速度の Conditional Simulation (m/day)

のおかげの状態によって大きく変動するのであって、観測網が同一であっても現象に対する観測精度は一定ではない。したがって、観測値を用いて種々の工学的判断をする際には、現象の状態を十分に考慮して、観測データのもつ価値を見きわめることが肝要であろう。

6. 結 論

不均質な流れ場における地下水挙動、特に降雨によって乱された地下水位分布が無降雨期に平準化する過程について、統計的手法を用いて空間状態の評価を行った。本研究で得られた主な知見は以下のとおりである。

- (1) 丘陵地域に設けた小試験地での地下水位観測結果によると、降雨に対する水位応答は井戸ごとに大きく異なる。これは、帯水層の不均質性や降雨浸透の空間的非一様性に起因するものであり、水位変動量の空間的広がり、平均値一定のランダム分布とみなすことができる。

(2) 降雨後の地下水位および水位変動速度の統計的空間構造として、variogram が流れの基礎方程式を擾動展開することにより求められた。その形状は 'range' と 'sill' をもつもので、降雨後の時間経過に伴い、range は徐々に増大、sill は急速に減少する。

(3) 水位変動速度に対し理論的に導かれた variogram は、小試験地での実測水位から求められた variogram をほぼ説明する。特に、時間経過に伴う sill の低減では両者のよい一致がみられる。

(4) 理論的に導かれた variogram を媒介にして、試験地域の地下水位変動状態の Kriging 推定と Conditional Simulation が行われた。その結果、不圧地下水の空間状態は、降雨直後にはきわめて複雑であるものの、無降雨期間の経過に伴ってだいに落ち着いたものに変化し、地下水状態を考えるうえで、観測データの空間的代表性は急速に拡大することが示された。

本研究では、降雨後の地下水状態の平準化過程を統計的に推定したにとどまっているが、今後は、こうした現象における地下水位の観測精度と、広域地下水解析における観測値の取り扱いについて、具体的な指針を見出すべく研究を進める予定である。

参 考 文 献

- 1) Freeze, R.A. : A Stochastic-Conceptual Analysis of One-Dimensional Groundwater Flow in Non-uniform Homogeneous Media, *Water Resour. Res.*, Vol. 11, No. 5, pp. 725~741, 1975.
- 2) Tang, D.H. and Pinder, G.F. : Simulation of groundwater flow and mass transport under uncertainty, *Adv. Water Resour.*, Vol. 1, No. 1, pp. 25~30, 1977.
- 3) Bakr, A.A., Gelhar, L.W., Gutjahr, A.L. and MacMillan, J.R. : Stochastic Analysis of Spatial Variability in Subsurface Flows, 1. Comparison of One- and Three-Dimensional Flows, *Water Resour. Res.*, Vol. 14, No. 2, pp. 263~271, 1978.
- 4) Smith, L. and Freeze, R.A. : Stochastic Analysis of Steady State Groundwater Flow in a Bounded Domain, 1. One-Dimensional Simulations, *Water Resour. Res.*, Vol. 15, No. 3, pp. 521~529, 1979.
- 5) Neuman, S.P. and Yakowitz, S. : A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 1. Theory, *Water Resour. Res.*, Vol. 15, No. 4, pp. 845~860, 1979.
- 6) Clifton, P.M. and Neuman, S.P. : Effects of Kriging and Inverse Modeling on Conditional Simulation of the Avra Valley Aquifer in Southern Arizona, *Water Resour. Res.*, Vol. 18, No. 4, pp. 1215~1234, 1982.
- 7) 古市 徹 : 環境移流拡散現象の解析手法と数値シミュレーションに関する研究, 京大学位论文, 1984.
- 8) 神野健二・上田年比古・鶴田明寛・平野文昭 : 透水量係数の空間分布および2次元確率微分方程式の自己帰帰係数の推定, 第29回水理講演会論文集, pp. 881~886, 1985.
- 9) 藤間 聡・中田満洋 : 空間分布構造を有する透水係数の統計的推定法, 日本地下水学会誌, Vol. 28, No. 1, pp. 15~24, 1986.
- 10) Yeh, W.W-G. : Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology : The Inverse Problem, *Water Resour. Res.*, Vol. 22, No. 2, pp. 95~108, 1986.
- 11) 高木不折・原田守博・内田光一 : 小牧東部丘陵地における地下水位の変動特性に関する一考察, 日本地下水学会誌, Vol. 27, No. 4, pp. 171~182, 1985.
- 12) Delhomme, J.P. : Spatial Variability and Uncertainty in Groundwater Flow Parameters : A Geostatistical Approach, *Water Resour. Res.*, Vol. 15, No. 2, pp. 269~280, 1979.
- 13) 原田守博・内田光一・高木不折 : 地下水流動モデルのパラメータ評価に関する一考察, 第39回土木学会年次学術講演会概要集, II, pp. 5~6, 1984.
- 14) たとえば, Delhomme, J.P. : Kriging in the Hydrosciences, *Adv. Water Resour.*, Vol. 1, No. 5, pp. 251~266, 1978.
- 15) Dagan, G. : Analysis of Flow Through Heterogeneous Random Aquifers, 2. Unsteady Flow in Confined Formations, *Water Resour. Res.*, Vol. 18, No. 5, pp. 1571~1585, 1982.

(1986. 10. 20・受付)