

# 流速分布を考慮した波先端の特性曲線解

## A CHARACTERISTICS SOLUTION WITH VELOCITY DISTRIBUTION OF WAVE FRONT

真野 明\*・加藤 聡也\*\*

By Akira MANO and Toshiya KATO

Characteristic equations are deduced for shallow water waves with velocity distribution due to bottom friction. It is shown that the effect of velocity distribution plays an important role at the wave front on dry bed. It changes the wave front path from the envelope locus of the characteristics to the nodal locus. Integration of the equations gives a bounded solution for certain range of the exponent  $\alpha$  on the depth. The range varies depending on the singularity at the front. Hydraulic experiments have been carried out and velocity distributions are measured at the still water shoreline by the hydrogen bubble method. The time development of the velocity distributions show a similarity.

Numerical analysis by using the characteristic equations and measured velocity distributions as a boundary condition shows a good agreement with the measured values of wave front path and spatial wave shapes.

*Keywords*: wave run-up, characteristics, bottom friction, wave front singularity

### 1. 序 論

陸上を遡上する波の先端部分では、底面摩擦力が重要な役割を果たすことが知られており、浅水理論の運動方程式に底面摩擦項を加えてこれを解く試みが数多く行われてきている。この底面摩擦項には、Chezyの摩擦公式や Manningの摩擦公式など種々の公式が適用されてきているが、この項が局所的な水深のべき乗を分母にもっているために、水深が零となる陸上での波の先端は特異点となる。このことが問題の解決を困難にしており、この特異性を克服するために、多くの工夫が試みられてきている。

Dressler (1952)<sup>1)</sup>はダム破壊流れの摩擦の影響を評価するために、Chezyの摩擦項を加え摂動展開を行った。摩擦のない場合を第0次近似解とし、それに摩擦係数を摂動パラメーターとする摂動項を加えて展開を行ったものであるが、先端に近づくに従って解は発散しており先端付近の挙動は調べられていない。これは先端での特異性が摩擦項を考慮することによって初めて現われるもので

あり、摩擦を無視した理論からの摂動では表現できないことを意味している。またこれとは別に、流れの先端での挙動を特性曲線を用いて考察している。流れの先端では前進性と後退性の2本の特性曲線の傾きが一致することより先端の軌跡はこれらの包絡線で表わされることを指摘した。これは解の性質を調べるうえでの重要な指摘であり、後で議論する。

Whitham (1955)<sup>2)</sup>は Dresslerと同じ問題を先端部に境界領域を考慮することにより解いた。先端部だけに摩擦力が働くとしその間で流速が一定として積分し特異性を解消している。その後ろの解と接続して解析解を求めた点に優れた発想がある。また先端部で摩擦項に釣り合う特異項は水面勾配の項であることを指摘してその後の研究に大きな影響を与えた。

FreemanとLeMehaute (1964)<sup>3)</sup>は波の陸上遡上の問題を、Chezy型の底面摩擦項を導入し特性曲線法により解いた。ここで上述のWhithamの指摘をモデル化している。波が遡上するときに、底面摩擦項とのつり合いから先端での水面勾配を無限大とし、そこで仮想の水深を考えフルード数が一定という境界条件を提案した。

Cross (1967)<sup>4)</sup>は津波の波力を推定するために、先端部での流速を一定として運動方程式を積分し、先端部の水深を先端からの距離、先端部の流速および加速度で表

\* 正会員 工博 東北大学講師 工学部土木工学科  
(〒980 仙台市荒巻字青葉)

\*\* 学生会員 東北大学大学院 工学研究科  
(同上)

わす式を導いた。Whitham の理論との相違点は、これが流速や加速度の関数となっていることで、これらの諸量はあらかじめ与える必要がある。

以上のものが基本的な考え方で、先端部に流速一定の境界域を考えて積分することや、仮想の水深を考慮することにより特異性を避けている。これらの考え方を応用したものに以下のような研究がある。

岩崎・富樫 (1969)<sup>5)</sup>、Chu・Abe (1983)<sup>6)</sup>は Freeman らの方法を津波の陸上遡上の問題に適用し、波先端のフルード数の大きさを調べた。

Sakkas・Strelkoff (1973)<sup>7)</sup>は三角形断面におけるダム破壊流れを特性曲線法で扱ったが、先端と先端に最寄りの特性曲線の間部分では Whitham の考え方に基いて流速を一定とし、先端の位置を推定している。

松富 (1981)<sup>8)</sup>は Cross の式を津波の陸上遡上の先端に適用し、Whitham の想定した摩擦係数の値の適否を論じている。

これらの研究においては実験などとの比較によりそれぞれ係数を決め妥当性を検討しているが、先端部のモデル化の意味が不明確であることと、特異点の近傍に仮想的な領域を計算メッシュのオーダーでとっているという問題点が残されている。

本研究は陸上での波先端の挙動を数値解析により予測しようとするものである。このとき最も問題となる先端での特異性を明らかにし、支配方程式をできるだけ正確に解こうとするものである。ここでは、底面摩擦と同時に流速分布を考えた浅水方程式を出発点とし、その特性方程式を導く。これから先端での特性曲線の挙動が流速分布を考慮ることにより大きく異なることを示す。汀線での流速分布を可視化の手法により測定しその分布形が相似形であることを示し、本研究で導いた特性方程式とこの流速分布形を使って数値解析し、実験で得られた波形などを再現できることを示す。最後に先端での特異性を考察し、流速分布を考慮した場合と無視した場合の解の性質などを比較して論じる。

## 2. 特性方程式の誘導

一様勾配の斜面を考え、圧力分布に静水圧分布を仮定し、 $x$  軸を底面に沿って上向きにとると、二次元非圧縮性流体の  $x$  方向の境界層近似を使った運動方程式と、連続方程式は次のように書ける、

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \dots (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \dots (2)$$

ここで、斜面の勾配は  $\tan \theta$  である。原点は Fig.1 に

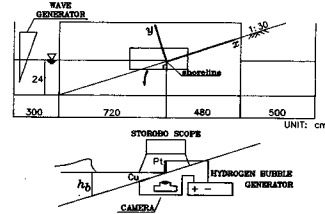


Fig.1 Coordinate system and experimental apparatus.

示すように静水時の汀線にとり、 $y$  軸は底面と直角上方、 $\bar{u}$  と  $\bar{v}$  はおのおの  $x$  および  $y$  方向の水粒子速度で、統計的な平均量である。また、 $D$  は  $y$  軸方向に測った底面から水面までの距離、 $\nu$  は分子動粘性係数と渦動粘性係数を加えた全動粘性係数である。

底面および水面における運動学的境界条件は、

$$\bar{v} = 0 \quad \text{at } y = 0 \dots (3)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial D}{\partial x} = \bar{v} \quad \text{at } y = D \dots (4)$$

いま、流速分布の相似を仮定し、水面での流速勾配がないと仮定する。

$$\eta = \frac{\partial u'}{\partial y'} \Big|_{y'=0} = \text{const.}, \quad \frac{\partial u'}{\partial y'} \Big|_{y'=1} = 0 \dots (5)$$

ここで、 $u' = \bar{u}/\bar{U}$ 、 $y' = y/D$  であり、 $\bar{U}$  は境界層の外側の流速である。

式 (1)、(2) を境界条件 (3)、(4) と (5) を使って、底面から水面まで積分すると、次の方程式を得る。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + G = 0 \dots (6)$$

ここで、

$$M^T = (M, D) \dots (7)$$

$$F^T = \left( \frac{\beta M^2}{D} + g \cos \theta \frac{D^2}{2}, M \right) \dots (8)$$

$$G^T = \left( g \sin \theta D + \frac{\nu U}{aD} \eta, 0 \right) \dots (9)$$

この中でゴシックの記号はベクトル量を表わし、上添の  $T$  は、ベクトルの転置を表わす。また  $M$  は流量であり、 $\beta$  は次式で定義される運動量補正係数、 $a$  は境界層外側の流速  $\bar{U}$  と断面平均流速  $U$  を結び付ける換算係数である。

$$a = \int_0^1 u' dy', \quad b = \int_0^1 u'^2 dy', \quad \beta = \frac{b}{a^2} \dots (10)$$

$$a \bar{U} = U = M/D \dots (11)$$

ベクトル  $F$  は  $M$  の関数であるので、式 (6) は次のように書き換えることができる。

$$L = \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial x} + G = 0 \dots (12)$$

ここで

$$\frac{\partial F}{\partial M} = \begin{bmatrix} 2\beta U, & -\beta U^2 + g \cos \theta D \\ 1, & 0 \end{bmatrix} \dots (13)$$

式 (12) の係数行列  $\partial F/\partial M$  は 2 つの実数の固有値をもち、それらを  $\zeta^{\pm}$  で表わすと、

$$\zeta^{\pm} = \beta U \pm \sqrt{g \cos \theta D + \beta(\beta - 1) U^2} \dots\dots\dots (14)$$

これらの固有値に対する左固有ベクトルは

$$\lambda^{\pm} = (1, -\zeta^{\pm}) \dots\dots\dots (15)$$

左固有ベクトル  $\lambda$  と微分方程式  $L$  のスカラー積をとると、

$$\lambda^{\pm} (M_t + \zeta^{\pm} M_x) + \lambda^{\pm} G = 0$$

となる。

ここで  $dx/dt = \zeta^{\pm}$  の方向に沿う時間の実質微分を  $d/dt$  で表わすことにすれば、

$$\lambda^{\pm} dM/dt + \lambda^{\pm} G = 0$$

となる。 $M$  の各成分の微分方向がすべて  $\zeta^{\pm}$  の方向であるのでこれが特性曲線の方向になり、上式は特性曲線の上で成り立つ特性方程式となる。成分で表わすと、次の常微分方程式が得られる。

$$M_{\sigma} + (\zeta^{\pm} - 2\beta U) D_{\sigma} + G(1) t_{\sigma} = 0, \quad x_{\sigma} = \zeta^{\pm} t_{\sigma} \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 $z_{\sigma}$  は変数  $z$  の特性パラメーター  $\sigma$  による常微分を表わす。また、 $G(1)$  はベクトル  $G$  の第 1 成分を表わす。 $G(1)$  は重力の斜面方向の成分と底面摩擦力の和であり、これらの項の存在によって、いわゆる Riemann Invariant は存在しないことになる。微分方程式が与えられた場合に、特性方程式を求める演算は、Courant と Friedlich (1948)<sup>9)</sup> に詳しく述べられており本質的には同じものであるが、ここでは、固有値と固有ベクトルの概念を用いて導いた。

いま 1 本の  $\zeta^+$  特性曲線の上に 2 点、 $P$  と  $Q$  をとり、 $Q$  点を通る  $\zeta^-$  特性曲線上にもう 1 点  $R$  をとる。 $Q$  点は  $P$  点や、 $R$  点より時間的に後の点とする。各特性曲線上で式 (16) を積分すると次式を得る。

$$M_Q - M_P + \int_{D_P}^{D_Q} (\zeta^+ - 2\beta U) dD + \int_{t_P}^{t_Q} G(1) dt = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$x_Q - x_P = \int_{t_P}^{t_Q} \zeta^+ dt, \dots\dots\dots (18)$$

$$M_Q - M_R + \int_{D_R}^{D_Q} (\zeta^- - 2\beta U) dD + \int_{t_R}^{t_Q} G(1) dt = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$x_Q - x_R = \int_{t_R}^{t_Q} \zeta^- dt, \dots\dots\dots (20)$$

ここで下添の  $P, Q, R$  はそれぞれ  $P, Q, R$  点での量であることを表わしている。

### 3. 数値解析の方法および境界条件

点  $P, Q, R$  がいずれも波先端の境界上にはない場合には、点  $P, R$  での諸量を既知量として式 (17)~(20) を数値積分することにより、 $Q$  点での未知量  $x, t, M,$

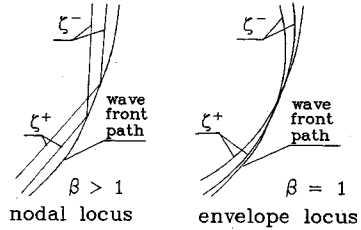


Fig.2 Characteristics near wave front.

$D$  を求めることができる。ここで数値積分には台形公式を用いた。これらの積分の上限値は  $Q$  点での値であり、未知量であるので逐次近似法を用いる。

波先端での境界条件は水深が零であるということと、波先端の移動速度が先端での断面平均水粒子速度と等しいという 2 つの条件であり、式で表わすと次のようになる。

$$M^r = (M, D) = 0^r \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = U_s \dots\dots\dots (22)$$

ここで  $\xi$  は波先端の  $x$  座標を表わし、下添字の  $s$  は先端での量を示す。

最初に波の先端での特性曲線の傾きを調べてみる。水深が零の条件から式 (14) は、

$$\zeta_s^{\pm} = (\beta \pm \sqrt{\beta(\beta - 1)}) U_s \dots\dots\dots (23)$$

流速分布の形が一様でないかと仮定しているので、運動量補正係数  $\beta$  は 1 より大きくなり、 $\zeta_s^+$  と  $\zeta_s^-$  は相異なる値をとることがわかる。このとき先端での水粒子速度  $U_s$  との大小関係は、すべての  $\beta > 1$  に対して、

$$\zeta_s^- < d\xi/dt < \zeta_s^+ \dots\dots\dots (24)$$

すなわち波の先端では、Fig.2 の左側に示すように、2 本の特性曲線は角度をなして交わっており、波先端の軌跡はそれらの交点を連ねた、節点軌跡<sup>10)</sup>となる。時間の経過とともに、 $\zeta^+$  特性曲線は、先端に近づき、 $\zeta^-$  特性曲線は離れていく。波先端の未知量  $\xi, t_s$  および  $U_s$  を時間の経過に従って求めるためには、 $\zeta^+$  特性曲線と、波先端の軌跡の交点を考えて、式 (17), (18), (22) を連立させて解けばよいことになる。

$\beta = 1$  の場合には  $\zeta_s^+$  と  $\zeta_s^-$  が一致し Dressler の指摘のとおり右図のような包絡線となる。

いま  $\beta > 1$  で、点  $Q$  が波先端に位置する場合を考える。このとき境界条件より水深が零となるので、式 (17) における  $G(1)$  はこの点で無限大となり、積分区間の端点の関数値を使う台形公式は直接適用することができない。そこで最初に  $D(x, t)$  に関数形を与え積分の存在を調べることにする。いま  $x-t$  平面における  $D$  の勾配 ( $grad$ ) の方向を  $n$  とし距離を  $\delta_n$  とする。 $D$  の  $n$  方向の関数が  $\delta_n$  の  $\alpha$  乗に比例すると仮定すると、 $t$  軸の方

向や特性曲線の方向は遡上時にはいずれもこの  $n$  の方向とは直交しないので、これら2つの方向の  $D$  の関数は  $\delta\sigma$  にそれぞれの方向の方向余弦を掛けたものに比例することになる。特性パラメーター  $\sigma$  としてこの特性曲線に沿う距離をとると、特性曲線に沿う  $D$  の関数は次式で表わされる。

$$D(x, t) \propto |t_s - t|^{\alpha\sigma} |\sigma_s - \sigma|^\alpha \dots\dots\dots (25)$$

ここで指数  $\alpha$  が  $0 < \alpha < 1$  の値をとるときにのみ、積分が存在する。 $D(x, t)^{-1}$  の特性曲線に沿う  $\sigma$  の不定積分を  $K(\sigma)$  とし、式(17)の左辺第4項の定積分を  $I$  とすると、部分積分を行うことにより、各係数が一定として、

$$I = \int_{\sigma}^{\sigma_0} \eta \frac{\nu_t}{a} \frac{U}{D} \frac{dt}{d\sigma} d\sigma$$

$$= \eta \frac{\nu_t}{a} \left[ KU \frac{dt}{d\sigma} \right]_{\sigma}^{\sigma_0} - \int_{\sigma}^{\sigma_0} K \frac{dU}{dD} \frac{dt}{d\sigma} d\sigma$$

いま右辺第2項に台形公式を適用し、

$$dU/d\sigma \doteq (U_q - U_p)/(\sigma_q - \sigma_p)$$

の近似を使うと、

$$I \doteq \eta \frac{\nu_t}{a} \frac{dt}{d\sigma} (K_q - K_p)(U_q + U_p)/2$$

ここで  $\sigma$  を消去すると次式が得られる。

$$I = \eta \frac{\nu_t}{a} \frac{U_p + U_q}{2} \frac{1}{1 - \alpha} \frac{D_q^{1-\alpha/\alpha} - D_p^{1-\alpha/\alpha}}{D_q^{1/\alpha} - D_p^{1/\alpha}} \dots\dots\dots (26)$$

この式は  $D_q = 0$ ,  $0 < \alpha < 1$  に対して有界であることがわかる。

次の章で水理実験の結果を述べるが、 $\alpha = 1/2$  の場合には上式は次のように簡単になる。

$$\eta \frac{\nu_t}{a} \frac{U_p + U_q}{D_p + D_q} \cdot (t_q - t_p) \dots\dots\dots (27)$$

以上により有界な3つの方程式が得られたので、先端での、前述の3つの未知量は逐次近似法で求めることができる。

このほか、 $\xi$  特性曲線の  $R$  点が波の先端に位置するときにも式(26)を用いる。

沖側の境界条件は静水時の汀線で水深と流速を実験結果より与える。

### 4. 水理実験

#### (1) 実験装置

実験は Fig. 1 に示すような、長さ 2000 cm、高さ 50 cm、幅 80 cm の水路において行った<sup>11)</sup>。水路の中を幅 40 cm に仕切り、片側に型枠用ベニヤ板で勾配 1/30 の斜面を作った。水路の一端にはプランジャー型の造波機を設置し、起動時のプランジャーの位置を最も高い位置に調節して造波した。

実験条件は Table 1 に示す1種類であり、同じ条件で3回実験している。ここで  $T$  は造波機の周期、 $h$  と  $H$

Table 1 Experimental conditions.

T(sec)	$h_i$ (cm)	$H_i$ (cm)	$h_b$ (cm)	$H_b$ (cm)
1.92	24.0	1.1	1.0	1.6

は鉛直方向に測った、水深と波高である。また下添字の  $i$  と  $b$  はそれぞれ、沖側の一定水深部分と碎波位置に關する量であることを表わしている。碎波は spilling 型であった。

#### (2) 計測方法

静水時汀線での流速分布の経時変化、汀線より陸側での空間波形の経時変化、沖側の定点での水位の経時変化の3種類を測定した。

流速の測定には可視化の手法を用いた。すなわち、汀線上に 50  $\mu$ m の白金線を張り、これに電圧 300~400 V、周期 0.02 s の矩形パルス印加し、水素気泡を発生させた。これに水路上方よりスリット型キセノン放電管発光のストロボスコープを 0.025 s 間隔で発光させた。同時に汀線付近に光軸を合わせ、気泡面から 15 cm 離れた位置に焦点距離 55 mm、明るさ F2.8 のマクロレンズを装着したストリークカメラを設置し水素気泡のタイムラインを撮影した。

波先端付近の流速は速くて、乱れており撮影が難しい。このため、水に水酸化ナトリウムを加えて水素気泡の発生量を多くし、また KODAK Recording Film 2475 を用いて ASA6400 まで増感するなど工夫した。

空間波形の測定には同じストロボスコープとカメラを用いた。測定範囲が広がるためカメラの位置は水路より 50 cm 離れた。

タイムラインの間の距離をデジタイザーで読み取り水素気泡の発生時間間隔で割って流速を求めた。1回の測定時間はフィルムの長さ、流速、スリットの長さより決まり本実験の場合約 0.4 s であった。

流速の測定と空間波形の測定は同時にはできなかった。同期装置を制作し、2回造波して1組のデータとした。同期装置は、水面の接触センサーより開始信号を発生させ、水素気泡発生装置、ストロボスコープ、カメラを毎回同位相で動作開始させる装置で、時定数 0.01 s の性能をもつ。

沖側での水位の経時変化を求めるために抵抗線式波高計を用いた。

#### (3) 測定結果

Fig. 3 に沖側での波形を示す。斜面法先の  $x = -720$  cm において波の先端部は小さな波形勾配を有するが斜面を伝搬するに従って前傾し  $x = -30$  cm で碎波し、段波状になって汀線に接近している。

Fig. 4 には汀線での流速分布を示す。波の先端部は乱

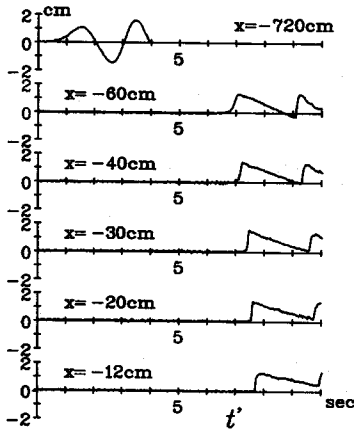


Fig. 3 Wave shapes.

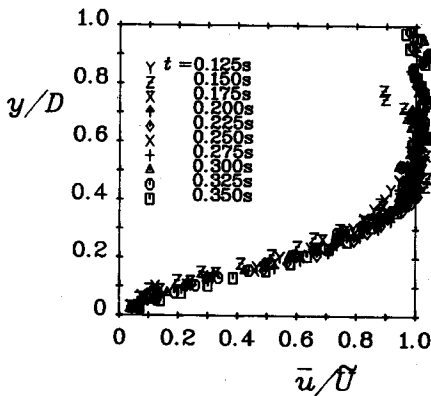


Fig. 4 Velocity distribution at shoreline.

Table 2 Coefficients on velocity distribution and the depth.

a	b	$\beta$	n	$\alpha$
0.813	0.746	1.13	2.70	0.5

れが大きくタイムラインは波の先端が汀線を通じて 0.1 s 以後から読み取り可能となった。これで求めた流速は乱れを含んでおり、アイディンほかの方法<sup>12)</sup>で平滑化し  $\bar{u}$  とした<sup>11)</sup>。横軸はこれを境界層の外側の流速  $\tilde{U}$  で割って正規化したものである。図中の記号は測定の時刻を示しており、波の先端が汀線を通じて時刻を零とした。

各時刻の分布形は相似形となっていることがわかる。これより、2. で定義した諸量を求め、Table 2 に示した。また基準とした流速、水深の経時変化を Fig. 5 に示す。これらの量はばらつくので、数値解析の汀線上の境界条件を与えるため次の解析関数を当てはめた、

$$\tilde{U}(0, t) = 83.6 \exp(-1.8 t^{0.6}) \dots \dots \dots (28)$$

$$D(0, t) = 2.06 t^{1/2}, \quad 0 \leq t \leq 0.225 \text{ s} \\ = 0.97 + 0.4(t - 0.225), \quad 0.225 \leq t \dots \dots (29)$$

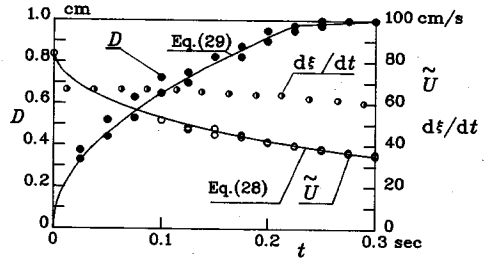


Fig. 5 Time development of  $U$ ,  $D$  and  $d\xi/dt$ .

前述のように  $\tilde{U}$  は  $t=0.1$  s 以後で測定値があり、また  $t=0$  での値は次の方法により求められる。先端の移動速度  $d\xi/dt$  はほぼ一定の勾配で変化しており原点での値  $d\xi/dt_0$  は正確に求められる。これと境界条件 (22) を用い、 $t=0.1$  s 以前でも Fig. 4 の相似形が成り立つと仮定して次式より推定した、

$$\tilde{U}(0, 0) = \frac{d\xi}{dt_0} \cdot \frac{1}{a} \dots \dots \dots (30)$$

水深の変化については原点より測定値があり、 $t=0.225$  s までは時間の  $\alpha=0.5$  乗で変化していることがわかる。

Fig. 4 は汀線での流速分布形の時間発展が相似であることを示しているが、これが空間的にも成り立つと仮定して前章の数値解析を行った結果を次に示す。

### 5. 解析結果および考察

#### (1) 水理実験との比較

全動粘性係数  $\nu_t$  を  $0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$  から  $0.08 \text{ cm}^2/\text{s}$  まで変えて計算した波先端の移動軌跡を Fig. 6 に示す。 $\nu_t = 0.02 \text{ cm}^2/\text{s}$  の計算値が全体的に実験値とよく一致している。しかし詳しくみると  $\xi=15 \text{ cm}$  より大きなところで実験値はこの曲線から離れ始め  $\nu_t = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$  の曲線に近づく傾向を示す。初期の段階では分子粘性と同程度の渦動粘性が含まれていて、伝播とともに先端部の流速が減衰しそれに伴って渦動粘性が減衰したものと考えられる。 $\nu_t$  は一定として解析しているが、底面摩擦項は特に先端部で支配的であるので、先端の軌跡の実測値との比較から推定した  $\nu_t$  の値は、先端付近に同定してい

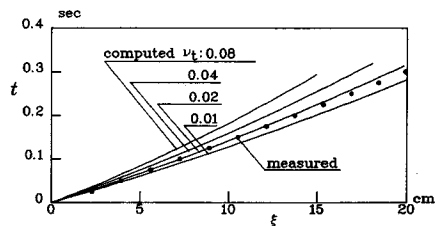


Fig. 6 Effect of  $\nu_t$  on the wave front path.

るものと考えられる。以後  $\nu_t = 0.02 \text{ cm}^2/\text{s}$  の場合について述べる。

Fig. 7 は計算した全特性曲線網を示す。汀線境界で  $t < 0.1 \text{ s}$  では、 $\Delta t = 0.0025 \text{ s}$ 、 $t > 0.1 \text{ s}$  では  $\Delta t = 0.01 \text{ s}$  の時間間隔で境界値を与えている。汀線上の  $t = 0.1 \text{ s}$  から出発した  $\xi^+$  特性曲線は  $x > 20 \text{ cm}$  で先端と交わることを示しており、この曲線より下の部分は  $t < 0.1 \text{ s}$  の境界値のみに依存している。前述のようにこの間の流速の測定値はないので、精度には問題が残るが、式 (28) の関数形を変えても原点での流速が同じであれば波先端の軌跡や後で述べる空間波形にはあまり影響がないことを確かめている。

また原点を出発した  $\xi^-$  特性曲線より左側の領域は波先端の境界の影響を受けない領域であり、右側とは性質

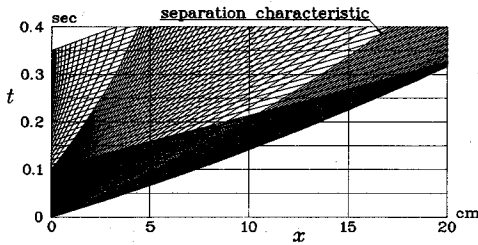


Fig. 7 Characteristics network.

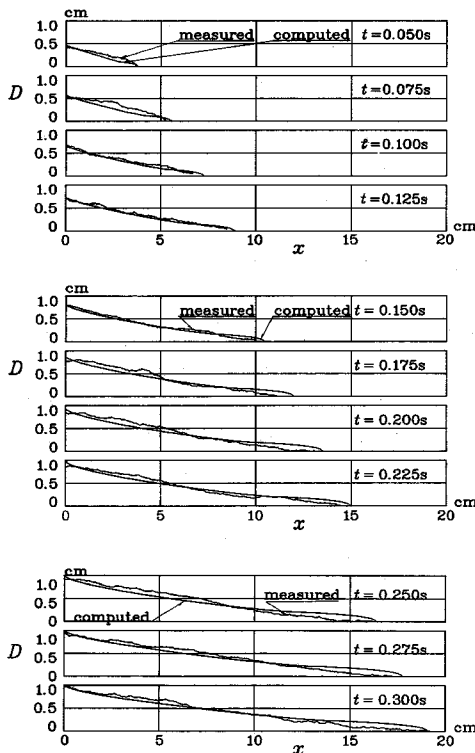


Fig. 8 Time development of spatial wave shape.

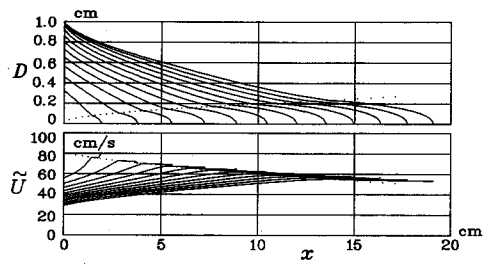


Fig. 9 Spatial shapes of  $D$  and  $\tilde{U}$  ( $t = 0.025 \text{ s}$  to  $0.3 \text{ s}$ ).

が異なる。この曲線を分離特性曲線とよぶことにする。

空間水面波形の時間発展を Fig. 8 に示す。図中の滑らかな曲線が計算値、小さな凹凸のあるのが実験値である。両者はよく一致している。しかし部分的にはいくつか相違点がみられる。 $t = 0.050 \text{ s}$ 、 $0.075 \text{ s}$  の  $x = 2 \text{ cm}$  付近には実測値のほうに盛り上がった部分がある。写真をみるとこの部分は水面が面的に太く写っており、水路の奥行き方向に乱れる三次元的現象の影響が現われていることによる差異である。また  $t > 0.175 \text{ s}$  での実測値は先端部で底面に接するような水面形状となっているが、ここでも可視化した水面は太く写っており、視差による測定誤差が大きい。

Fig. 9 は計算による水面波形と流速波形の時間発展を縦軸を拡大して描いたものである。図中の点列は分離特性曲線上の値を示している。水面波形はこの点を境いに曲率を変えており、それより前の部分は舌状となっている。下図の流速波形についてはその変化は大きい。分離特性曲線に達するまでは一様に増加しているが、それ以降では減少しており、その値は分離特性曲線上の値に近い。

(2) 摩擦係数  $f$

摩擦係数  $f$  を次式で定義する。

$$\tau_0 = f \rho U^2 \dots \dots \dots (31)$$

ここで、 $\tau_0$  は底面せん断力である。このとき式 (5) より  $f$  は次のように表わされる。

$$f = \frac{c}{R_e}, \quad c = \eta \frac{\nu_t}{\nu} \frac{\tilde{U}}{U} \frac{\varepsilon}{D} \dots \dots \dots (32)$$

ここで  $R_e = U\varepsilon/\nu$  は平均流速  $U$  と、流れと直角方向の代表長さ  $\varepsilon$  で定義したレイノルズ数であり、 $\varepsilon$  として水深  $D$  を用い、 $\nu_t/\nu = 2$  と Table 1 の  $a$  と  $\eta$  を用いると  $c = 6.64$  となる。これは本実験でのレイノルズ数が  $10^8$  のオーダーと比較的小さいため、層流と同じ摩擦係数の関数形が得られたものである。

これを平板上の層流相似解である、Rayleigh 解、Blasius 解<sup>13)</sup>と比較してみる。前者は瞬間的に平板が一定速度  $U$  で動き始める問題であり局所的な時間変化の大きい波先端の現象の1つのモデルと考えられよう。こ

Table 3 Friction factor.

	c	$\epsilon$ (cm)
This study	6.64	$2.06 t^{1/2}$
Rayleigh's solution	4.21	$6.06(vt)^{1/2}$
Blasius's solution	3.78	$9.25(v\epsilon/\bar{U})^{1/2}$

ここで比較のため  $t < 0$  では流体および平板とも一定速度  $U$  で動いており、 $t = 0$  で平板が静止する条件に読みかえた。

また後者は波先端という端部をもつ現象のモデルである。両解とも  $\epsilon$  としては水深と対応させるため  $U/\bar{U} = \alpha$  が 0.813 となる平板からの高さとした。

結果を Table 3 に示す。係数  $c$  は本研究の場合が最も大きくなっており、摩擦係数が大きいことを示している。この内容としては、全動粘性係数が他の 2 つの解に比べて 2 倍になっていることが大きく影響している。また  $\epsilon$  に関しては、Rayleigh 解の約 3 倍、Blasius 解との比較では、 $\xi$  を Fig. 5 に示した実験値より  $t$  に読みかえて、約 2 倍となっている。

(3) 波先端での特異性

式 (23) よりわかるように、波先端での特異性は  $\beta$  によって変わってくる。 $\beta > 1$  の場合には波の先端の軌跡は節点軌跡となり式 (25) で述べたように  $0 < \alpha < 1$  で積分が有界になる。本実験の  $\alpha$  は 0.5 でありこの範囲に入る。 $\alpha$  は波先端付近の水深の  $n$  方向の関数を表わす指数であり、流速分布の相似性より、これは境界層の厚さを表わす指数とも考えることができる。前述の Rayleigh 解や Blasius 解では、境界層厚がおおの時間と距離の 1/2 乗に比例して大きくなっており、本実験でのレイノルズ数が小さいことから実験で得られた  $\alpha$  の値はこれに対応しているものと考えられる。従来仮定されてきた  $\beta = 1$  の場合には先端の軌跡は Dressler が指摘したような包絡線軌跡となり特異性は大きくなる。 $n$  の方向と特性曲線の方向は直交し、波先端での固有値は重根であるので、 $D \propto \delta_0^2$  とすると、

$$D(x, t) \propto |\sigma_0 - \sigma|^{2\alpha} \dots \dots \dots (33)$$

となる。このとき式 (17) の積分が存在するためには  $0 < \alpha < 1/2$  が必要になる。

また、式 (12) の第 1 式は流量に関する方程式であるがこれを水深で割ることにより、平均流速に関する方程式が得られ、このとき底面摩擦項は分母の  $D$  の指数が倍になり、 $U/D^2$  に比例することになる。この項の特性曲線に沿う積分が存在するためには、 $\beta > 1$  のときには、 $0 < \alpha < 1/2$ 、 $\beta = 1$  のときには、 $0 < \alpha < 1/4$  となる。

本実験では、底面せん断力は式 (32) よりわかるとおり  $D$  の -1 乗に比例している。一方 Dressler や Free-

man らは、 $f$  を一定として扱っており、一樣流速分布の流速に対する運動方程式を基礎式としており、その中に含まれる底面摩擦項は  $D$  の -1 乗に比例している。すなわちこの場合の波先端での特異性は式 (33) と同じになり、積分が存在するためには  $0 < \alpha < 1/2$  が必要になる。

従来特性曲線法は常微分方程式である特性方程式を直接数値積分していたために、波の先端部では仮想の水深や流速一定の仮定を設けなければ解けなかった。Sakkas らは数値積分の精度を上げるため予測子、修正子法を用いて、数値積分の台形公式を実現しているが、微分方程式を内部の点より数値積分しているので、先端は直接求められず、序論に述べたように流速一定の仮定を用いている。

本論文では常微分方程式を一度解析的に積分した式 (17)~(20) を特性曲線法の基礎式としているので、その部分積分が可能になり特異性の高い方程式系でも適当な  $\alpha$  を用いれば解が得られることを示した。

6. 結 論

以上得られた結論をまとめると以下のとおりとなる。

- (1) 流速分布を考慮した運動方程式を出発点として、特性方程式を導いた。波先端の軌跡は、 $\beta > 1$  の場合に節点軌跡となり、 $\beta = 1$  の場合の包絡線軌跡とは異なることを示した。
- (2) 特性方程式を積分した式 (17)~(20) を示し、積分が有界となる指数  $\alpha$  の範囲を明らかにした。
- (3) 水理実験を行い、汀線での流速分布形が相似となることを示した。
- (4) 汀線で測定した水理実験を境界条件とし特性曲線法による数値解析を行い、波先端の軌跡、空間波形などを精度よく再現できることを示した。

本研究における実験でも先端が汀線を通過してから 0.1 s 程度は流速の測定ができず、その分布形が真の先端部でどのようなになっているかはわからないが、分布の相似を仮定し、支配方程式を波先端での水深が零、移動速度が水粒子速度と等しいという境界条件のもとにできるだけ忠実に解いて、有界な解が存在することを示したものである。

以上が本研究によって得られた結論の要約であるが、波先端部の流速の測定および整理には多大な労力と時間がかかるためここで発表した測定値は狭い範囲のものとなっており、今後実測データを増やす必要があることはいうまでもない。

おわりに東北大学の岩崎敏夫名誉教授、首藤伸夫教授、沢本正樹助教授、佐藤栄司技官には助言、励まし、助力を頂いた。また鹿島学術振興財団、建設工学研究奨励金

より援助を頂いた。ここに記して感謝の意を表する。

#### 参 考 文 献

- 1) Dressler, R. F. : Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions, J. Res. National Bureau Standard, pp. 217~225, 1952.
- 2) Whitham, G. B. : The effect of hydraulic resistance in the dam-break problem, Proc. Royal Soc. London, Series A, 227, pp. 399~407, 1955.
- 3) Freeman, J. C. and LeMehaute, B. : Wave breakers on a beach and surges on a dry bed, J. Hydraulics Div., ASCE, HY 2, pp. 187~216, 1964.
- 4) Cross, R. H. : Tsunami surges forces, J. Waterways and Harbors Div., ASCE, WW 4, pp. 201~230, 1967.
- 5) 岩崎敏夫・富樫宏由：津波陸上遡上の先端条件，第16回海岸工学講演会講演集，pp. 359~364, 1969.
- 6) Chu, K. K. and Abe, T. : Tsunami run-up and backwash on a dry bed, Tsunamis-Their Science and Engineering, pp. 453~466, 1983.
- 7) Sakkas, J. G. and Strelkoff, T. : Dam-break flood in a prismatic dry channel, J. Hydraulics Div., ASCE, HY 12, pp. 2195~2216, 1972.
- 8) 松富英夫：陸上遡上津波の先端条件と先端部の抵抗係数，第28回海岸工学講演会論文集，pp. 74~78, 1981.
- 9) Courant, R. and Friedrichs, K. O. : Supersonic flows and shock waves, Pure and Applied Math. Vol. 1, 1948.
- 10) Forsyth, A. R. : A treatise on differential equations, 585 p., 1914.
- 11) 加藤聡也・真野 明：陸上を遡上する波先端付近の流速測定，第33回海岸工学講演会論文集，pp. 76~79, 1986.
- 12) イスマイル アイディン・首藤伸夫：波と流れによる砂連上の流況，第32回海岸工学講演会論文集，pp. 278~282, 1985.
- 13) Schlichting, H. : Boundary-layer theory, 747 p., 1978.

(1987. 3. 20・受付)