

高速湾曲流に関する二、三の検討

SOME CONSIDERATIONS ON HIGH VELOCITY FLOWS THROUGH CURVED OPEN CHANNELS

細田 尚*・余越正一郎**

By Takashi HOSODA and Shoichiro YOKOSI

In this paper, the simple method for the hydraulic analysis of the high velocity flows through curved open channels is shown with some numerical results which contain the longitudinal and transverse distributions of hydraulic variables. It is shown that the fundamental equations used here are equivalent to the previous studies by von Kármán and Lenau mathematically. The numerical results are divided into three groups qualitatively and compared with the analysis of von Kármán and Lenau. When R/B becomes larger, the numerical results will gradually approach to Lenau's solutions. It is also shown that the effects of the bottom shear stresses can be considered by extending the method used here.

Keywords: open channel, numerical analysis, high velocity flow

1. 緒 言

本研究は、水路湾曲部を通る高速流に関して、特性曲線法を用いた数値解析法について検討したものである。水路湾曲部を通る高速流に関しては、von Kármánの解析法をもとにした手法がIppen¹⁾によって示されている。微小な不連続の伝播する線で分けられる2つの領域の関係を、不連続線に垂直な方向の運動量保存則と、流れの全域にわたって成立するベルヌーイの式より求めている。さらに、この関係式を用いた図式解法が示されている。

一方、Lenau²⁾は、ベルヌーイの式、連続式、非回転の条件を用いて摂動解を導いている。摂動のパラメータは水路の曲率半径 R と水路上流端の水深 h_0 の比 R/h_0 であるが、 R と水路幅の比 R/B と考えても同様である。

このように、Ippenの研究では流れの全域で $h + (v_r^2 + v_\theta^2)/2g = \text{一定}$ (h : 水深, (v_r, v_θ) : 流速ベクトルの r, θ 方向成分) が仮定され、さらにLenauの研究では流れの全域にわたって渦度ベクトルの鉛直成分 $\omega =$

0が仮定されている (Ippenの研究でも、水路上流端で流れの方向が水路側壁の方向と平行でかつ大きさも一定の場合を想定しており、水路上流端で $\omega = 0$ となっていることと、流線に沿って $\omega/h = \text{一定}$ であることから、流れの全域で $\omega = 0$ の場合を取り扱っていることになる)。しかし、本研究の解析法で示すように定常状態での平面流れの基礎式より出発して、流れの全域で $h + (v_r^2 + v_\theta^2)/2g = \text{一定}$, $\omega = 0$ を用いることなく特性曲線とその上の関係式を求めることができ、原理的には水路床勾配、底面せん断応力を考慮した解析も可能となる。本研究でも、まず、水路上流端で $h + (v_r^2 + v_\theta^2)/2g = \text{一定}$, $\omega = 0$ となる場合を取り扱い、本研究で用いる基礎式と従来の研究との関係を示す。次に、特性曲線上の関係式を固定格子点を用いた差分式に変換し、水路上流端のFroude数、 R/B を変化させて数値解析を行う。この方法は従来の図式解法よりも解析が容易であり、計算条件を広範囲に変化させたときの水利諸量の特性が検討できる。最後に、水路床勾配、底面せん断応力の効果を考慮した1つの解析法と計算結果を示す。

以下に解析手順と計算結果の考察について述べる。

2. 本研究の解析法

(1) 基礎式と特性曲線

* 正会員 工修 広島大学助手 工学部4類 (建設系)

(〒724 東広島市西条町下見)

** 正会員 工博 広島大学教授 工学部4類 (建設系) (同上)

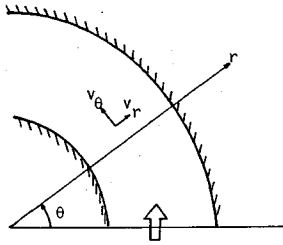


Fig.1 Coordinate System.

基礎式は次のように行列表示される。用いている座標系を Fig.1 に示した。ただし、水路床勾配、底面せん断応力項が無視できる場合を考える（水路床勾配、底面せん断応力を考慮した解析法については 4. (4) で考察する）。

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial r} + A_2 \frac{\partial U}{\partial \theta} = B \dots \dots \dots (1)$$

ここに、

$$U = \begin{bmatrix} h \\ v_r \\ v_\theta \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} rv_r & rh & 0 \\ g & v_r & 0 \\ 0 & 0 & v_r \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} v_\theta & 0 & h \\ 0 & v_\theta/r & 0 \\ g/r & 0 & v_\theta/r \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -v_r h \\ v_\theta^2/r \\ -v_r v_\theta/r \end{bmatrix}$$

また、 h ：水深、 v_r および v_θ ：水深平均された流速ベクトルの r, θ 方向成分。

ここで式 (1) の特性曲線を考える。 $\xi(r, \theta) = \text{一定}$ となる線上（これを η 軸とする。）で U の値が与えられたとき $\partial U / \partial \xi$ が定まらない条件が特性条件とよばれ、この条件を満たす $\xi(r, \theta) = \text{一定}$ となる線が特性曲線となる³⁾。まず式 (1) を (r, θ) 系より (ξ, η) 系に座標変換する。

$$\left(A_2^{-1} A_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \left(A_2^{-1} A_1 \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) \frac{\partial U}{\partial \eta} = A_2^{-1} B \dots \dots \dots (2)$$

すなわち、特性曲線は $A_2^{-1} A_1$ の固有値を求めることにより、次式で与えられる。

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{v_r}{v_\theta} \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} \pm \frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh} \dots \dots \dots (3)$$

$A_2^{-1} A_1$ は次式となる。

$$A_2^{-1} A_1 = r \begin{bmatrix} \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} & \frac{h v_\theta}{v_\theta^2 - gh} & \frac{-h v_r}{v_\theta^2 - gh} \\ \frac{g}{v_\theta} & \frac{v_r}{v_\theta} & 0 \\ \frac{-g v_\theta}{v_\theta^2 - gh} & \frac{-gh}{v_\theta^2 - gh} & \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} \end{bmatrix}$$

本研究で対象とするのは $(v_\theta^2 + v_r^2) / gh > 1$ となる双曲型の場合である。

式 (3) のおのおのに対する $A_2^{-1} A_1$ の左固有ベクトル

は次のようになる⁴⁾。

$$\lambda_1 = \frac{v_r}{v_\theta} : \mu_1 = \left(1, \frac{v_r}{g}, \frac{v_\theta}{g} \right) \dots \dots \dots (4 \cdot a)$$

$$\lambda_2 = \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} + \frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh} :$$

$$\mu_2 = \left(\frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{h v_\theta}, 1, -\frac{v_r}{v_\theta} \right) \dots \dots \dots (4 \cdot b)$$

$$\lambda_3 = \frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} - \frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{v_\theta^2 - gh} :$$

$$\mu_3 = \left(-\frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{h v_\theta}, 1, -\frac{v_r}{v_\theta} \right) \dots \dots \dots (4 \cdot c)$$

固有ベクトル μ_i を $A_2^{-1} A_1 \partial U / \partial r + \partial U / \partial \theta = A_2^{-1} B$ に左より乗ずる。この際、便利のため両辺を r で除し、 $A_2^{-1} A_1 / r, A_2^{-1} B / r$ をおのおの $A_2^{-1} A_1, A_2^{-1} B$ と再定義する。特性曲線上の関係式として次式が得られる。

$$\mu_i \left(A_2^{-1} A_1 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{r \partial \theta} \right) = \mu_i \left(\lambda_i \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{r \partial \theta} \right) = \mu_i A_2^{-1} B \dots \dots \dots (5)$$

ここに、

$$A_2^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ v_\theta / r \\ -v_r / r \end{bmatrix}$$

$i=1 \sim 3$ について式 (5) を記せば次のようになる。
 $i=1$ について

$$\frac{v_r}{v_\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(h + \frac{v_r^2}{2g} + \frac{v_\theta^2}{2g} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(h + \frac{v_r^2}{2g} + \frac{v_\theta^2}{2g} \right) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

すなわち、流線に沿って $h + (v_r^2 + v_\theta^2) / 2g = \text{一定}$ となる。

$i=2, 3$ について

$$\frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{h v_\theta} \left(\lambda_2 \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial h}{r \partial \theta} \right) + \left(\lambda_2 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} \right) - \frac{v_r}{v_\theta} \left(\lambda_2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} \right) = \frac{(v_\theta^2 + v_r^2)}{r v_\theta} \dots \dots \dots (7 \cdot a)$$

$$- \frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}}{h v_\theta} \left(\lambda_3 \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial h}{r \partial \theta} \right) + \left(\lambda_3 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{r \partial \theta} \right) - \frac{v_r}{v_\theta} \left(\lambda_3 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} \right) = \frac{(v_\theta^2 + v_r^2)}{r v_\theta} \dots \dots \dots (7 \cdot b)$$

(2) 固定格子点での特性曲線法

式 (5) の解析法として、数値解析が容易な固定格子点での差分式を用いる。この方法は、同種の特性曲線の交差が生じない緩やかな開水路非定常流の解析に用いられ、成果を収めてきた⁵⁾。また、高速湾曲流にも適用されているが⁴⁾、その際、流線上の関係式を用いずに連続式を直接差分する方法が用いられていた。しかし、流れを特性曲線に沿って上流より下流に追っていく（式 (6), (7) には特性曲線に沿った微分のみ存在する）

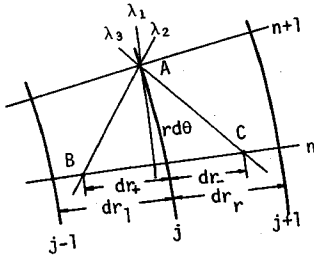


Fig. 2 Difference Scheme.

という特徴を表すためには連続式よりも式(6)を用いた方がよいと考えられ、また、連続式を用いたときも、側壁での境界条件に式(6)を用いたことから、本研究では流線上の関係式(6)を用いた収束計算を行う。以下にその概要を示す。

流れの領域を Fig. 2 に示すような格子で覆い、式(5)中の微係数を次のように近似する。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 : \frac{\partial U}{\partial \theta} &\doteq \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{d\theta}, \quad \frac{\partial U}{\partial r} \doteq \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{dr_1} \\ \lambda_3 : \frac{\partial U}{\partial \theta} &\doteq \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{d\theta}, \quad \frac{\partial U}{\partial r} \doteq \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{dr_r} \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

ここに、 U_j^n は r に関して j 番目、 θ に関して n 番目の格子点での U の値を示す。式(8)を用いて λ_2, λ_3 上での関係式を次のように表わす。

$$(\mu_2)_j^n \left[(A_2^{-1} A_1)_j^n \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{dr_1} + \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{r_j d\theta} \right] = (\mu_2)_j^n (A_2^{-1} B)_j^n \dots\dots (9 \cdot a)$$

$$(\mu_3)_j^n \left[(A_2^{-1} A_1)_j^n \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{dr_r} + \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{r_j d\theta} \right] = (\mu_3)_j^n (A_2^{-1} B)_j^n \dots\dots (9 \cdot b)$$

一方、流線上の関係式に関しては次の計算法を用いる。水路の上流端で $h + (v_0^2 + v_r^2)/2g = \text{一定}$ のとき、流線上の関係式(6)は流れ全域にわたって成立する次式になる。

$$h + \frac{v_0^2 + v_r^2}{2g} = h_0 + \frac{U_0^2}{2g} = H_0 \dots\dots (10)$$

ここに、 h_0 : 水路上流端での水深、 U_0 : 水路上流端での流速。

式(10)を次のように離散化する。

$$h_j^{n+1} + \frac{v_r^*}{2g} v_{rj}^{n+1} + \frac{v_0^*}{2g} v_{0j}^{n+1} = H_0 \dots\dots (11)$$

上式で v_r^*, v_0^* の初期値として v_{rj}^*, v_{0j}^* とおき、式(9・a, b), (11)より $h_j^{n+1}, v_{rj}^{n+1}, v_{0j}^{n+1}$ を求める。この $v_{rj}^{n+1}, v_{0j}^{n+1}$ を v_r^*, v_0^* に代入する。この手順を繰り返す、

$$\left| h_j^{n+1} + \frac{v_r^*}{2g} v_{rj}^{n+1} + \frac{v_0^*}{2g} v_{0j}^{n+1} - H_0 \right| < \epsilon$$

となれば次の $n+2$ 断面に進むようにした。 ϵ の値はここでは $0.0002 \times H_0$ としている。この方法は、著者らが

以前に行った⁴⁾連続式を直接差分する方法を改善したものである。

以上をまとめると計算式は次式となる。

$$PU_j^{n+1} = QU_j^n + RU_{j+1}^n + SU_{j-1}^n + T \dots\dots (12)$$

ここに、

$$P = \begin{bmatrix} \frac{(\mu_2)_j^n}{r_j d\theta} \\ \frac{(\mu_3)_j^n}{r_j d\theta} \\ 1, v_{rj}^*/2g, v_{0j}^*/2g \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{(\mu_2)_j^n}{r_j d\theta} & \frac{(\mu_2)_j^n (A_2^{-1} A_1)_j^n}{dr_1} \\ \frac{(\mu_3)_j^n}{r_j d\theta} & \frac{(\mu_3)_j^n (A_2^{-1} A_1)_j^n}{dr_r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{(\mu_3)_j^n (A_2^{-1} A_1)_j^n}{dr_r} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \frac{(\mu_2)_j^n (A_2^{-1} A_1)_j^n}{dr_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} (\mu_2)_j^n (A_2^{-1} B)_j^n \\ (\mu_3)_j^n (A_2^{-1} B)_j^n \\ H_0 \end{bmatrix}$$

(3) 境界条件の取り扱い

本研究で対象としているのは、Froude 数 $F_r = \sqrt{v_r^2 + v_0^2} / \sqrt{gh}$ が 1 より大きい領域のみであり、上流端で水深、流速を与える。すなわち、 $\theta=0$ で $h=h_0, v_0=U_0, v_r=0$ とした。

側壁での計算には以下の方法を用いる。流線上の関係式に壁面での条件 $v_r=0$ を代入した $h + v_0^2/2g = H_0$ と、左岸では λ_3 上、右岸では λ_2 上の関係式を連立する。すなわち、左岸では $j=1$ として、式(12)中の λ_3 上の関係式

$$\frac{(\mu_{3,1})_1^n}{r_1 d\theta} h_1^{n+1} = (Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}) U_1^n + (R_{21}, R_{22}, R_{23}) U_2^n + T_2$$

を用いる。ここに、 $\mu_{3,1} : \mu_3$ の第 1 列成分、 $Q_{2m}, R_{2m} : Q, R$ の第 2 行 m 列成分、 $T_2 : T$ の第 2 行成分を示す。右岸も同様である。

以上、本研究で用いる解析法について述べた。次に、この解析法と従来の研究との関係について述べよう。

3. 従来の研究との関係

(1) von Kármán の解析法との関係

Ippen の研究¹⁾に詳述されている von Kármán の解析法について、本研究との関係を明らかにするために簡単に示す。

微小な不連続の伝播する線に垂直な方向の連続式と運動量保存の関係式より次式が導かれている。

$$\frac{V d\theta'}{\cos \beta} = \frac{gdh}{V \sin \beta}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{gh}}{V} \dots\dots (13)$$

上式の記号の説明図は従来と同様の Fig. 3 である。

式(13)と $h + V^2/2g = H_0$ より

$$\frac{dh}{d\theta'} = \frac{2(H_0 - h)\sqrt{h}}{\sqrt{2H_0 - 3h}} \dots\dots (14)$$

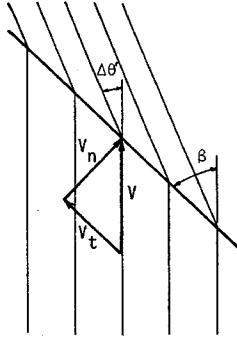


Fig. 3 Explanation of the symbols.

が導かれ、この解が von Kármán の解とよばれる次式である。

$$\theta' = \sqrt{3} \tan^{-1} \sqrt{\frac{3h/2H_0}{1-(3h/2H_0)}} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3h/2H_0}{1-(3h/2H_0)}} - \theta' \dots \dots \dots (15)$$

これらの結果は、本研究で用いる基礎式を用いても誘導できる。微小な不連続の伝播する線は特性曲線であり、Fig. 3 の場合は λ_3 に対応している。Fig. 3 の β は Fig. 4 では $\beta = \delta - \gamma$ となる。ただし、角度は $r = \text{const.}$ 線より反時計回りを正とする。 $\tan \gamma$, $\tan \delta$ は式 (3) よりおのおの次のようになる。

$$\tan \gamma = -\frac{v_r}{v_\theta},$$

$$\tan \delta = -\frac{v_r v_\theta}{v_\theta^2 - gh} + \frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} - gh}{v_\theta^2 - gh}$$

よって

$$\tan \beta = \tan (\delta - \gamma) = \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} - gh}$$

となり、式 (13) と同一になる。

式 (14) に関しては次のように考えることができる。

Fig. 3 と同様に λ_3 で分けられる 2 つの領域を考え、 $r = \text{const.}$ 線を $\Delta\theta$ で折れる線で近似する (Fig. 5)。 λ_3 で分けられる 2 つの領域の関係を表わすのは λ_2 上の関係式であり、 $D/rD\theta = \partial/r\partial\theta + \lambda_3 \partial/\partial r$ とおいて式 (7・a) を再記すれば次のようになる。

$$\frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} - gh}{h} \frac{Dh}{rD\theta} + v_\theta \frac{Dv_r}{rD\theta} - v_r \frac{Dv_\theta}{rD\theta} = \frac{v_\theta^2 + v_r^2}{r} \dots \dots \dots (16)$$

本研究で用いている θ は円柱座標系での基準より測った角度であり、Fig. 3 で用いられている θ' とは異なる。この両者の関係は、Fig. 5 より $\Delta\theta' = \gamma_2 - \gamma_1 + \Delta\theta$

であるから、 $\tan \Delta\theta' = \frac{\tan \Delta\theta + \tan (\gamma_2 - \gamma_1)}{1 - \tan \Delta\theta \tan (\gamma_2 - \gamma_1)}$ となる。

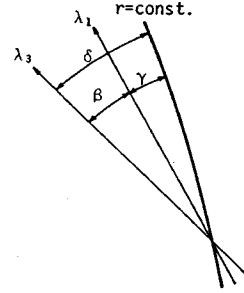


Fig. 4 Relation between β and the angle measured from $r = \text{const.}$ line.

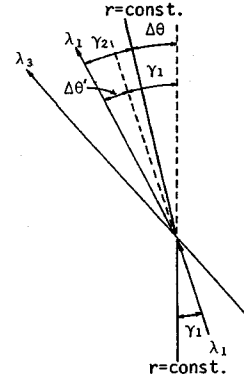


Fig. 5 Relation between $\Delta\theta'$ and $\Delta\theta$.

一方、

$\tan \gamma_1 = -v_r/v_\theta$, $\tan \gamma_2 = -(v_r + dv_r)/(v_\theta + dv_\theta)$ を用いて

$$\tan (\gamma_2 - \gamma_1) = \frac{\tan \gamma_2 - \tan \gamma_1}{1 + \tan \gamma_2 \tan \gamma_1} = \frac{-v_\theta dv_r + v_r dv_\theta}{v_\theta^2 + v_r^2 + v_\theta dv_\theta + v_r dv_r}$$

であるから、 $\tan \Delta\theta'$ は、

$$\tan \Delta\theta' = \frac{\tan \Delta\theta (v_\theta^2 + v_r^2 + v_\theta dv_\theta + v_r dv_r) - v_\theta dv_r + v_r dv_\theta}{v_\theta^2 + v_r^2 + v_\theta dv_\theta + v_r dv_r - \tan \Delta\theta (-v_\theta dv_r + v_r dv_\theta)}$$

となる。 $\tan \Delta\theta' \approx \Delta\theta'$, $\tan \Delta\theta \approx \Delta\theta$ とおいて二次の微小量を無視した後、両辺を $\Delta\theta'$ で除し極限をとれば

$$1 = \frac{d\theta}{d\theta'} + \frac{1}{v_\theta^2 + v_r^2} \left(-v_\theta \frac{dv_r}{d\theta'} + v_r \frac{dv_\theta}{d\theta'} \right) \dots \dots \dots (17)$$

が得られる。式 (16) 中の Dv_r , Dv_θ は式 (17) の dv_r , dv_θ に対応し、 $D\theta$ は $d\theta$ に対応するので、式 (16) は両辺に $d\theta/d\theta'$ を乗じ式 (17) を用いることで次のように書き換えることができる。

$$\frac{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2} - gh}{h} \frac{dh}{d\theta'} + \left(\frac{d\theta}{d\theta'} - 1 \right) (v_\theta^2 + v_r^2) = (v_\theta^2 + v_r^2) \frac{d\theta}{d\theta'}$$

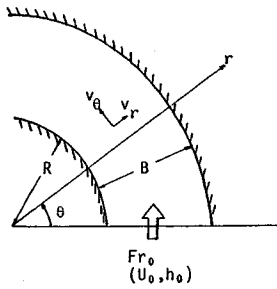


Fig.6 Symbols of hydraulic variables.

すなわち

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{h(v_\theta^2 + v_r^2)}{\sqrt{gh} \sqrt{v_\theta^2 + v_r^2 - gh}} \dots (18)$$

となり式 (14) が得られる。

以上より、本研究の解析法は、式 (13), (14) に基づく従来の図式解法¹⁾と原理的に一致することがわかる。

(2) Lenau の研究との関係

Lenau はベルヌーイの式、連続式、非回転の条件を用いた摂動解を導いている²⁾。水路の上流端で $\omega=0$ であれば流線に沿って $\omega/h=$ 一定であるから⁶⁾、流れの全域で $\omega=0$ となる。すなわち、本研究で用いている基礎式と Lenau の基礎式は同一となる。摂動のパラメーター R/B が十分大きければ Lenau の解と本研究の結果は一致すると考えられる。

Lenau の解の結果として得られる水路外岸での水深の first peak の値 h_{max} 、その発生位置 θ_{max} を示せば次式となる。記号の説明を Fig.6 に示す。

$$\frac{h_{max}}{h_0} = 1 + F_{r0}^2 \frac{B}{R + (B/2)} \dots (19)$$

$$\theta_{max} = \frac{B}{R + (B/2)} \sqrt{F_{r0}^2 - 1} \dots (20)$$

次に、本研究での解析法による計算結果を示し、考察する。

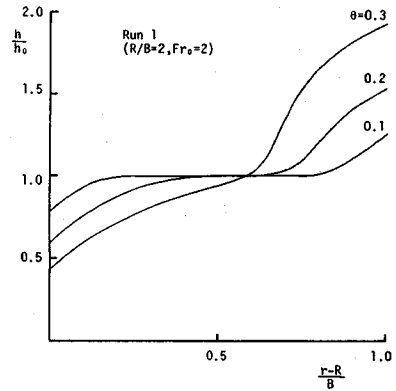
4. 数値解析結果の考察

(1) 計算条件

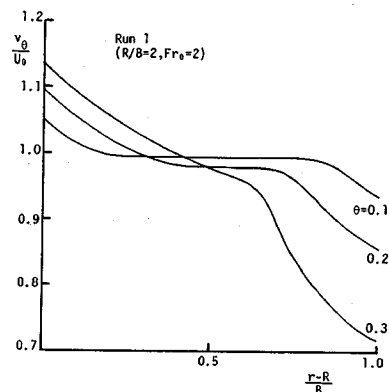
計算条件は、無次元パラメーター F_{r0} , R/B を変化させ、Table 1 のようにした。 F_{r0} は 2~8, R/B は 2~

Table 1 Nondimensional Parameter of Numerical Analysis.

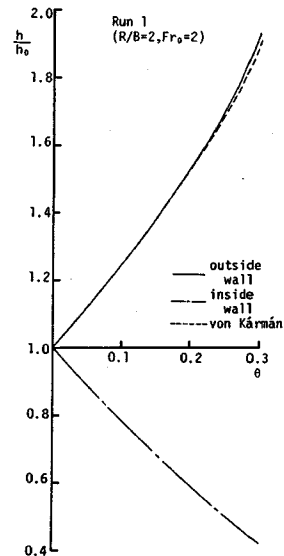
	R/B	F_{r0}
Run 1	2	2, 4, 6, 8
Run 2	5	2, 4, 6, 8
Run 3	10	2, 4, 6, 8
Run 4	20	2, 4, 6, 8
Run 5	40	2, 4, 6, 8
Run 6	60	2, 4, 6, 8
Run 7	100	2, 4, 6, 8



(a) depth



(b) axial velocity



(c) depth along the side walls

Fig.7 Distributions of hydraulic variables (Run 1, $F_{r0}=2$).

100 の範囲で変化させている。

(2) 流れの定性的分類

数値解析結果をみると流れは大きく次の三通りに分類できるようなのである。1つはRun 1の $F_{r0}=2$ の場合のように水路外岸で水深が最大値を取る前に $F_{r0}=1$ となり本研究の解析法では計算が不能となる場合であり、これをtype 1とする。この場合の h , v_θ の分布をFig. 7(a)~(c)に示す。Fig. 7(a)には水深の横断分布を示した。外岸側より水深の増加が中央に伝わるにつれて水深の勾配が急になっていく。これは、衝撃波の形成過程を表わしていると考えられる。Fig. 7(b)に示した v_θ の横断分布にも同様のことがいえる。Fig. 7(c)は水路内・外岸に沿った水深の変化を示したものであり、図中にはvon Kármánの解、式(15)も示してある。両者は計算不能になる少し手前までよく一致している。

Fig. 8には外岸に沿ってのFroude数の変化を示した。 $\theta=0.3$ 付近で $F_r=1$ となり、以後本研究の解析法では計算できない。

type 2は、水路外岸でのFroude数は依然として1より大きい、衝撃波の発生により水量が極値をとる前に計算不能となる場合である。これは、固定格子点での特性曲線法を用いているため、同種の特性曲線の交差による衝撃波の再現ができないためと考えられる。

Run 2の $F_{r0}=6$ を例にとり、水深の横断分布をFig. 9に示した。分布の形状はtype 1の場合と変わらない。

type 3は水路側壁上で水量が一度極値をとる場合である。Run 7の $F_{r0}=4$ について水深の横断分布をFig. 10(a), (b)に示した。(a)はfirst peakに至るまでであり、(b)はそれ以降である。Fig. 11は水路側壁に沿った水深の変化を示したもので、外岸に沿って一度極大値をとった後減少し、次に極小値をとって増加していく。計算条件によっては、その途中で衝撃波の発生により計算不能となる場合もあったが、本研究ではfirst peakの存在するものをtype 3とする。

以上をまとめると次のようになる。

type 1：水路側壁で水量が極値をとる前に $F_r=1$ となり計算不能となる場合。

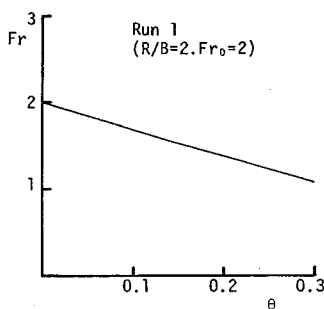


Fig. 8 Froude number along the outside wall.

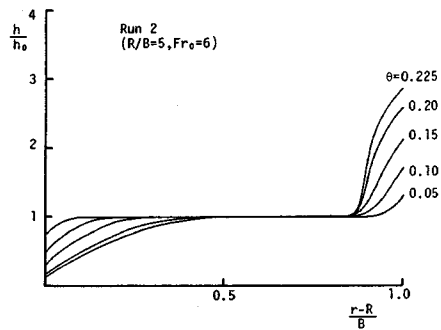
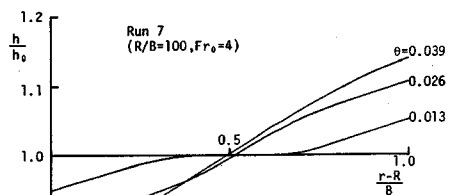
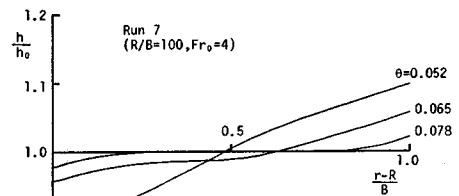


Fig. 9 Transverse distributions of depth (Run 2, $F_{r0}=6$).



(a)



(b)

Fig. 10 Transverse distributions of depth (Run 7, $F_{r0}=4$).

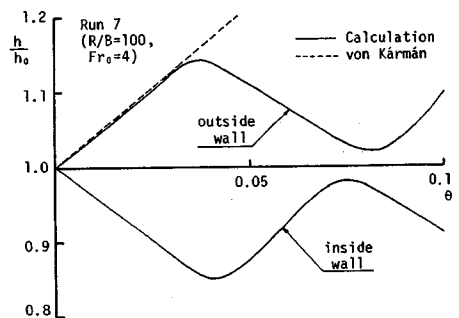


Fig. 11 Depth along the side walls (Run 7, $F_{r0}=4$).

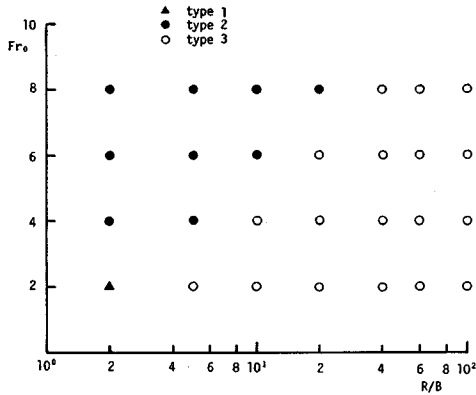


Fig. 12 Classification of the flows.

type 2: 衝撃波の発生により水理量が極値をとる前に計算不能となる場合。

type 3: 水路側壁で水理量が極値をとる場合。

type 1~3 を Fr_0 , R/B によって分類したのが Fig. 12 である。 R/B が大きくなるにつれて type 3 の領域が広がるのがわかる。

(3) Lenau の研究との比較

Lenau によって得られた式 (19), (20) と計算結果を比較する。 first peak の値 h_{max} について Fr_0 をパラメーターとして R/B との関係を示したのが Fig. 13 である。 また、 h_{max} の発生位置 θ_{max} について示したのが Fig. 14 である。 計算値はどちらも R/B の増加とともに Lenau の解に漸近していく。 R/B が小さいとき、計算結果は Lenau の解より小さな値となっている。

(4) 底面せん断応力を考慮した解析

次に、底面せん断応力を考慮する場合の解析法と計算例について簡単に述べる。 水路床勾配は水路中心線の勾配を i_0 として、 $i = (R+B/2) \cdot i_0 / r$ とする。

基礎式は式 (1) に現われる行列 B が次のようになるのみで、残りは今までと変わらない。

$$B = \begin{bmatrix} -v_r h & \\ \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{\tau_{br}}{\rho h} & \\ -\frac{v_r v_\theta}{r} + g \left(i - \frac{\tau_{b\theta}}{\rho g h} \right) & \end{bmatrix}$$

ここに、 τ_{br} , $\tau_{b\theta}$: 水路床に作用する応力ベクトルの成分で、Manning 則を用いて次のように表わす。

$$\frac{\tau_{br}}{\rho} = gn^2 \frac{\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}}{h^{1/3}} v_r, \quad \frac{\tau_{b\theta}}{\rho} = gn^2 \frac{\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}}{h^{1/3}} v_\theta$$

また、 i_0 を $i_0 = U_0^2 n^2 / h_0^3$ とした。

差分式は今まで用いてきたものと同様であるが、式 (10) を用いることができないので、代わりに流線に沿って成立する関係式 (式 (5) において $i=1$ としたとき

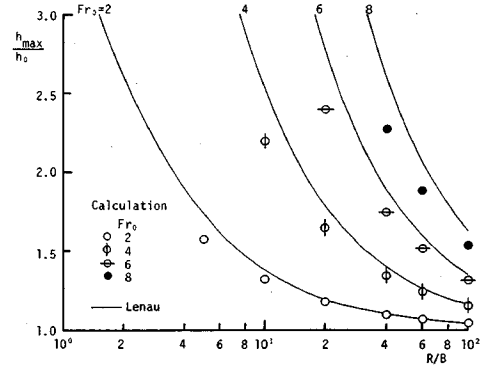


Fig. 13 Relation between h_{max}/h_0 and nondimensional parameters.

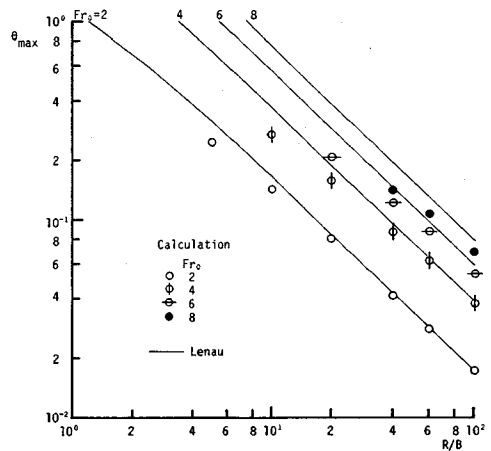


Fig. 14 Relation between θ_{max} and nondimensional parameters.

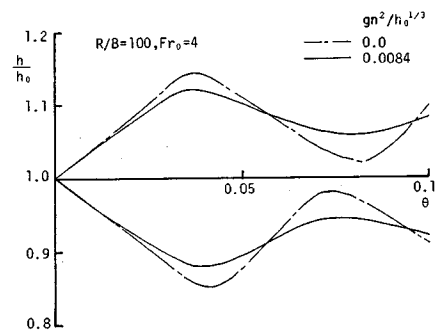


Fig. 15 Numerical results taken account of the bottom shear stresses.

の関係式) を Fig. 2 の格子点を用いて差分化した次式を用いる。

$$(\mu_1)_j^n \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{r_j d\theta} + (\mu_1)_j^n (A_2^{-1} A_1)_j^n \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{dr_r + dr_i} = (\mu_1)_j^n (A_2^{-1} B)_j^n \dots \dots \dots (21)$$

計算条件は $R/B=100$, $F_{r0}=4$ を用い, $gn^2/h_0^3=0$ のとき Fig. 11 とほとんど一致するのを確かめている。 $gn^2/h_0^3=0$ と 0.0084 の場合の水路側壁に沿った水深の変化を Fig. 15 に示した。0.0084 の場合, 0.0 に比べて振動の振幅は小さく, θ の増加とともに振動が減衰していくのがわかる。

5. 結 語

本研究は, 固定格子点での特性曲線法により, 高速湾曲流の数値解析を行い, 従来の研究との比較を行ったものである。得られた結論をまとめれば次のようになる。

(1) 円柱座標系での平面流れの基礎式をその特性曲線に沿った関係式に変換し, 固定格子点での差分式を用いた計算法を示した。

(2) 本研究の解析法と従来の研究で用いられている解析法との関係を明らかにした。特に座標変換により von Kármán の解析法との関係について詳細に検討した。

(3) 計算結果より流れを定性的に 3 種類に分類し, R/B と F_{r0} を用いて領域区分を試みた。さらに Lenau

の解との比較を行い, R/B が大きくなるに従い両者が一致してくることを示した。

(4) 最後に, 底面せん断応力を考慮する場合へも本研究での解析法が適用可能であることを示した。底面せん断応力を考慮した場合は, しない場合と比べて水面振動の振幅が小さくなっている。

参 考 文 献

- 1) Ippen, A. T. : Mechanics of supercritical flow, Trans. ASCE, 116, 1951.
- 2) Lenau, C. W. : Supercritical flow in bends of trapezoidal section, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., Vol. 105, No. EM 1, 1979.
- 3) 谷内俊弥・西原功修：非線形波動, 岩波書店, 1977.
- 4) 細田 尚・岩佐義朗・余越正一郎：水路湾曲部を通る高速流に関する数値解析, 第 29 回水理講演会論文集, 1985.
- 5) 岩佐義朗・井上和也・片山 猛：開水路非定常流の数値計算法について, 京大防災研究所年報 19 号 B-2, 1976.
- 6) Pedlosky, J. : Geophysical Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 1979.

(1987. 4. 20・受付)