

修正 $k-\epsilon$ 乱流モデルによる開水路乱流の数値計算

NUMERICAL CALCULATION OF TURBULENT OPEN-CHANNEL FLOWS BY USING A MODIFIED $k-\epsilon$ TURBULENCE MODEL

祢津家久*・中川博次**

By Iehisa NEZU and Hiroji NAKAGAWA

Numerical calculation techniques of turbulent shear flows are classified into two categories: one is $k-\epsilon$ turbulence model and the other is large eddy simulation (LES). The standard $k-\epsilon$ model has been established at present to predict turbulent structure in closed duct flows, while LES is being developed to predict coherent eddy structure in more simple duct flows. The standard $k-\epsilon$ model cannot be, however, applied to open channel surface flows, because the turbulence near the free surface is more depressed than the closed duct flows.

In the present study a new modified $k-\epsilon$ model is proposed to predict reasonably the turbulent structure in open channel flows with both of low and high Reynolds numbers. The numerical calculations indicate a splendid agreement with the experimental data which were obtained by making use of hot-film and Laser Doppler anemometers.

Keywords: open-channel turbulence, numerical calculation, free surface, $k-\epsilon$ model, turbulence model

1. 概 説

乱流の数値計算手法は現在次の2つに大別される。1つは渦動粘性モデルに基づきレイノルズ方程式を解く手法であるが、渦動粘性を既知量として与えるのではなく、乱れの輸送式を使って方程式系を閉じらせるものであり、代表例に $k-\epsilon$ モデルがある。もう1つの手法は Large Eddy Simulation (LES) であり、計算格子以上の渦を Navier-Stokes 方程式で解き、格子以下の渦を局所等方性理論を使ってモデル化するものである。LES は、パースティングなどの組織乱流をも計算できるから乱流計算には画期的な手法であるが、スーパーコンピュータを用いても数時間を要し、まだ工学的レベルに達していない¹⁾。一方、 $k-\epsilon$ モデルは1970年代に英国で開発され、比較的小計算量で管路流や境界層流さらにはより複雑な流れをも合理的に予測できるまでに発展し、係数等は標準値としてすでに確立されている²⁾。

1980年代には Rodi らのグループによって水理学の分野に $k-\epsilon$ モデルが適用され出した。開水路乱流への適用では自由水面の取り扱いが最大の課題である。Naot・

Rodi は³⁾、自由水面の存在によって鉛直方向の乱れ強度が管路流より減少するという中川・祢津ら⁴⁾の指摘に注目して、乱れエネルギーの再配分をモデル化し、開水路乱流の2次流を数値予測した。当時は、この計算予測値を検証する実験データは存在しなかったが、最近の祢津ら⁵⁾による高精度レーザー流速計を用いた実験により、少なくとも水路幅・水深比が2の場合の数値予測値は実験値とよく一致することが確認され、 $k-\epsilon$ モデルの有効性が立証された¹⁹⁾。最近、Celik・Rodi は⁶⁾、Naot・Rodi の自由水面による乱れ減衰効果のモデル化をより厳密に行い、二次元等流の乱流特性を数値計算した。しかし、標準型の $k-\epsilon$ モデルのモデル定数に加えて、さらに5個の新たな係数が必要であり、また、後述の c_u がレイノルズ数が大きくても管路流に比べて急減し、流体力学的に考えてこのモデルには改良を要する。

本研究は、自由水面による乱れの減衰効果を減衰係数を導入してモデル化し、また、河床近傍まで計算が可能ないように標準型 $k-\epsilon$ モデルを修正したものである。さらに、低レイノルズ数の場合や、非常に河床近くの粘性底層をも数値予測する場合には、Jones・Launder⁷⁾ の付加項を適用して本研究のモデルが拡張される。

以上の数値計算結果は、著者が長年にわたって発表してきた実験値を良好に説明することが示される。

* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学科
(〒606 京都市左京区吉田本町)

** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科 (同上)

2. 基礎方程式系

(1) 二次元開水路乱流場

これは次のレイノルズ方程式で支配される⁸⁾。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{u}v) + \nu \nabla^2 U \dots\dots\dots (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (-\bar{u}v) + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{v}^2) + \nu \nabla^2 V \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{連続式}) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 x 軸は流下方向、 y 軸は水路床に直角な鉛直上方の座標軸であり、 U, V はこれに対応する平均流速成分、 u, v は乱れ変動成分である。 P は平均圧力、 ν は動粘性係数、 θ は水路勾配の角度である。いま、

$$P \equiv \rho g(h-y) \cos \theta + P' \dots\dots\dots (4)$$

とおくと、 P' は静水圧分布からの偏差を表わし、式(2)から重力項が消去される。ここで、 h は水深である。

式(1)、(2)に現われるレイノルズ応力 \bar{u}^2, \bar{v}^2 および $-\bar{u}v$ が平均流速 (U, V) と何らかの形で関係づけられないと方程式系が閉じない。この方程式系の完結問題が乱流研究の最大の難問であり、渦動粘性モデルや混合距離モデルなどが提案されている。

(2) 渦動粘性モデル

このモデルはもともとブシネスクによって提案されたが、近年の乱流相似則から再検討され、次式のようにモデル化される。

$$\bar{u}_i \bar{u}_j = -\nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \dots\dots\dots (5)$$

$$\nu_t \equiv c_\mu \cdot k^2 / \epsilon \dots\dots\dots (6)$$

$$k \equiv \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 ν_t は渦動粘性係数、 k は乱れエネルギー、 ϵ は乱れの逸散率である。また、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。従来の渦動粘性モデルは、 ν_t を既知量として与え、方程式系(1)、(2)、(3)を閉じらせていたが、一般に ν_t を事前に予測することは困難で、このモデルが経験則の域を出なかった。一方、近代の乱流理論の成果として、式(6)の妥当性が提示された^{2), 19)}。

式(6)の c_μ は係数であるが、 k と ϵ は乱れの重要な特性値であり、この2つを新たに未知変数として乱れ特性値をも予測しようとするのがいわゆる $k-\epsilon$ モデルである。 k および ϵ 方程式は乱れの輸送式から導かれ、次節のように一般化される。

(3) 基礎方程式系の一般形

未知変数 U, V, P', k および ϵ に関する5個の偏微分方程式は次の同型の輸送式で書ける⁹⁾。

$$\frac{\partial}{\partial x} (\phi U - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi V - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}) = S_\phi \dots\dots (8)$$

ϕ は輸送される変数であり、 S_ϕ はこれに対応する外力項、 Γ は有効粘性係数であり、以下のように書き下せる。

$$\text{連続式: } \phi = 1, S_\phi = 0 \dots\dots\dots (9)$$

$$U \text{ 方程式: } \phi = U, \Gamma = \nu_t + \nu$$

$$S_u = g \left(\sin \theta - \frac{dh}{dx} \cos \theta \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P'}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma \frac{\partial V}{\partial x}) \dots\dots (10)$$

$$V \text{ 方程式: } \phi = V, \Gamma = \nu_t + \nu$$

$$S_v = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P'}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma \frac{\partial U}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma \frac{\partial V}{\partial y}) \dots\dots (11)$$

$$k \text{ 方程式: } \phi = k, \Gamma = \nu_t / \sigma_k \left. \begin{array}{l} S_k = G - (\epsilon + D) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$$\epsilon \text{ 方程式: } \phi = \epsilon, \Gamma = \nu_t / \sigma_\epsilon \left. \begin{array}{l} S_\epsilon = \frac{\epsilon}{k} (c_1 G - c_2 \epsilon) + E \end{array} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 G は乱れ発生率であり、次式で定義される。

$$G = \nu_t \left\{ 2 \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right\} \dots (14)$$

式(12)、(13)の D, E は次節で述べる標準型 $k-\epsilon$ モデルを粘性が効く $y=0$ まで拡張するとき導入される付加項である。すなわち、 $y=0$ で逸散率は物理的には有限値をとるが、 D, E を導入することによって $y=0$ の境界条件を $k=\epsilon=0$ とした簡便法である¹⁰⁾。 D, E の表示には現在多くのモデルが提案されているが¹⁰⁾、本研究では次の Jones・Launder モデル⁷⁾を採用する。

$$D = c_3 \nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2, E = c_4 \nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 c_3, c_4 は2程度のモデル定数である。なお、式(5)より厳密には S_u, S_v にそれぞれ $-\frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x}, -\frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial y}$ を加えなければならないが、 $\bar{u}_i \bar{u}_j$ を形式的に粘性応力と相似に表現するため、これらの項を省略した。すなわち、式(5)はレイノルズ応力のみ厳密に表現された。

3. 標準型 $k-\epsilon$ モデル

標準型 $k-\epsilon$ モデルは、壁面に最も近い計算の第1格子点を y_p とすると(以下 y_p に対応する値に添字 p をつける)、 $y_p^+ = y_p U_* / \nu$ (ここで、 U_* は摩擦速度)が50以上で適用される。このとき、乱れの発生率 G と逸散率はほぼ等しくなり、次の境界条件が得られる。

① 平均流速

$$\frac{U_p}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y_p^+ + A \dots\dots\dots (16)$$

ここで、開水路乱流では $\kappa=0.41$, $A=5.3$ である¹¹⁾。

② $y_p^+ \geq 50$ のとき, $G = \epsilon$ より

$$\frac{k_p}{U_*^2} = 1/\sqrt{c_\mu} = 3.33, \quad \epsilon_p = \frac{U_*^3}{\kappa y_p} \dots\dots\dots (17)$$

また、式 (12), (13) で現われるモデル定数はほぼ普遍値として次のように確立されている²⁾。

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3, \quad c_1 = 1.44, \quad c_2 = 1.92 \dots\dots\dots (18)$$

乱れレイノルズ数 $R_t = k^2/(\nu\epsilon)$ が十分大きいとき、式 (6) の c_μ は 0.09 で与えられる。

4. 修正 $k-\epsilon$ モデル

(1) 渦動粘性のモデル係数 c_μ

$k-\epsilon$ モデルが式 (6) の渦動粘性表示に立脚している以上、 c_μ の与え方が最も重要な点である。 $k-\epsilon$ モデルを壁面近傍まで拡張するには van Driest¹²⁾ が混合距離モデルに導入した粘性による減衰関数と同様な考え方を援用して、祢津らは⁹⁾次式を提案した。

$$c_\mu = 0.09(1 - D_1 \exp(-R_t/D_2)) \dots\dots\dots (19)$$

実験値との比較から $D_1=0.95$, $D_2=250$ が最も妥当であることが判明した⁹⁾。

(2) 自由水面による乱れの減衰効果のモデル化

標準型 $k-\epsilon$ モデルは、管路流の中央軸 ($y=h$) で乱れの対称条件すなわち $\frac{\partial k}{\partial y} = 0$ を使うが、開水路ではこの条件が適用できない。1. で述べたように、自由水面による乱れの減衰効果を考慮した水面条件を開発することが必要である。これが、Celik・Rodi の研究の動機となったが⁶⁾、高レイノルズ数 R_t でさえ、 c_μ が自由水面近くで急減し、物理的に疑問である。本研究は、自由水面の存在によって乱れエネルギーが管路流より減少するという特性に注目して以下のように定式化を行う。

管路流の対称軸上の乱れエネルギーを k_a とし、これと同一の水理条件下での開水路流の自由水面上での乱れエネルギーを k_w とする (以下、管路流は a , 開水路流

は w の添字をつける)。自由水面による乱れの減衰効果により、次式が成立する。

$$k_w = D_w \cdot k_a \dots\dots\dots (20)$$

D_w は減衰係数である。 D_w を理論的に決定することは現在困難であるが、

$$D_w = \left(\frac{u'_w}{u'_a}\right)^2 \left\{ \frac{1+(v'/u')^2_w+(w'/u')^2_w}{1+(v'/u')^2_a+(w'/u')^2_a} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

であり、管路の中央軸上で等方性すなわち、 $u'_a = v'_a = w'_a$ を仮定し、自由水面上では $u'_w \approx u'_a \approx w'_w$ および $v'_w \rightarrow 0$ を仮定すれば、

$$D_w \rightarrow 2/3 \dots\dots\dots (22)$$

となる。

次に、 k_w の減衰により、平均流速 U_w の境界条件も変化する。レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ は式 (1) に従うから乱れの減衰効果を受けない。したがって、次式が成立する。

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)_w = \frac{1}{\nu_t} (-\overline{uv})_a \dots\dots\dots (23)$$

実際の計算にあたっては、自由水面に最も近い格子点を y_w ととり、まず、同一の水理条件で管路流の計算を行い、 k_a を求め、次に式 (20), (23) を境界条件にして開水路流の計算を行えばよい。なお、 ϵ_w に乱れの減衰効果がどのように及ぶかは現在不明であり、本研究では $\partial\epsilon/\partial y|_{y_w=0} = 0$ の対称条件を用いた。

Fig. 1 は、自由水面による乱れの減衰効果を検討するために、減衰係数 D_w を 0.4 から 1.0 まで変化した場合の渦動粘性係数 ν_t を $\nu_t/(hU_*)$ の無次元で示すものであり、図の (a) が高精度レーザー流速計による Nezu・Rodi¹¹⁾ 等の実験値、図 (b) が計算値である。管路流では対称軸 $y/h=1$ において Hussain ら¹³⁾ の実験値にみられるように、 $\nu_t/(hU_*)$ はほぼ一定値となる。乱れの減衰がない、すなわち $D_w=1.0$ の場合の計算値はこの管路流の特性をよく説明する。一方、開水路乱流では自由水面に近づくとも $\nu_t/(hU_*)$ が減少することが大きな特徴であり、これは減衰係数 D_w を導入することでうまく説

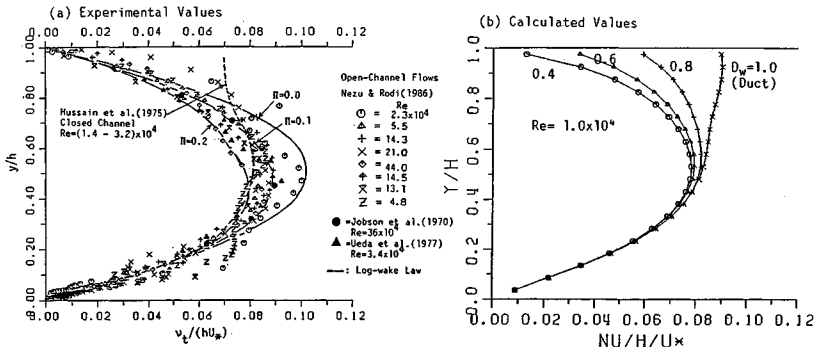


Fig. 1 Effect of free-surface damping factor on eddy viscosity.

明できる。自由水面近くの v_z の実験値は、実測された平均流速 U を数値微分して求めているため、それほど精度はよくないが¹¹⁾、本研究の乱流モデルと比較すると $D_w=0.4\sim 0.8$ の値に収まっているようである。

Fig. 2 は、平均流速 $U^+ \equiv U/U_*$ を $y^+ \equiv yU_*/\nu$ に対して図示したものである。図には、式 (16) の対数則分布、粘性による減衰関数を考慮した van Driest 曲線¹²⁾ および外部領域 ($y/h \geq 0.15$) でも適用される次の Log-Wake 則¹¹⁾ をそれぞれ併示した。

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + A + \frac{2\Pi}{\kappa} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{h}\right) \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 Π は Coles 係数であり、図には $\Pi=0.2$ の曲線が載せてある。 D_w が変化しても計算値にはそれほど大差はないが、 D_w が小さいほど自由水面近くで対数則からのずれは大きくなる。式 (24) の Log-Wake 則分布とは $D_w=0.8$ の計算結果が最もよく一致するようである。

Fig. 3 は、乱れエネルギー k に及ぼす減衰係数 D_w の影響を示すものである。図中の実線は、称津¹⁴⁾ による実験値に基づいた半理論曲線であり、次式で表示される。

$$\frac{k}{U_*^2} = 4.78 \exp(-2y/h) \dots\dots\dots (25)$$

式 (25) は、 $y^+ > 100$ あるいは $y/h > 0.15$ の外部領域で成立する。図から明らかに、 $D_w=0.8$ の場合が式 (25) と最も良好に一致することがわかる。

Fig. 4 は、乱れの逸散率 eh/U_*^3 の分布である。図中の実線は称津⁸⁾ による半理論曲線であり、式 (25) と平均渦径の分布特性から次式で求められ、後述するように実験値をよく表わしている。

$$\frac{eh}{U_*^3} = 9.76 \frac{\exp(-3y/h)}{\sqrt{y/h}} \dots\dots\dots (26)$$

式 (26) も $y/h > 0.15$ が適用範囲である。図に示すように、計算値と式 (26) との一致はよいが、特に、自由水面近くでの計算値は $D_w=0.8$ の場合が式 (26) と最もよく一致するようである。

以上のように、自由水面による乱れの減衰効果を検討した結果、減衰係数 D_w を $D_w=0.8$ と設定する場合は最も適当であると結論された。 $D_w=0.8$ は、式 (22) の $v_w \rightarrow 0$ とした限界値 $D_w=2/3$ より大きく、水理学的に考えても妥当な値といえる。以下では、 $D_w=0.8$ とおき、開水路乱流を数値計算した。

(3) 粘性底層内のモデル化

a) Jones・Launder の付加項

粘性底層内 ($y^+ \leq 30$) をも含む流れ全体を数値予測することは基礎水理学・流体力学では特に興味がある。これは、 $y^+ \leq 30$ ではバースティング現象が存在し、乱れの構造が非平衡となる領域であり、乱流特性が急激に

変化するからである⁸⁾。この場合、Jones・Launder の付加項、式 (15) を考慮して計算を行えばよい。計算結果は6. で示されるが、広範な実験値との比較検討によ

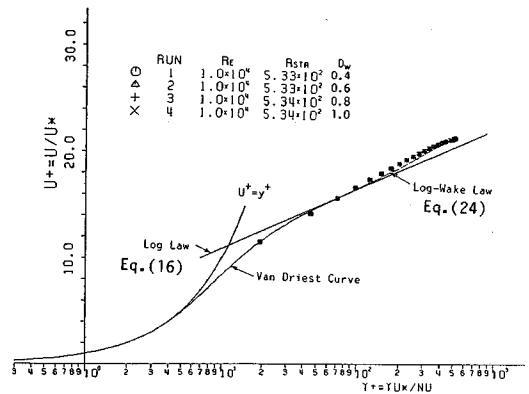


Fig. 2 Effect of free-surface damping factor on mean velocity distribution.

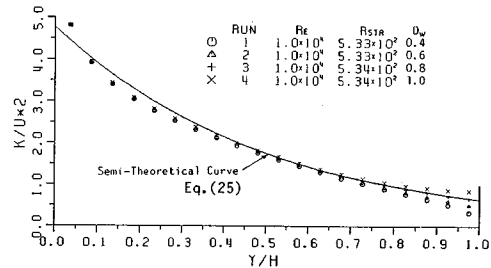


Fig. 3 Effect of free-surface damping factor on turbulent energy k/U_*^2 .

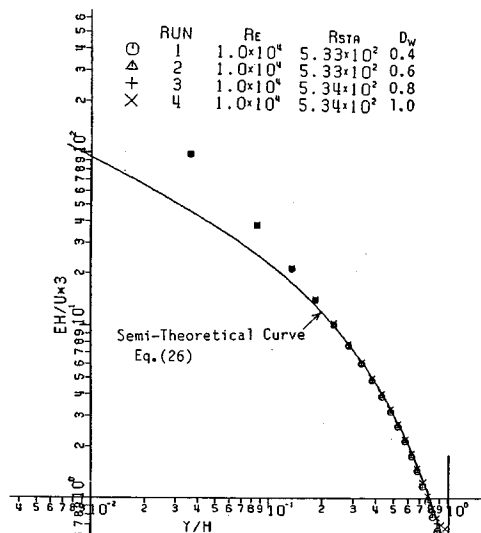


Fig. 4 Effect of free-surface damping factor on energy dissipation eh/U_*^3 .

り, $c_3=1.8$, $c_4=2.0$ が最も適合した.

b) 壁関数の拡張

上述したように, 粘性底層内では乱れ特性値は急変する. たとえば, k と ϵ は最大値をもつから, この特性値を数値計算するには内部領域 $\delta^+ \equiv \delta U^*/\nu \leq 100$ を非常に細かく細分する必要がある. レイノルズ数 $R_* \equiv hU^*/\nu$ が大きくなると, $\delta/h \leq 100/R_*$ は非常に小さくなり, その結果, 差分格子点数が急増し, 計算量が莫大となって工学的に得策ではない. これを解消するために, 乱れ特性値が急減少する限界点, 具体的にいえば, 乱れエネルギー k が最大値を示す $y_p^+ \approx 20$ を第 1 格子点を選んで, y_p^+ に壁関数を導入すればよい. 本研究では, 標準型の壁関数 ($y_p^+ \geq 50$ で適用される) を以下のように拡張した.

① 平均流速 U_p^+ は van Driest 関数で与える¹²⁾.

② 乱れは非平衡となり, $\alpha \equiv G_p/\epsilon_p > 1$ となるから, これと van Driest 関数を使うと次式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_p}{U_*^2} &= \frac{(1 - dU^+/dy^+)}{\sqrt{c_\mu}} \Big|_{y_p^+} \\ \epsilon_p &= \frac{c_\mu k^2}{\nu} \left(\frac{dU^+}{dy^+} \right) / \left(1 - \frac{dU^+}{dy^+} \right) \Big|_{y_p^+} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

式 (27) を使って係数 α が収束するようにすればよい. また, $dU^+/dy^+ \ll 1$, $\alpha = 1$ とおき, van Driest 関数の代わりに式 (16) の対数則を適用すると, 式 (27) は標準型の式 (17) に帰着される. Fig. 1 から Fig. 4 までのこれまでの計算結果は, $y_p^+ = 20$ として上述の壁関数を用いて得られたものである.

5. 高レイノルズ数の開水路乱流の数値計算結果

(1) 計算手法

本研究で開発された修正 k - ϵ モデルは不等流などにも適用可能であるが, ここでは実験結果の蓄積がある開水路等流の乱れを対象とした. まず, 高レイノルズ数を対象とした計算を行い, この水理条件を Table 1 に示す. 計算シリーズを HR と表示し, レイノルズ数 $Re = U_m h/\nu$ (ここで U_m は断面平均流速) は 2000 から 10^6 まで 6 通り変化させた. なお, フルード数 $Fr \equiv U_m/\sqrt{gh}$ を変化させても無次元乱流値には変化はなく, 本研究では,

$Fr = 0.43$ と一定においた. $y_p^+ \geq 20$ に第 1 格子点を選び, 4. の境界条件のもとで, Patankar らの SIMPLE アルゴリズム¹⁸⁾ をプログラムした TEACH コード¹⁵⁾ を使って式 (8) が計算された. x 方向に $\Delta x = h$ の刻み幅で 52 点, y 方向に 22 点の合計 1144 個のスタッガード格子点をとった. 初期断面 $x=0$ での値として対数則分布, k と ϵ は一様分布を用いた. 収束条件は, 式 (8) の外力項 S_p の残差が 0.1% 以内になるように繰り返し計算を行った. $x/h \geq 20$ で各種の乱流特性値はほぼ一定の分布に収束し, 本研究では $x/h = 42$ の位置を検査面として以下の分布を表示した. 鉛直方向の流速分布 V の境界条件は壁面および自由水面でゼロである. この計算結果では, V/U_m は 10^{-5} 程度, 圧力 $P'/(\rho U_m^2)$ は 10^{-4} 程度となり, 両者の分布ともほぼゼロであり, $V=0$ を最初から設定しなくても等流を計算でき, $V \neq 0$ の不等流や急変流にも適用可能なことが期待できる. なお, 計算の CPU 時間は各 Run とも約 1 分間以内であった.

(2) 平均流速分布

Fig. 5 は, 各 Run の平均流速分布の計算結果である. 図中には, buffer 層で成立する van Driest 曲線, 内部層での対数則および外部層で成立する式 (24) の Log-Wake 則を併示した. $y^+ \geq 20$ で buffer 層を含め, 実験値と計算値とは良好に一致している. 特に, $y/h > 0.15$ の外部領域では開水路乱流の平均流速は, 境界層や管路流と同様に, 厳密な意味において対数則からずれ, 式 (24) の Log-Wake 則を適用すべきであることが最近 Nezu・Rodi¹¹⁾ によって指摘されている. 本研究の計算値はこの対数則からのずれをよく説明している.

いま, 流れの抵抗則, すなわち摩擦速度を, 修正 k - ϵ モデルから計算されるものを U_* , 対数則から計算されるものを U_{*Log} , Log-Wake 則からのものを U_{*Wake} と表示して, Table 1 に比較した結果が示されている. Log-Wake 則からの計算値 U_{*Wake} は式 (24) を断面で積分して次式で与えられる.

$$\frac{U_m}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(U_* h/\nu) + \left(A - \frac{1}{\kappa} \right) + \frac{H}{\kappa} \dots\dots\dots (28)$$

対数則からの計算値は式 (28) の右辺第 3 項が無視されたものである.

Table 1 から明らかに, Run 1 の $Re = 2000$ を除き (以

Table 1 Hydraulic conditions for numerical calculations.

(a) High Reynolds-number Series

RUN	h (cm)	U_m (cm/s)	$Re \times 10^3$	Fr	R_*	U_* (cm/s)	$\frac{U_* - U_{*Log}}{U_{*Log}}$	$\frac{U_* - U_{*Wake}}{U_{*Wake}}$
HR-1	1.29	15.5	2	0.43	134	1.036	-0.9%	1.8%
HR-2	2.38	21.0	5	0.43	292	1.223	-2.6%	0.08%
HR-3	3.78	26.4	10	0.43	534	1.412	-2.9%	-0.14%
HR-4	11.06	45.2	50	0.43	2,249	2.033	-2.6%	-0.29%
HR-5	17.56	57.0	100	0.43	4,218	2.402	-2.3%	-0.08%
HR-6	81.52	122.7	1,000	0.43	34,545	4.238	-2.3%	-0.35%

(b) Low Reynolds-number Series

RUN	h (cm)	U_m (cm/s)	$Re \times 10^3$	Fr	R_*	U_* (cm/s)	$\frac{U_* - U_{*Log}}{U_{*Log}}$	$\frac{U_* - U_{*Wake}}{U_{*Wake}}$
LR-1	0.51	9.7	0.5	0.43	38	0.744	-8.8%	-12.1%
LR-2	0.82	12.3	1	0.43	66	0.812	-11.7%	-8.8%
LR-3	1.29	15.5	2	0.43	122	0.943	-9.9%	-7.3%
LR-4	2.38	21.0	5	0.43	274	1.149	-8.5%	-6.0%
LR-5	3.78	26.4	10	0.43	512	1.353	-6.9%	-4.3%
LR-6	11.06	45.2	50	0.43	2,221	2.008	-3.8%	-1.5%
LR-7	17.56	57.0	100	0.43	4,169	2.374	0.4%	-1.2%

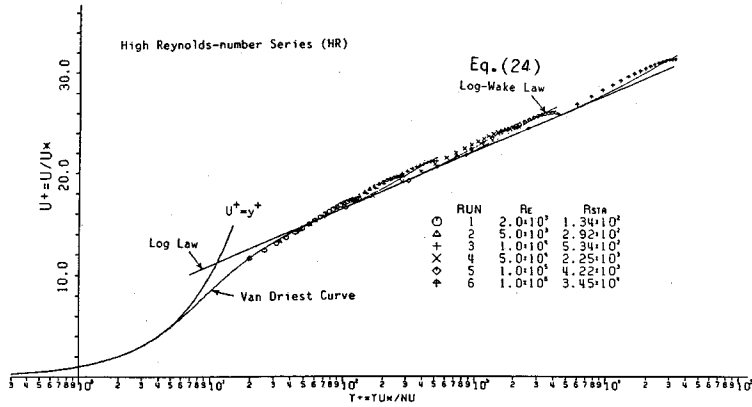


Fig. 5 Numerical results of mean velocity distributions at high Reynolds numbers (HR).

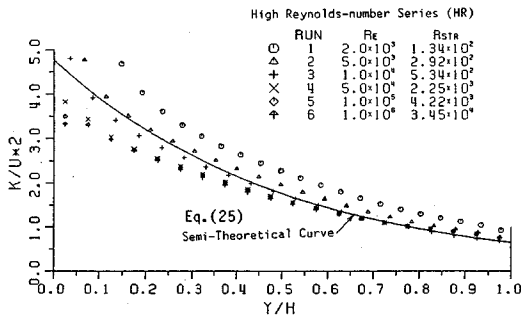


Fig. 6 Turbulent energy k/U_s^2 vs y/h at high Reynolds numbers.

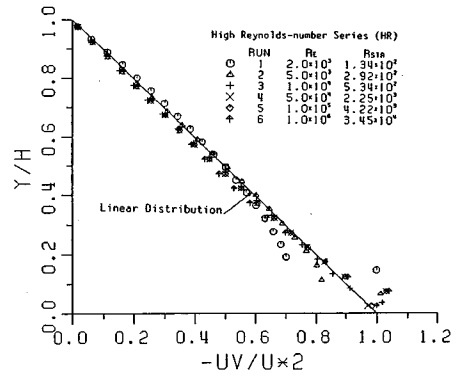


Fig. 7 Distribution of Reynolds stress $-\overline{uv}/U_s^2$.

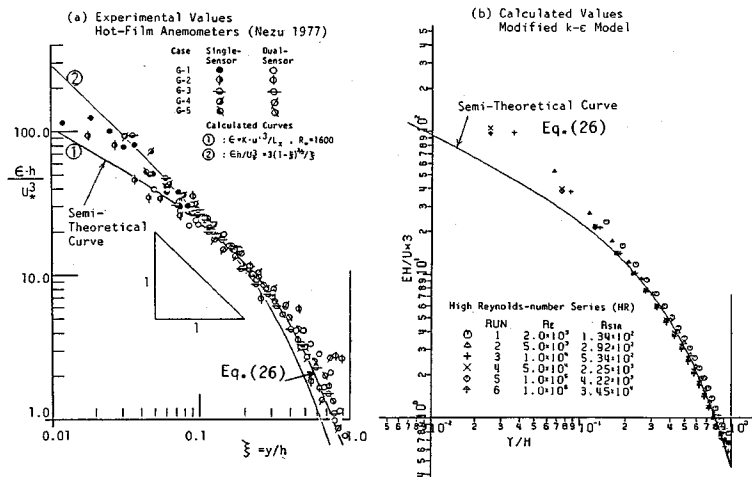


Fig. 8 Comparison of calculated values of energy dissipation with experimental data of Nezu (1977).

下でこの Re 数の結果は高レイノルズ数としての計算に大きな誤差が生じることが判明した), Log-Wake 則の式 (28) と修正 $k-\epsilon$ モデルから計算される U_* はほぼ 0.4% 以内で一致し, 十分に正確なことがわかる. Log 則からの値は 3% 以内で一致し, 流れの抵抗則の工学的な目的ではこれでもほぼ満足されると考える.

(3) 乱れエネルギーおよびレイノルズ応力

Fig. 6 は, 乱れエネルギー k の分布である. 図中の実線は式 (25) の半理論曲線であり, 10^4 程度の中程度の Re で成立する⁸⁾. $Re=2000$ の低レイノルズ数の計算値は式 (25) からかなりずれる. しかし, $R \geq 5000$ での中程度の Re では式 (25) との一致は良好である. Re が 10^5 以上の非常に高レイノルズ数になると, 本修正 $k-\epsilon$ モデルは標準型 $k-\epsilon$ モデルに漸近し, 式 (17) の $k_p/U_*^2=3.3$ が境界条件になる. このとき, 式 (28) の半理論曲線の実験係数も減少すると考えられるが, 現在のところ, このような高レイノルズ数の実験データはなく, 今後さらに検討したい.

Fig. 7 は, レイノルズ応力 $-\overline{uv}/U_*^2$ の分布を示すものである. $Re \geq 5000$ では計算値は良好に直線分布しており, 本モデルの整合性・妥当性が再確認される. 従来の $k-\epsilon$ モデルの計算では, $V=0$ と当初より設定して式 (8) を単純化した方程式を解くことが大半であったが, 本研究のように, この仮定を導入しなくても整合性よく, $-\overline{uv}$ および P が計算された意義は大きく, この修正 $k-\epsilon$ モデルが段落ち流れなどの急変流にも適用可能なものと考えられ, 今後各種の流れに適用する予定である. なお, $Re=2000$ で計算結果が直線分布からずれた理由は, $y_p^*=20$ が $y_p/h=0.15$ に相当し, 第 1 格子点での壁面近傍の流速勾配が正確に計算できなかったことに原因があり, この場合は, 6. の低レイノルズ数での計算

を適用しなければならないことがわかる.

(4) 乱れの逸散率および発生率

Fig. 9 は, 乱れ逸散率 eh/U_*^2 の計算値と祢津⁹⁾による実験値とを比較したものである. 実験値は, u 変動のスペクトル解析の慣性小領域の $-5/3$ 乗則から求められ, 式 (26) の半理論曲線が提案された⁸⁾. $Re=2000$ の計算値は, 式 (26) からやはりずれるが, $Re \geq 5000$ の高レイノルズ数では壁面近傍をも含めたほぼ全断面で計算値と実験値との一致は非常によく, 注目に値する.

次に, 乱れの発生率 G を式 (14) から計算し, $(G-\epsilon)/\epsilon$ の形で Fig. 9 に示した. G の実験値は, 祢津⁹⁾ が与えたホットフィルム流速計で計測された平均流速 U から差分して求められたものであり, 実験精度はそれほど高くない. 上述のように, $Re=2000$ のみ例外であるが, 他の Run では $0.1 \leq y/h \leq 0.6$ で $G \approx \epsilon$ のエネルギーの平衡状態となり, $y/h \geq 0.6$ で $\epsilon > G$ の自由水面領域になるという中川・祢津ら (1975)⁴⁾ がすでに提案している乱れエネルギーの平衡関係に基づいた開水路乱流の領域区分が妥当であることを数値計算上から裏づけたことの意義は大きい.

6. 低レイノルズ数の開水路乱流の数値計算結果

(1) 計算手法

計算手法は, 5. (1) と基本的には同じであるが, $y^+ < 100$ を細分するため, y 方向の刻み幅 Δy を等比級数的に増加させ, 合計 $52 \times 42 = 2148$ 個のスタッガード格子を設定した. Re は, 500 から 10^5 まで 7 通りに変化させ, その水理条件を LR シリーズとして Table 1 に示した. なお CPU 時間は各 Run ととも約 4 分間程度であった.

(2) 平均流速分布

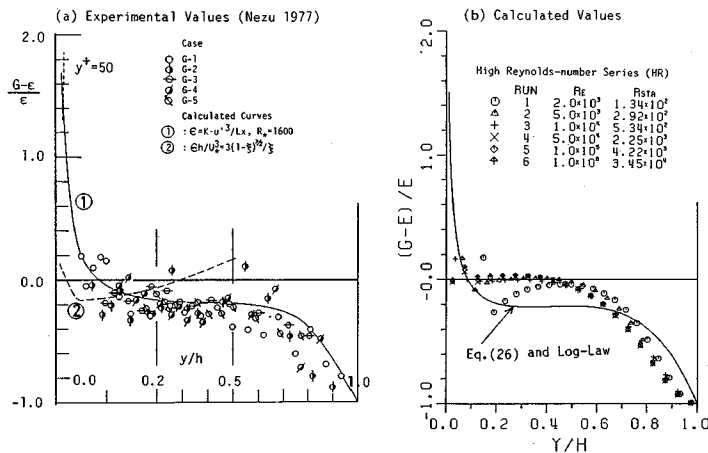


Fig. 9 Comparison of calculated values of generation-dissipation relations with experimental data.

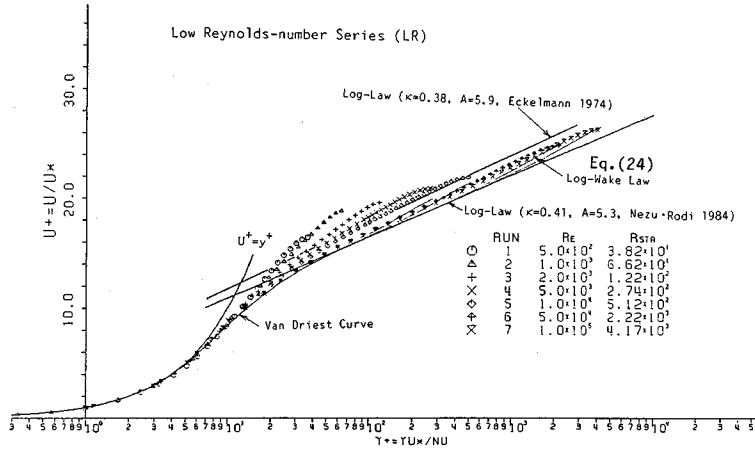


Fig. 10 Numerical results of mean velocity distributions at low Reynolds numbers (LR).

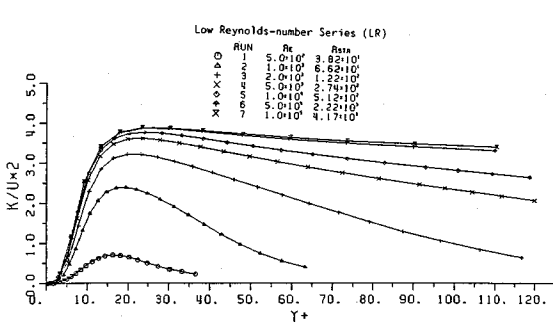


Fig. 11 Calculated distribution of turbulent energy in the wall region.

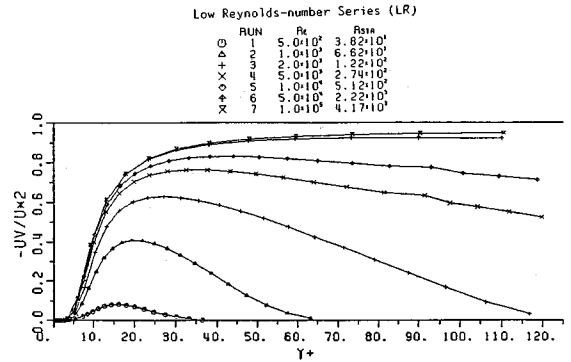


Fig. 12 Calculated distribution of Reynolds stress in the wall region.

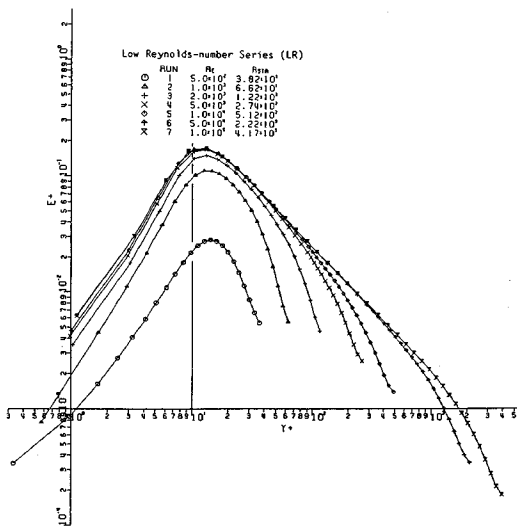


Fig. 13 Calculated distribution of dissipation in the wall region.

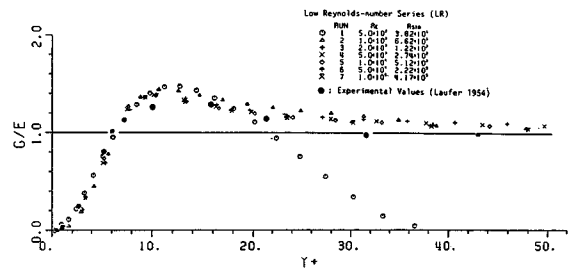


Fig. 14 Relation between turbulent generation and dissipation in the wall region.

Fig. 10 は、平均流速分布の計算結果である。 $y^+ < 10$ の粘性底層では van Driest 曲線や $U^+ = y^+$ 曲線に非常によく一致する。低レイノルズ数の開水路実験は、実験制御や計測が非常に困難であり、現在でも精度よいデータはない。ただ、Eckelmann (1974)¹⁶⁾ が油流を用いて動粘性係数 ν を上げ、ホットフィルム流速計で計測した結果 ($Re = 2800$ と 4100) があるのみである。彼は、 $y^+ \geq 30$ の実測値は $\kappa = 0.377$, $A = 5.9$ の式 (16) の対数則によく一致すると提案した。この実験での対数則を Fig. 10 に併示した。この実験値は、 $Re < 10^4$ で計算値と一致するようである。ここで問題となるのは、5. の高レイノルズ数の計算手法 (壁関数手法) で示された Fig. 5 と、低レイノルズ数の計算手法 (Jones・Launder の付加項の手法) から得られた Fig. 10 が同一の Re 数で必ずしも数値的に完全には一致しないことである。これは、両者で Δy の刻み幅が大きく異なるためと考えられ、乱流モデル自体に致命的な欠陥があるとは考えられない。なお、両者の誤差は Table 1 に示すように、 $Re = 10^4$ で 5% 以内である。

(3) 乱れエネルギーおよびレイノルズ応力分布

Fig. 11 は、乱れエネルギー k/U_*^2 を y^+ に対して図示した内部変数表示である。最も注目すべき点は、 $y^+ \approx 20$ で k は最大値を示し、 Re 数が大きいほど内部領域 ($y^+ \leq 100$) ではほぼ一定値になることがわかる。この最大値は $k/U_*^2 = 4$ であり、Laufer (1954) の実験値と同程度となる¹⁷⁾。第 2 に注目すべき点は、 Re 数が小さくなると、乱れエネルギーは摩擦速度すなわち壁面せん断応力に比べて小さくなり、 $Re = 500$ では k/U_*^2 の最大値は 0.7 となって、流れは層流的になることである。平均流速分布も Fig. 10 で示すように、van Driest 曲線からずれて、むしろ $U^+ = y^+$ の層流分布に近づくようである。また、Table 1 に示すように、 U_* は U_{*Log} や U_{*wake} からしだいにずれてくる。開水路乱流では $Re \approx 500$ が限界レイノルズ数であると経験的にいわれているが、本計算結果はこれを裏づける重要な内容であると考えられる。

Fig. 12 は、レイノルズ応力 $-\overline{uv}/U_*^2$ の分布である。 Re 数が大きくなると、 $-\overline{uv} \approx U_*^2$ となる一定せん断応力層が形成されることが従来より指摘されているが、本モデルはこの特性を非常に良好に示している。やはり、 $Re = 500$ になると、 $-\overline{uv}/U_*^2$ の最大値は、0.083 となり、レイノルズ応力は粘性応力の 1 割弱となるから、ほぼ層流的挙動といえる。

(4) 乱れの逸散率および発生率

Fig. 13 は、逸散率を内部変数表示、すなわち $\epsilon^+ = \epsilon\nu/U_*^3$ を y^+ に対して図示したものである。 ϵ^+ は $y^+ = 10 \sim 20$ で最大値を示し、 Re 数が大きくなると、 ϵ^+ は

y^+ に対して普遍特性を示す。この結果は、Laufer¹⁷⁾ の実験値と数値的によく一致する。しかし、 $y^+ < 5$ では逸散率の合計は、式 (12) に示すように $(\epsilon + D)$ となり、 $y^+ \rightarrow 0$ では一定値となる¹⁰⁾。現在、粘性底層内の ϵ の実測値はなく、今後の計算値との比較がまたれる。

最後に、Fig. 14 は、乱れの発生率 G と逸散率 ϵ との比 $\alpha = G/\epsilon$ を y^+ に対して図示したものである。Laufer の実験値も併示した。 $y^+ < 5$ の実験値の精度には検討を要するが、この実験値と計算値とは良好に一致し、注目に値する。 $y^+ \leq 6$ では $\epsilon > G$ となり、粘性底層はエネルギー逸散領域になる。 $y^+ > 6$ で $G > \epsilon$ となって、乱れが発生する機構がよくわかる。また、 $y^+ \geq 50$ では $G = \epsilon$ となり、乱れは平衡状態に達することがわかり、式 (17) で示された標準型の $k-\epsilon$ モデルの有効性が本モデルから立証される。さらに興味ある点は、 $Re = 500$ でも G/ϵ はほぼ同一の曲線上に乗り、乱流が層流化してもその構造自体は相似に変化するであろうことが予測され、実験値との比較検討が今後残された研究テーマである。

7. 結 論

本研究は、現在の乱流の数値計算手法に関して 2 大別される $k-\epsilon$ モデルと Large Eddy Simulation のうちで、前者の手法を詳述し、これを自由水面を有する開水路乱流の数値計算に適用できるように修正したものである。本研究では主に以下の点が開発された。

(1) 自由水面による乱れの減衰効果をモデル化したこと。

(2) 高レイノルズ数の場合には第 1 格子点 y_p^+ を 20 にとり、計算時間が短くなる壁関数を考案し、工学的手法としたこと。

(3) 低レイノルズ数の場合には $y^+ \leq 100$ の内部領域を細分化し、Jones・Launder の付加項を導入して $y = 0$ から計算可能としたこと。この計算時間は、(2) の手法よりかかるが、乱流特性値が急変する内部領域の乱流構造を的確に予測でき、基礎水理学や流体力学の発展に欠かせない手法にしたこと。

以上の乱流モデルを使って計算された結果は、著者らが 1975 年以来継続して行ってきた開水路実験のデータ (研究の初期ではホットフィルム流速計を、最近では高精度のレーザー流速計を用いて計測され、その都度、発表してきた実験値) と比較検討された。その結果、両者の一致は非常に良好であり、本研究で開水路乱流用に開発された修正 $k-\epsilon$ モデルはかなり合理的な計算手法であるものと結論される。

本乱流モデルは、逆流域を含む剝離流にも適用可能であり、今後、段落ち流れや河床波上の乱流構造さらには

粗面・移動床への流れへとこのモデルを適用していきたい。

最後に、本研究で用いられたコンピュータ・コードは前述したように Gosman (1985)¹⁵⁾らが開発した TEACH コードであり、これに関する有益な助言をいただいた名大プラズマ研究所の武本行正先生に謝意を表します。また、本研究は、昭和60～61年度の文部省科学研究費試験研究(代表・中川博次, No. 60850100)および一般研究C(祢津家久, No. 61550369)の援助を受けたことを記し、これに感謝する。

参 考 文 献

- 1) 小林敏雄・狩野正徳：Large-Eddy Simulationと二次元クエット乱流の数値解析，生産研究，第38巻，東大生産技術研究所，pp.8～14，1986.
- 2) Rodi, W. : Turbulence Models and Their Application in Hydraulics, IAHR, Delft, 1980.
- 3) Naot, D. and Rodi, W. : Calculation of Secondary Currents in Channel Flow, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol. 108, HY-8, pp. 948～968, 1982.
- 4) Nakagawa, H., Nezu, I. and Ueda, H. : Turbulence of Open Channel Flow over Smooth and Rough Beds, Proc. JSCE, No. 241, pp. 155～168, 1975.
- 5) 祢津家久・中川博次：一様開水路および閉管路の三次元乱流構造に関する研究，土木学会論文集，第369号，II-5, pp. 89～98, 1986.
- 6) Celik, I. and Rodi, W. : Simulation of Free-Surface Effects in Turbulent Channel Flows, Physico-Chemical Hydrodynamics, Vol. 5, pp. 217～227, 1984.
- 7) Jones, W. P. and Launder, B. E. : The Calculation of Low-Reynolds-Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 16, pp. 1119～1130, 1973.
- 8) 祢津家久：開水路流の乱流構造に関する基礎的研究，京都大学学位論文，1977.
- 9) 祢津家久・中川博次：自由水面を考慮した開水路乱流の数値計算手法，京大防災研究所年報，第29号B-2, pp. 647～673, 1986.
- 10) Patel, V. C., Rodi, W. and Scheuerer, G. : Turbulence Model for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows : A Review, AIAA J., pp. 1308～1319, 1985.
- 11) Nezu, I. and Rodi, W. : Open-Channel Flow Measurements with a Laser Doppler Anemometer, J. Hydraulic Eng., ASCE, Vol. 112, pp. 335～355, 1986.
- 12) van Driest, E. R. : On Turbulent Flow Near a Wall, J. Aeron. Sci., Vol. 23, pp. 1007～1011, 1956.
- 13) Hussain, A. K. M. F. and Reynolds, W. C. : Measurements in Fully Developed Turbulent Channel Flow, J. Fluids Eng., ASME, Vol. 97, pp. 568～580, 1975.
- 14) 祢津家久：開水路乱流の乱れ強度に関する研究，土木学会論文報告集，第261号，pp. 67～76, 1977.
- 15) Gosman, A. D., Launder, B. E. and Reece, G. J. : Computer-Aided Engineering ; Heat Transfer and Fluid Flow, John Wiley & Sons, 1985.
- 16) Eckelmann, H. : The Structure of the Viscous Sublayer and the Adjacent Wall Region in a Turbulent Channel Flow, J. Fluid Mech., Vol. 65, pp. 439～459, 1974.
- 17) Laufer, J. : The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow, NACA, TR-1174, 1954.
- 18) Patankar, S. V. (水谷・香月(訳))：コンピュータによる熱移動と流れの数値解析，森北出版，1985.
- 19) Rodi, W. : Use of Advanced Turbulence Models for Calculating the Flow and Pollutant Spreading in Rivers, 3rd Int. Symp. River Sedim., Univ. of Mississippi, pp. 1369～1382, 1986.

(1987.2.3・受付)