

脈動流中の粒子の沈降特性に関する研究

STUDY ON THE FALL VELOCITY OF PARTICLES IN OSCILLATING FLUIDS

関根 正人*・吉川 秀夫**

By Masato SEKINE and Hideo KIKKAWA

The simulation of particle settlement in oscillating fluids, which motion is followed by the equation of motion derived by Tchen, is performed, and the results of simulation are verified by the experimental data obtained by Ho. It is revealed that the factors governing retardation of fall velocity are particle Reynolds number, Strouhal number and the ratio of the amplitude of flow oscillation to a particle diameter. Furthermore, when the suspended load in the channel flow is analysed by the simulation model, the criterion of the reasonable calculating time step is proposed based on the results of this study.

Keywords: retardation of fall velocity, drag coefficient, phase lag, oscillation, amplitude

1. 序 論

脈動流中を沈降する粒子の最終沈降速度が静水中の値より低下することは、従来より主に応用化学の分野を中心に、実験的・理論的研究^{1)~7)}を通じて明らかにされてきた。このような沈降速度の低下は、土砂の浮遊運動を考えるうえでも重要であり、土砂の濃度拡散係数の評価にあたっては特に考慮すべき問題となる。しかし、これまで、拡散方程式を用いて浮流砂濃度を説明しようとする場合には、濃度拡散係数と流体の運動量拡散係数との関係について論じるばかりで沈降速度の変化についてはほとんど考慮されていないというのが現状である。そこで、たとえば、上記の濃度拡散係数と運動量拡散係数との比 β についてより厳密に議論しようとする場合には、沈降速度の低下の仕方を明らかにする必要があり、かつ、これを考慮した形で β を評価すべきであると考えられる。

また、流体の乱れの影響を顕著に受ける、土砂の浮流過程や掃流砂から浮流砂への遷移過程について、これをモデル化して考えたり、さらには数値模擬しようとする

場合には、こうした運動を解析する際の数値計算上の時間ステップをいかに決定すべきかが問題となる。これに関して、これまでは、流体の乱れの時間スケールを考慮しつつ、経験的に定めてきたにすぎない。しかし、流体の振動に対する粒子の応答について検討することにより、粒子が追従できる最大周波数を明らかにすれば、粒子の運動を解析する際の最小時間を決めることは可能であると考える。

以上のような趣旨から、本研究では、流体の速度変動を単純な規則波 (sine 波) を用いてモデル化し、これにより作られる脈動流中を沈降する粒子の運動について、数値計算を通じて解析する。さらに、その結果を既存の実験結果と比較することにより、数値計算の妥当性を検証したうえで、沈降速度の変化についての性質を明らかにし、あわせて、周囲流体の流速変動に対する粒子の応答性・追従性についても検討する。

2. 鉛直振動流中の粒子の沈降特性²⁾

(1) 基礎方程式および計算の概要

乱流中を移動する粒子に関する運動方程式は、Tchen⁸⁾らによってすでに検討されており、本研究でもそれに倣うこととして、式(1)を適用する。ただし、ここでは鉛直方向への粒子の一次元の運動を解析することが目的

* 正会員 工修 早稲田大学助手 理工学部土木工学科
(〒160 新宿区大久保3-4-1)

** 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科
(同上)

表-1 計算条件

CASE	粒子 (σ_s)	粒 径 d (cm)	沈降速度 W_0 (cm/s)	Re	記号	kv
1	砂 (2.65)	0.020	2.638	5.28	○	0.5
					○	1.0
					○	2.0
					○	3.0
					○	4.0
2	砂 (2.65)	0.065	11.886	77.8	○	0.5
					○	1.0
					○	2.0
					○	3.0
					○	4.0
3	石炭粉 (1.40)	0.104	7.410	77.3	○	0.5
					○	1.0
					○	2.0
					○	3.0
					○	4.0

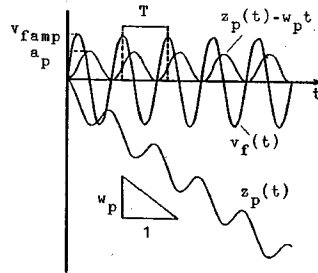


図-1 脈動流中の粒子の運動軌跡の一例

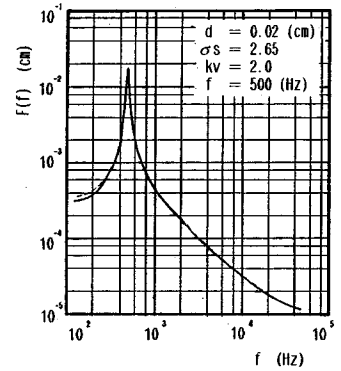


図-2 粒子の移動速度の周波数スペクトル

であるため、基礎方程式としては z 方向 (下向きを正) への式のみを用いる²⁾。

$$\begin{aligned}
 dv_p/dt &= K_D \cdot C_D \cdot |v_f - v_p| \cdot (v_f - v_p) \\
 &+ K_P \cdot dv_f/dt + K_G \cdot g + B(t) \\
 K_D &= 3/4 d (\sigma_s + C_M), \quad K_P = 3/2(\sigma_s + C_M), \\
 K_G &= (\sigma_s - 1)/(\sigma_s + C_M) \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

$$C_D = 24/R_e + 3/\sqrt{R_e} + 0.34, \quad R_e = |v_f - v_p| d / \nu \dots \dots \dots (2)$$

$$\begin{aligned}
 B(t) &= K_B \int_0^t (dv_f/d\tau - dv_p/d\tau) / \sqrt{t - \tau} d\tau \\
 K_B &= 9/|d (\sigma_s + C_M)| \sqrt{\nu/\pi} \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

ここに、添字の p, f は粒子および流体に関する値を表わし、 d は粒径、 ρ は流体の密度、 σ_s は粒子の比重、 C_M は仮想質量係数 (=0.5)、 g は重力加速度、 ν は流体の動粘性係数である。また、 K_D, K_P, K_G は式中の各項の係数を、 C_D は抗力係数をそれぞれ表わし、特に C_D については、各瞬間の粒子レイノルズ数 R_e との関係が式(2)のように表わされるとしている(ただし、式(2)は定常状態において確かめられている関係であるため、これを特に高周波数の乱れに対する粒子の応答を調べる場合に適用しようとする、現象の非定常性が強まる結果として、式(2)が適用できなくなるおそれがあり、このような場合には多少問題があると考えられる)。一方、式中の $B(t)$ は Basset 項であり、これは流速分布の非定常性が抗力に及ぼす影響を表わすものとして式

(3) で与えられる。本研究では、検討の結果 Basset 項がほとんど効かないこと、およびこの項を考慮すると計算時間がきわめて長くなること、などから原則としてこの項を無視しているが、その影響については次章以降で詳述する。

本研究では、水流中に生じている乱れに対する浮流土砂の挙動を解析する第一歩として、鉛直方向の流体の乱れ流速 v_f を、単純な sine 波形を用いて式(4)のようにモデル化することにし、これに対する粒子の応答性(沈降特性)について検討する。

$$v_f(t) = v_{f,amp} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \dots \dots \dots (4)$$

ここに $v_{f,amp}$ は流体の速度振幅、 f は振動周波数である。具体的な計算は式(2)~(4)を考慮して、式(1)を差分化し、これを Runge-Kutta 法で解くことにより、流体の振動に対する粒子の応答(すなわち、その運動軌跡や移動速度特性)についての検討を加えた。なお、本研究で検討するのは、主に定常状態に達した後の粒子の沈降特性量であるため、粒子の運動が定常状態に達したか否かの判断をする必要があるが、ここでは、ある一周期間の沈降速度・振動振幅・振動周期・位相差などの値が、その前後の一周期間の値と比較して0.1%の誤差範囲に入っていること、という条件によってこれを判断することとした。

計算は、主に2種類の粒径の砂粒子と、比重の異なる石炭粒子を対象として行い、振動の程度 $k_v (= v_{f,rms}/w_0, v_{f,rms} = v_{f,amp}/\sqrt{2}$: 流体速度の標準偏差) と周波数とを変化させて計算を行い、結果を比較することにした。計算条件は表-1に示すとおりである(周波数 f については0.01~1000 [Hz] の範囲で変化させている)。

(2) 粒子の沈降特性

a) 粒子の運動軌跡および移動速度

式(1)の数値解として得られた粒子の運動軌跡の一例を図-1に示す。ここに、図中の w_p は粒子の最終沈

注1) 本章で対象とする数値模擬については、その一部をすでに報告済み⁹⁾であり、また、Molerusら⁷⁾により同様の数値計算がなされているが、これらにおいては、現象の広範囲にわたる検討が十分でなかったため、本論ではさらに詳細な検討を行うこととした。

注2) 粒子背後に生じる渦の影響により、必ずしも粒子は鉛直方向にのみ運動するとは限らないが、本論ではこの影響を無視することにした。

降速度、 a_p は粒子の振動振幅である。図-1のような計算結果より、定常状態における粒子の運動軌跡は、流体の振動と同じ周期で振動しながら、平均的には沈降速度 w_p で降下していることがわかる。そこで、粒子の移動速度は、Hwang⁹⁾が指摘しているように次式の形で表現することができる。

$$v_p(t) = w_p + v_{p,amp} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varepsilon) + (\text{higher harmonic terms}) \dots \dots (5)$$

ここに、 $v_{p,amp}$ は粒子の速度振幅、 ε は流体と粒子の速度についての位相差 (単位: rad) である。なお、式中の第3項は高次の項を表わすが、この項が v_p 全体に占める影響を定量的に評価するため、 $(v_p - w_p)$ についての周波数スペクトルを取ったところ、図-2に一例を示すような結果となった。図-2中の実線が $(v_p - w_p)$ のスペクトルを、破線が $v_{p,amp}$ と同じ速度振幅をもち、かつ同じ周波数 f をもつ sine 波のスペクトルである。スペクトル解析の結果より、高周波数の場合ほど高次の項の影響が顕著となるものの、500 [Hz] の場合でも実線と破線とがほぼ一致するとみなしてさしつかえないことがわかり、このことから本研究の範囲内では高次の項が実用上は無視できるものと考えられる。

b) 最終沈降速度 w_p

振動流中を沈降する粒子の最終沈降速度 w_p が静水中での値 w_0 より小さくなることは、従来¹⁾⁻⁶⁾より明らかにされてきたが、その低下の程度については十分な結論が得られていない。そこで、本論では、特に水工学上重要と考えられる粒子を対象として、 w_p/w_0 の変化を支配する要因について検討する。

数値計算の結果として得られた w_p/w_0 の変化を表わしたのが図-3である。図-3 (a) では横軸に周波数 f と粒径 d との積をとり、これと w_p/w_0 との関係を調べているが、これらの図より、粒子の種類や振動の程度によってプロットの示す値は異なるものの、ほぼ次のような傾向を示すことがわかった^{註3)}。

① 低周波数域 ($f \cdot d \leq 0.1$ [cm/s]) では沈降速度の低下は生じないが、さらに周波数が高くなると w_p/w_0 の低下の程度は大きくなり、 $f \cdot d = 6 \sim 10$ [cm/s] 程度の周波数で w_p/w_0 は最小値をとる。さらに周波数が高くなると沈降速度の低下は抑えられ、静水中の値に漸近する傾向を示す。

② w_p/w_0 の低下の程度は、振動の程度を表わす $k_v (= v_{f,rms}/w_0)$ の値が大きいかほど大きくなる。

注3) 本論では k_v (すなわち速度振幅) を一定として f を変化させることによって現象の検討を試みたが、この場合には f と流体の振動振幅 $a_f (= v_{f,amp}/2\pi f)$ とが反比例の関係にあることに注意を要する。なお、Molerus^ら⁷⁾ は、 a_f を一定として f を変化させた場合についての検討を加えていることを付記する。

以上の結果をもとに、図-4では、粒子の沈降速度の低下の仕方を統一的に説明するために、 w_p/w_0 の変化に関係すると予想される無次元量をパラメーターとして、計算結果を整理している。図-4 (b) は、 w_p/w_0 の最大低下量について検討したものであり、図の横軸は

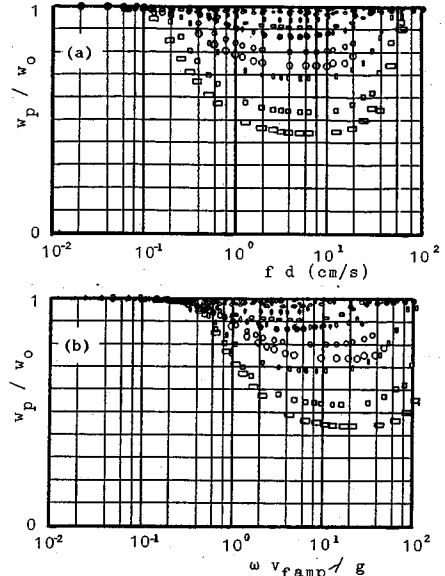


図-3 粒子の沈降速度の低下 (I)

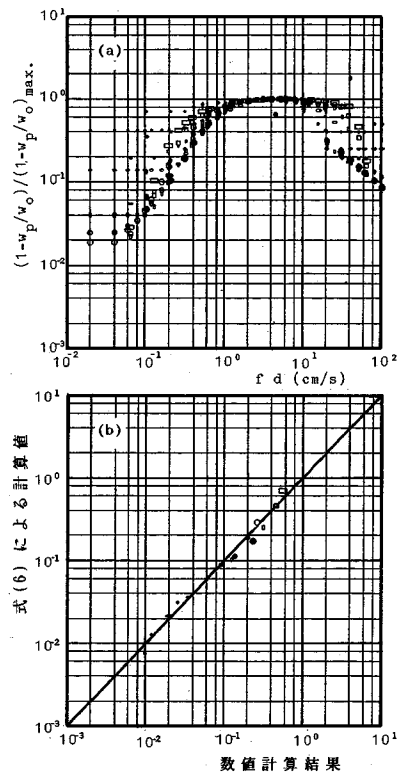


図-4 粒子の沈降速度の低下 (II)

計算結果を、縦軸は次の式(6)から算出した結果をそれぞれ示している。

$$(1 - w_p/w_0)_{\max} = K \cdot R_{e_0}^{1/3} \cdot (\sigma_s - 1) \cdot k_v^{3/2} \\ = K' \cdot R_{e_0}^{1/3} \cdot (\sigma_s - 1) \cdot S_i^{3/2} \cdot (a_f/d)^{3/2} \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 K, K' は実験定数 ($K=0.01253, K'=K(\sqrt{2}\pi)^{3/2}$), R_{e_0} は粒子レイノルズ数 ($=w_0 \cdot d/\nu$), S_i はストローハル数 ($=f \cdot d/w_0$), a_f/d は流体の振動振幅と粒径の比である。この図より、本計算の範囲内では、沈降速度の最大低下量が式(6)によりおおむね説明できることがわかる。次に、図-4(a)では、沈降速度の低下量を、上記の最大値で基準化することにより整理しているが、これより次のことがわかる。すなわち、図の縦軸に示した無次元量が、 $w_p/w_0=1$ に対応する $f \cdot d$ に対しては $(1 - w_p/w_0)_{\max}$ に応じてのみ異なる一定の値をとること、 w_p/w_0 が低下する周波数の範囲に限れば、 $f \cdot d$ の変化につれてプロットが同一の曲線に漸近する傾向を示すこと、などである。このことから、沈降速度比 w_p/w_0 が、主にストローハル数 $S_i \cdot$ 粒子レイノルズ数 R_{e_0} および流体の振動振幅と粒径との比 a_f/d 、さらには粒子の相対比重・周波数と粒径との積 $f \cdot d$ によって支配されていることが明らかとなった。

なお、図-4(a)の横軸には図-3(b)と同じ $f \cdot d$ を取っており、これが次元をもつ量であることは問題であるが、現段階では適切な無次元量をみつけるには至っていない。

また、Baird¹⁾によれば、振動流中を沈降する粒子の背後に形成される wake の形状が、流体の振動周波数(すなわちストローハル数)に相当する周期で変化している、との可視化実験の報告があり、同時に、流体の振動に伴い粒子に付加的に作用する抗力が、この wake の体積と周波数との積にほぼ等しいとの指摘もなされている。このことから、本論で明らかになった沈降速度の低下傾向は、この wake 形状の変化とそれに伴う抗力の変化とに密接に関係するものと考えられる。すなわち、図-3よりわかるように、周波数の増大に伴う沈降速度の変化はある周波数でピークをとるような傾向となるが、このことは、周波数の増大につれ、1周期分の wake を形成させるのに消費できる時間が短くなり、wake の体積が十分大きくなれないために、上記の周波数と wake の体積との積、言い換えれば、付加的な抗力が極値をもつような変化をすることに対応しているものと考えられる。ただし、周波数が非常に高くなると、wake 自体が形成されなくなるため、上記の抗力が作用しなくなり、沈降速度は静水中の値と変わらなくなるものと考えられ、このことは、高周波数領域における本計算の結果とも一致している。なお、このことと関連して、図-3(b)では、横軸に流体振動の最大加速度 $\omega \cdot v_{r \text{ amp}}$ ($\omega=2\pi f$) と重

力加速度との比をとり、これにより加速度の面からみた場合の本計算の範囲を示した。ここで、定常状態にある開水路流れにおいては、重力加速度を越える大きさの加速度が生じることは考えられないので、図の横軸の1(すなわち1Gに相当)以上の値というのは、物理学的には興味ある領域であっても、本研究で目的とする土砂水文学上はあまり意味があるとはいえない。

一方、Basset 項が計算結果に及ぼす影響について検討したところ、表-2に示すような結果が得られた。これより、 w_p/w_0 が最小となる $f=100 \text{ Hz}$ の辺りで Basset 項の影響が相対的に大きくなるものの、計算精度としてはほとんど問題にならない程度であり、計算に要する時間の問題を考慮すると、この項を無視しても差し支えないものと考えられる。

c) 抗力係数

前節では、振動流中での沈降速度の低下について、その性質を明らかにしたが、流体の振動に伴い粒子に付加的に作用する力の効果まで抗力の項に受けもたせるとすれば、このことは抗力係数 C_D と最終沈降速度を用いた粒子レイノルズ数との関係が静水の場合とは異なること

表-2 Basset 項の影響の検討 (CASE 1)

kv	f	Basset項 無視		Basset項 考慮	
		Wp/Wo	ap/af	Wp/Wo	ap/af
1.0	1	0.995	1.00	0.995	1.00
	10	0.994	0.976	0.994	0.971
	100	0.968	0.564	0.972	0.587
	500	0.966	0.488	0.967	0.496
2.0	1	0.995	1.00	0.995	1.00
	10	0.988	0.973	0.990	0.968
	100	0.884	0.558	0.923	0.578
	500	0.880	0.483	0.908	0.493
4.0	1	0.995	1.00	0.994	0.999
	10	0.960	0.970	0.965	0.966
	100	0.752	0.567	0.802	0.578
	500	0.737	0.481	0.790	0.492

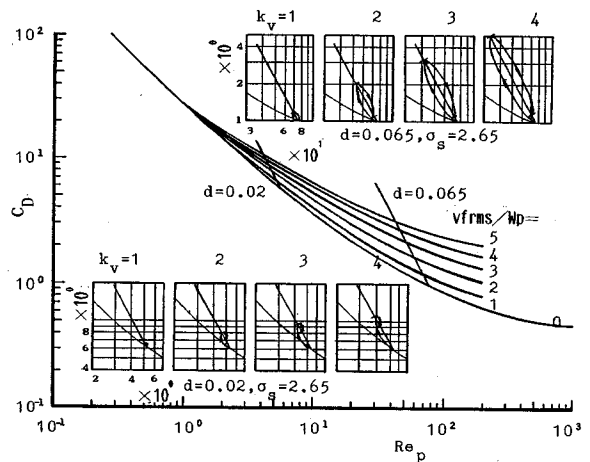


図-5 抗力係数 C_D の変化

を意味する。図-5には、数値計算の結果として得られた w_p を式 (7) に代入することにより求めた C_D と粒子レイノルズ数 $R_{ep}(=w_p \cdot d/\nu)$ との関係を示した(ただし、図中には砂粒子の場合の結果のみを示しており、比重が異なる粒子の場合には同一の傾向を示すものの、その値は一致しないため、ここでは省略している)。

$$(\rho/2)C_D(\pi d^2/4) \cdot w_p^2 = (\pi d^3/6) \cdot \rho \cdot (\sigma_s - 1) \cdot g \dots \dots (7)$$

図中の曲線は、 w_p/w_0 が最小となる周波数における R_{ep} と C_D との関係を表わしており、この曲線上の値は任意の粒子・任意の速度振幅に対して取り得る w_p の最小値・ C_D の最大値を表わしている。ここに、 $v_{f,rms}/w_0=0$ の曲線は、粒子が静水中を沈降する場合のレイノルズ数 $R_{e0}(=w_0 d/\nu)$ と C_D との関係に相当する。一方、式 (7) より、同一流体中では C_D と R_{ep} とは -2 乗の関係にあることから、周波数の変化に伴う w_p および C_D の変化は、図中に示したような -2 乗の傾きをもつ直線上で生じ、かつ、その変化パターンは、一例として図中に矢印線で示したようになり、静水中の関係を表わす曲線と、対応する $v_{f,rms}$ の値について得られた曲線とはさまれた区間内で変化することがわかる。ただし、この図-5には、パラメーターの1つである周波数の影響が含まれていないため、 w_p の最小値は求めることができるが、この図だけから種々の f に対する w_p を求めることはできない。

以上のことより、振動流中を沈降する粒子について、その流体抵抗の程度を表わす抗力係数と粒子レイノルズ数との関係が静水中のものとは異なること、流体の振動の程度 k_v (すなわち $v_{f,rms}$) が増大するにつれて C_D の変化する範囲が広がること、および、同一の k_v に対しても周波数の増加に伴い R_{e0} と C_D とがループを描いて変化すること(図-5の右上図、左下図参照)、などが明らかになった。

なお、 R_{ep} が小さくなり、ストークス則に従う領域に入ると、後述するように、 w_p の低下が生じなくなるため、図中の曲線群は静水時の曲線に収れんしていく。

d) 粒子の振動振幅 a_p

粒子の運動軌跡については、式 (5) で示した移動速度の関係からも明らかなように、流体の振動と同じ周期の sine 波形を描きながら、平均的には最終沈降速度 w_0 で沈降していくことがわかる。したがって、流体の振動に対する粒子の応答性を検討するためには、c) で示した w_p の変化のほかに、粒子の振動振幅 a_p についても検討する必要がある。

図-6では、粒子の応答性を調べる1つの方法として、粒子の振動振幅 a_p を流体の振幅 a_f との関係で評価することにし、数値計算の結果として得られた a_p/a_f の変化について検討している。図中の横軸は、図-3(a)

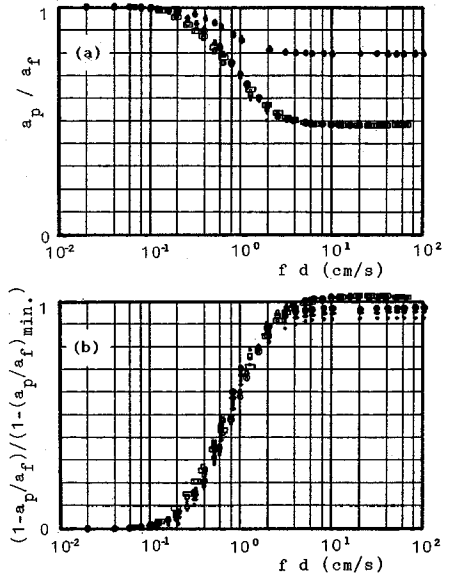


図-6 粒子と流体の振動振幅の比 a_p/a_f

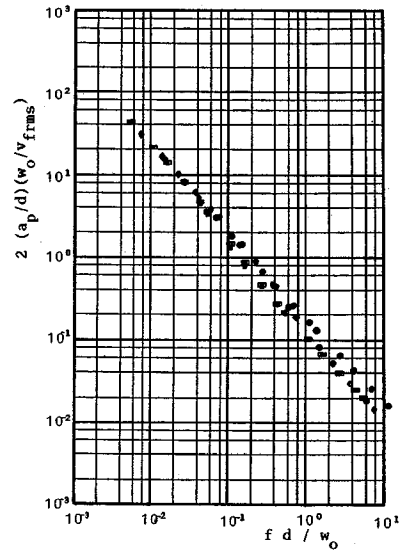


図-7 a_p/d と周波数 f との関係

と同様に $f \cdot d$ を取っている。この図より、 a_p/a_f の変化に関する傾向として、次のことが明らかになった。

- ① 振動周波数 f が高くなるほど、 a_p/a_f の値は小さくなる。
- ② a_p/a_f の変化は、粒子により、周波数により変化するが、流体の振動の程度を表わす k_v にはよらない。
- ③ a_p/a_f を、周波数と粒径との積 $f \cdot d$ との関係で整理すると、図-6(a)のように粒子の比重によって異なるものの、比重の等しい粒子に限ればほぼ1本の曲線で表わされる。したがって、比重の違いを考慮することにより、図-6(b)のように整理することができる。

ここに、図の縦軸中の $(a_p/a_f)_{\min}$ は次式により求めた値である。

$$(a_p/a_f)_{\min} = 0.5672 \cdot (\sigma_s - 1)^{-1/3} \dots \dots \dots (8)$$

次に、粒子の振動振幅 a_p 自体の大きさを調べるため、これを粒径 d との関係で整理すると図-7 のようになる。なお、図中の値は、図-6 に示した計算結果を a_p/d という量について整理したものである。この図より、 a_p/d をストローハル数 $S_t (= f \cdot d / w_0)$ と流体速度の無次元強度 $k_v (= v_{f, \text{rms}} / w_0)$ との関係で整理すると、ほぼ1本の曲線で表わされることがわかる。このことは、 a_p/d が S_t と k_v との関数として表わされることを意味しているものと考えられる。一方、この図は次のように考えることにより、粒子運動に有効な乱れの持続時間(最小時間単位 δ_t) の概略値を知ることができることを表わしている。すなわち、任意の周波数で変動する流体の乱れが粒子の運動に有効であるか否かは、それに対応する周波数の単純な振動に対する粒子の応答性を調べ、その結果として得られる a_p と粒径 d との比 $\xi^* (= a_p/d)$ がある値(たとえば、 $\xi_{*c} = 0.2$) 以下の場合には粒子は流体の動きに追従できず、結果的にはそのような周波数の乱れは粒子の運動には有効でないと判断することができる、との考え方によるものである。したがって、粒子の運動に有効な乱れの周波数の上限値 f_{cr} を知れば、粒子の運動を考えるうえで問題となる最小時間単位 δ_t としては f_{cr} の逆数に相当する時間(または、その半周期分)をとればよいことになる(なお、本研究で主に対象としたのは、定常状態に達した後の粒子の運動であるため、同じ周波数をもつ瞬間的で、しかもランダムな乱れに図-7をそのまま適用することに問題がないわけではないが、上記のように考えることにより、その概略値を推定することは可能であると考ええる。また、その際に ξ_{*c} の値をどう取るかについては、今後検討すべきこととして、ここで論じることは控えることとした)。ここで、以上のような考え方にに基づき、次のような場合について δ_t を試算した結果の一例を示しておく。

(例) $d = 0.02$ (cm), $\sigma_s = 2.65$, $w_0 = 2.64$ (cm/s), $k_v = 1.0$ の場合、 $\xi_{*c} = 0.2$ とすれば、図-7より、 $f_{cr} = 80 \sim 100$ (Hz) と求まり、この逆数に相当する周期の半分を単位パルスと考えることにより、最小時間単位としては0.02秒程度を取ればよいことになる。

なお、このような考え方により決まる f_{cr} および δ_t が k_v および S_t により変化するということより、従来、流体の寿命時間だけを考慮していたときには入ってこなかった粒子に関する特性量が、 f_{cr} あるいは δ_t の評価の際に関係してくることに注目する必要がある。

e) 位相差 ϵ

流体と粒子の速度に関する位相差 ϵ は、式(4)と

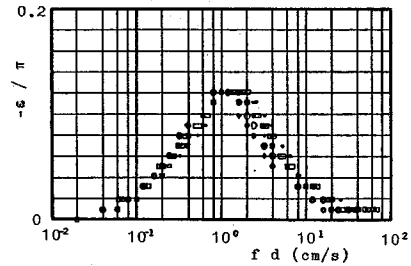


図-8 位相差 ϵ

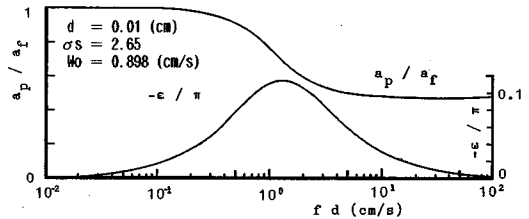


図-9 抗力項がストークス則に従う場合の w_p/w_0 , ϵ

の関係で式(5)のように定義されるが、これについて計算結果を整理したのが図-8である。 ϵ については、流体速度の無次元強度 k_v によらず粒子の性質と振動周波数のみによって変化し、その周波数の増大に伴う変化傾向は、b) で示した w_p/w_0 の変化とほぼ同様に極値をもつ曲線となることわかる(なお、図中の横軸には $f \cdot d$ をとっており、このように整理することにより同一の曲線で表わされることがわかる)。さらに、位相差 ϵ は、 w_p/w_0 が最小となる $f \cdot d$ の値(=6~10 [cm/s]) よりわずかに小さな $f \cdot d = 1 \sim 2$ [cm/s] において、最も大きな遅れを示すことが明らかになった。また、a) でも記したように、高周波数域では、流体の振動に伴い発生する wake の影響がなくなり、このような流体の振動が粒子の運動には有効ではなくなるため、この領域での ϵ は0または $-\pi$ になるものと推定されるが、本計算でも、このことが確かめられた。

(3) 運動方程式中の抗力項がストークス則に従う場合の応答

前節では、式(1)中の抗力の項が相対速度の二乗に比例するとしてニュートン則に従うとし、抗力係数を式(2)のようにおくことにより、ストークス則に従う領域も含む形で粒子の運動を解析したが、特にストークス則が成り立つ領域のみに限って考えれば、式(1)に相当する粒子の運動方程式を解析的に解くことが可能である(ただし、Basset項は無視する)。そこで、本節では、ストークス領域における粒子の応答性について検討する。まず、この場合の粒子に関する運動方程式は次の式(9)のように表わされる。

$$dv_p/dt = K_p' \cdot (v_f - v_p) + K_p \cdot dv_f/dt - K_c \cdot g$$

$$K_D' = 18 \nu / (d^2(\sigma_s + C_M)) \dots\dots\dots (9)$$

ここに、式(9)中の K_D, K_C は式(1)で用いた係数である。次に、この式(9)に式(4)を代入した後、これを解くと、次の式(10)~(13)のような結果が得られる。

$$v_p(t) = v_{pamp} \cdot \sin(\omega t + \epsilon) + K_D' \omega (1 - K_D) / (K_D'^2 + \omega^2) \times v_{pamp} \cdot \exp(-K_D' t) - K_C \cdot g / K_D' \cdot [1 - \exp(-K_D' t)] \dots\dots\dots (10)$$

$$v_{pamp} / v_{famp} = \frac{\sqrt{(K_D'^2 + K_D \omega^2)^2 + (1 - K_D)^2 K_D'^2 \omega^2}}{K_D'^2 + \omega^2} \dots\dots\dots (11)$$

$$\epsilon = \arctan \{ (K_D - 1) K_D' \omega / (K_D'^2 + K_D \omega^2) \} \dots\dots\dots (12)$$

$$w_0 = -K_C \cdot g / K_D' = w_0 \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $\omega = 2\pi f$ であり、また、式(11)、(13)は、式(10)において $t \rightarrow \infty$ とした場合の値である(なお、式(13)中の w_0 はストークス則に従うとした場合の最終沈降速度である)。この式(13)より、抗力の項がストークス則に従う場合には、沈降速度の低下が生じないことがわかり、このことから逆に、Houghton³⁾が指摘しているように、沈降速度の低下の原因が、抗力の項が流体と粒子の相対速度差の二乗に比例すること、および、一振動周期中で抗力係数が変化すること、にあることがわかる。図-9には、式(11)、(12)により求めた $a_p/a_f (= v_{pamp}/v_{famp})$ および ϵ と周波数 f との関係を示しておく(ただし、ストークス則に従う場合の最大位相差は、 $f_{cr} = 1/(2\pi d^2) \cdot \sqrt{216 \nu^2 / (\sigma_s + C_M)}$ (14) なる周波数のときに生じる)。

なお、高周波数になると、粒子背後に渦が生じなくなり、抵抗が粘性のみに影響されるようになるため、この領域では近似的にストークス則に従うとした扱いが可能であると考えられる。

(4) 既存の研究との比較

振動流中を沈降する粒子の最終沈降速度に関する研究は、理論的にも実験的にも数多くなされているが、ここでは、そのうち、Hwang⁶⁾ および Houghton²⁾⁻⁵⁾ による理論的研究と Ho による実験的研究⁹⁾ について触れ、これらの理論との比較を試みるとともに、実測結果との比較を通じて本計算の妥当性を検証する。

Hwang は、次のような仮定の下に式(1)を数値解法することにより沈降速度の低下についての検討を加えた。すなわち、①式(1)中の Basset 項を無視する、②粒子の移動速度は式(5)に従い、かつ、高次の項が無視できる、③流体と粒子の速度振幅の比 v_{pamp}/v_{famp} は周波数 f によらず一定である ($v_{pamp}/v_{famp} = (1 + C_M)/(\sigma_s + C_M)$)、と仮定し、式(1)に式(4)、(5)を代入した後、これを一周期間で時間平均すると、次の式(15)が導かれる。そこで、この式(15)を数値積分

により解けば、任意の f に対して式中の w_p/w_0 を求めることが可能であるとしている(抗力係数については、本計算と同様に粒子レイノルズ数との関係で与えている)。

$$\int_0^T (C_D/C_{D0}) \{ w_p/w_0 - (v_{famp}/w_0) \sin(\omega t) \} \times \{ w_p/w_0 - (v_{famp}/w_0) \sin(\omega t) \} dt = 1$$

$$\alpha = \sqrt{1 - 2(v_{pamp}/v_{famp}) \cos \epsilon + (v_{pamp}/v_{famp})^2} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 C_{D0} は静水中における抗力係数である。このようにして求められた w_p/w_0 と著者らによる計算結果を比較したのが図-10であり、合わせて Ho による実測結果との比較も行っている。まず、図-10(a)では、Ho が行った実験の条件に対して、Hwang の方法により算出した結果を破線で、さらに本計算により得られた結果を実線でそれぞれ示している。ただし、本計算の場合には原則として Ho の実験における周波数 f を用いて計算しているが、CASE-A に限って f を変化させて計算し、その影響について調べている。この図より、次のことがわかる。すなわち、 v_{famp}/w_0 が小さい場合には、 w_p/w_0 は周波数 f の影響をあまり受けないこと、および、ここで比較に用いた Ho の実験の場合の周波数が比較的 low、かつ、その範囲が限られていることなどから、Hwang による計算結果は、Ho による結果を比較的良好

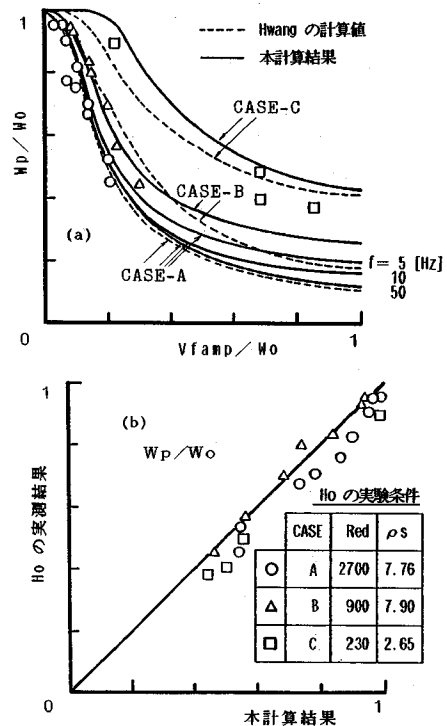


図-10 Hoの実測結果およびHwangの理論との比較

説明することができる。しかし、Hwang の計算においては周波数の変化に伴う $v_p \text{ amp} / v_f \text{ amp}$ の変化を考慮することができないため、d) でも記したように f の変化に伴う a_p / a_f の変化が顕著な領域では Hwang の方法を適用することに問題が生じてくるものと考えられる。一方、本計算による結果と Ho の実測とを比較すると、図—10 (a), (b) のようになり、両者はよい対応関係にあることがわかり、このことから本計算の妥当性が確かめられた。なお、既存の研究においては、粒子の振動振幅について検討した例はほとんどみられないため、これについて検証することはできないが、比重が特に大きな粒子 ($\sigma_s = 7.90$) に対してもほぼ同様の扱いができることは確かめている。

一方、Houghton は、次の仮定の下に、限定された場合について、式 (1) を解析的に解くことにより、沈降速度の低下について検討している (本節では、Houghton による Rayleigh-Ritz 法を用いた近似解について触れ、これとの比較を試みる)。すなわち、①抗力係数 C_D は、粒子が静水中を沈降する際の最終値 C_{D0} に等しいとして、 C_D の変化についてはこれを無視する、②粒子と流体との相対速度差が運動の途中でその符号を変えることはない (式 (1) の場合には、時間 t によらず $v_r - v_p < 0$)、③式 (1) の近似解を Rayleigh-Ritz 法により求める際に、その級数の高次の項を無視する、等の仮定に基づき、式 (1) を解いている。その結果、次の式 (16) ~ (20) が導かれる。

$$v_p(t) = b_0 \cdot w_0 + v_p \text{ amp} \cdot \sin(\omega \cdot t + \epsilon) \dots\dots\dots (16)$$

$$b_0 = w_p / w_0 = \{(1/2) - (1/2 \phi^2) + (1/2 \phi^2) \times \sqrt{(1 - \phi^2)^2 - 4 \phi^2(\phi^2/8 - 1)}\}^{1/2} \dots\dots (17)$$

$$v_p \text{ amp} = \sqrt{(v_f \text{ amp} - |C_1| w_0)^2 + (|b_1| w_0)^2} \dots\dots\dots (18)$$

$$\epsilon = \arctan \left\{ -|b_1| w_0 / (v_f \text{ amp} - |C_1| w_0) \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\phi = 2 w_0 K_D C_{D0} / \omega, \quad \psi = 2(1 - K_p) v_f \text{ amp} / w_0$$

$$b_1 = -b_0 \phi \psi / \{2(1 + b_0^2 \phi^2)\} \dots\dots\dots (20)$$

$$C_1 = -\psi / \{2(1 + b_0^2 \phi^2)\}$$

ここに、式中の K_D, K_p は、式 (1) に示した係数である。これらの式により表わされる Houghton による近似解と本計算の結果とを比較した一例が図—11 であり、実線

が著者らによる結果を、破線が Houghton による解を表わしている。この図より、Houghton による解は本計算による結果と同様の傾向を示すものの、値としては必ずしも一致しないことがわかる。これは、式 (15) ~ (19) においては、振動流中の粒子の沈降を考えるうえで重要と考えられる式中の抗力係数の変化が、無視されているため、抗力係数を静水中の小さめの値としている結果として、粒子速度が小さめに評価されているものと考えられる。なお、Houghton の理論の場合、仮定の②でも記したように $v_r - v_p < 0$ なる関係を満たさなければならないため、流体の速度振幅 $v_f \text{ amp}$ が相対的に大きい場合について解析することはできないという問題もある。

以上により、既存の理論における問題点が明らかになり、あわせて、Ho による実験結果との比較の結果から、本計算の妥当性を検証することができたと考える。

(5) 流体速度にランダム性をもたせた場合の応答

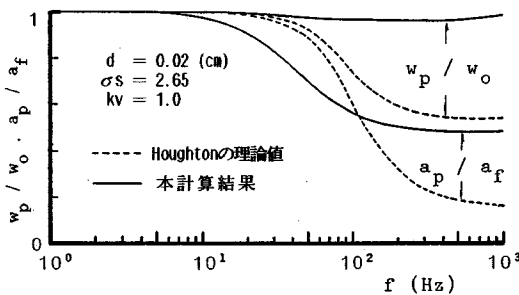
前節までは、入力する流体の速度として、単純な sine 波を用いてモデル化した場合の粒子の応答性について考察してきたが、本節では、実現象において生じている乱れに少しでも近づけるために、式 (4) 中の振動周波数 f あるいは速度振幅 $v_f \text{ amp}$ を一周期ごとに変化させ、これらにランダム性をもたせた場合について、その影響を検討する。

まず、計算の際の周波数あるいは速度振幅の決め方については次のように考えた。すなわち、一周期ごとの f あるいは $v_f \text{ amp}$ の決め方としては、その生起確率が平均値 $\bar{f}, \overline{v_f \text{ amp}}$ のまわりに正規分布すると仮定し、一周期ごとに発生させた正規乱数を処理することにより決定している。また、その際の変動係数 $\gamma_f, \gamma_{v_f \text{ amp}} (= \sigma_f / \bar{f}, \sigma_{v_f \text{ amp}} / \overline{v_f \text{ amp}}, \sigma_f, \sigma_{v_f \text{ amp}}$: 標準偏差) については、 f および $v_f \text{ amp}$ が負の値を取ることがないように留意しつつ変化させることにし、その計算結果を f あるいは $v_f \text{ amp}$ が一定 ($\gamma_f = \gamma_{v_f \text{ amp}} = 0$) の場合と比較することにより、これらをランダムにしたことによる (すなわち、加速度が変化することによる) 影響を明らかにする。なお、計算に用いる基礎方程式および計算方法は (1) に記したものと同一である。

計算の結果の一例を表—3 および表—4 にそれぞれ示す。これより、次のことが明らかになった。

① $w_p / w_0, a_p, a_p / a_f$ の平均値は、周波数を一定とした計算結果とほぼ一致する。

② a_p および a_p / a_f の変動係数については、 a_p に関する限り周波数の変動係数 γ_f とほぼ等しい値となるが、これは流体の振動振幅 a_f が周波数 f によって変化するためであり、 a_p / a_f についてみれば、変動係数の非常に小さな分布となっており、これをほぼ一定値 (= 平均値) と扱っても差し支えないことがわかる。



図—11 Houghton の理論との比較

表—3 周波数 f をランダムにした場合の応答
(CASE 1, $f=10$ [Hz])

kv	γf	Wp/Wo		ap [cm]		ap/af	
		平均値	変動係数	平均値	変動係数	平均値	変動係数
0.5	0	0.998	—	0.0284	—	0.971	—
	0.3	0.990	0.00378	0.0281	0.347	0.938	0.0475
1.0	0	0.995	—	0.0570	—	0.978	—
	0.3	0.985	0.00965	0.0585	0.313	0.950	0.0370
2.0	0	0.965	—	0.114	—	0.969	—
	0.1	0.970	0.0104	0.113	0.110	0.959	0.00863
	0.2	0.970	0.0102	0.117	0.209	0.958	0.0152
	0.3	0.971	0.0204	0.118	0.312	0.952	0.0352
3.0	0	0.977	—	0.173	—	0.971	—
	0.3	0.949	0.0327	0.176	0.312	0.953	0.0345
4.0	0	0.979	—	0.227	—	0.968	—
	0.3	0.922	0.0471	0.235	0.312	0.953	0.0336

表—4 速度振幅をランダムにした場合の応答
(CASE 1, $f=10$ [Hz])

kv	$\gamma_{r, amp}$	Wp/Wo		ap [cm]		ap/af	
		平均値	変動係数	平均値	変動係数	平均値	変動係数
0.5	0	0.998	—	0.0284	—	0.971	—
	0.3	0.995	0.00179	0.0297	0.294	0.983	0.00603
1.0	0	0.995	—	0.0570	—	0.978	—
	0.3	0.994	0.00345	0.0565	0.309	0.978	0.00778
2.0	0	0.965	—	0.114	—	0.969	—
	0.1	0.988	0.00299	0.115	0.105	0.973	0.00074
	0.2	0.988	0.00483	0.115	0.207	0.958	0.00107
	0.3	0.988	0.00670	0.113	0.305	0.952	0.00952
3.0	0	0.977	—	0.173	—	0.971	—
	0.3	0.974	0.0114	0.178	0.275	0.972	0.00148
4.0	0	0.979	—	0.227	—	0.968	—
	0.3	0.958	0.0187	0.228	0.286	0.971	0.00463

③ w_p/w_0 についても、 a_p/a_r と同様のことが考えられ、一定値とみなすことができる。

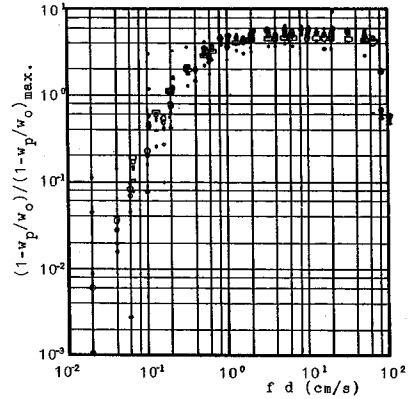
以上より、周波数あるいは速度振幅がランダムに変化する場合にも、前節までに明らかになった結果をそのまま適用することが可能であることがわかり、このことから、さらにランダム性が強まる実際の流水中の乱れの場合に、本論で明らかになった知見を適用すれば、表現象を把握する手がかりが得られるものと考えている。

3. 水平振動流中の粒子の沈降特性

(1) 基礎方程式および計算の概略

前章では、流体が鉛直方向に振動する流れの場合における粒子の沈降特性について検討したが、本章では、その応用として、流体が水平方向に振動する場合についても若干の検討を加えておく。

基礎方程式としては、2.(1) で示した式 (1) と同様の考え方の下に、これを二次元の場合に拡張した式 (21) を用いる (水平方向に x, u を、鉛直下向きに



図—12 水平振動流の場合の w_p/w_0 の変化

z, v をとる).

$$du_p/dt = K_D \cdot C_D \cdot |\bar{V}_r| (u_r - u_p) + K_D \cdot du_r/dt$$

$$dv_p/dt = -K_D \cdot C_D \cdot |\bar{V}_r| v_p + K_D \cdot g$$

$$\bar{V}_r = (u_r - u_p, v_p), R_e = |\bar{V}_r| d / \nu \dots \dots \dots (21)$$

ここに、 \bar{V}_r は粒子と流体との相対速度ベクトルであり、Basset 項については前節での検討結果に基づいて、無視するものとする。また、抗力係数 C_D は、式 (21) により求まる R_e に対して式 (2) から決定する。一方、流体の水平方向速度 u_r は、式 (4) と同様に次式のよる sine 波形で与える。

$$u_r(t) = U_{r, amp} \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \dots \dots \dots (22)$$

なお、計算方法・計算条件については、2.(1) に示した鉛直振動流の場合と同様のものを用いている。

(2) 粒子の運動軌跡および移動速度

粒子の運動軌跡および移動速度については、次のことがわかった。水平方向には流体の振動周波数と同じ周波数で振動し、鉛直振動の場合と同様に sine 波形をとる (高次の項は無視できる)。鉛直方向には一定速度 (沈降速度) で沈降するものの、ほとんど振動はしない。したがって、定常状態に達した後の粒子速度は、次式で表わされる。

$$u_p(t) = U_{p, amp} \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \epsilon)$$

$$v_p(t) = w_p \dots \dots \dots (23)$$

(3) 最終沈降速度 w_p

水平振動流中の粒子の最終沈降速度に関する低下傾向については、図—3, 4 に示した鉛直振動の場合と同様の結果が得られたが、この低下が生じる周波数領域における同一の $k_v (= v_{r, rms}/w_0, U_{r, rms}/w_0)$ に対する低下量自体については、図—12 (図—4 に対応) からわかるように鉛直振動の場合の 1/2 程度にすぎないことが明らかになった (なお、図—12 の縦軸は、図—4 とは異なり、 $(1 - w_p/w_0)$ の計算結果を式 (6) による $(1 - w_p/w_0)_{max}$ の値で除して示している)。

(4) 粒子の水平方向の振動振幅 a_{ph}

粒子の水平方向の振動振幅 a_{ph} については、鉛直振動の場合と全く同一の結果が得られた (図-7, 8 参照). このことは、流体の振動に対する粒子の応答性が、両者の間で変わらないことを表わし、結果的に2.(2) d) で記した、浮流砂の運動を解析する際の最小時間は、水平・鉛直の両方向について同一の値とすべきことが明らかになった.

(5) 位相差 ϵ

位相差についても、鉛直振動の場合とはほぼ同一傾向を示し、かつ、その最大遅れの値が鉛直振動の場合の2/3程度となることがわかった.

以上のことから、①流体の振動が沈降速度の低下に及ぼす影響は、鉛直振動の場合ほど大きいこと、②粒子の追随性は、重力の影響にもかかわらず、ほとんど同一であること、③浮流粒子の運動を解析する際の数値計算上の時間ステップとしては、鉛直・水平の2つの方向に対して同一の値としてよいこと、④位相差は、重力の影響のために鉛直振動の場合ほど大きくなること、などが明らかになった.

4. 結 論

本論では、流体の変動速度を単純な sine 波形を用いてモデル化し、このような脈動流中を沈降する粒子の運動特性について、数値計算を通じて検討を行った。本論により明らかになったことを以下に列挙し、結論とする。

(1) 流体の変動速度を sine 波形を用いてモデル化した鉛直振動流中の粒子の移動速度が、式(5)で表わされること、高次の項が無視できることを示した。

(2) 粒子の最終沈降速度 w_o の低下に関して、その原因を明らかにし、しかも、その定量的な評価を行った。また、 w_o の低下を抗力係数 C_D の面から整理すると、 C_D の増加となって現われること、およびその変化パターンを示した。

(3) 流体の脈動に対する粒子の応答性について検討を行い、その結果に基づき粒子が追随できる流体振動の最大周波数を明らかにし、合わせて浮流砂の運動を解析する際に問題となる数値計算上の最小時間間隔を物理的に決定する方法を示した。

(4) 流体の速度にランダム性をもたせ、周波数あるいは速度振幅を一周期ごとに変化させた場合についても検討を行い、その結果が、規則波の場合の結果と変わら

ないとみなせることを示した。

(5) 流体が水平方向に振動する場合についても同様の検討を行い、沈降速度については鉛直振動の場合ほど低下しないこと、粒子の応答性についてはほぼ同一の結果となること、などが明らかとなった。

今後は、入力する流体の速度にさらにランダム性をもたせ、より実際の乱れに近い流体速度に対する粒子の応答性について検討していくとともに、本論により明らかになった知見を土砂の浮流機構の解明に役立てていくつもりである。

なお、本研究は、文部省科学研究費(奨励研究(A)、流砂モデルの再検討とその統一化に関する研究、研究代表者:関根正人)の補助を受けた。また、本研究の遂行にあたり、桑原紀博氏(日建設計(株)、当時、早稲田大学理工学部4年)および榊永善文氏(鹿島建設(株)、当時、同大学大学院理工学研究科)の協力を得た。記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Baird, H. I. M., Senior, M. G. and Thompson, R. J. : Terminal Velocities of Spherical Particles in a Vertically Oscillating Liquid, Chem. Eng. Sci., Vol. 22, pp. 551-557, 1967.
- 2) Houghton, G. : The Behaviour of Particles in a Sinusoidal Velocity Field, Proc. Roy. Soc., A272, pp. 33-43, 1963.
- 3) Houghton, G. : Particle Trajectories and Terminal Velocities in Vertically Oscillating Fluids, Can. J. Chem. Eng., 44, pp. 90-95, 1966.
- 4) Houghton, G. : Particle Retardation in Vertically Oscillating Fluids, Can. J. Chem. Eng., 46, pp. 79-81, 1968.
- 5) Tunstall, E. B. and Houghton, G. : Retardation of Falling Spheres by Hydrodynamic Oscillation, Chem. Eng. Sci., Vol. 23, pp. 1067-1081, 1968.
- 6) Hwang, P. A. : Fall Velocity of Particles in Oscillating Flow, ASCE, Vol. 111, pp. 485-502, 1985.
- 7) Molerus, O. and Werther, J. : Berechnung der Sinkbewegung kugeligier Teilchen in einem vertikal pulsierenden Stromungsfeld, Chemie-ing. -Techn. Vol. 40, pp. 522-524, 1968.
- 8) Tchen, C. M. : Mean Value and Correlation Problems connected with the Motion of Small Particles suspended in a Turbulent Fluid, 1947. (Doctor Thesis).
- 9) 関根正人・吉川秀夫:浮流砂理論の再検討, 土木学会論文集, 第369号, pp. 109-118, 1986.

(1987.5.21・受付)