

粘弾性平行多層地盤の調和 SV 波動応答

RESPONSES OF VISCOELASTIC HORIZONTAL MULTILAYERS TO
HARMONIC SV WAVE

佐藤 誠*

By Makoto SATOH

In order to consider the effects of viscoelastic properties of horizontal multilayers for frequency response functions to incident P or SV plane harmonic waves at an arbitrary angles, loss factor Q^{-1} as attenuation factor and generalized Snell's law which were applied to inhomogeneous wave propagation, were introduced into well-known Haskell type matrix.

In the present paper, the formulation is exact in that no low-loss approximations are made. Quantitative estimates for the characteristics of frequency response functions of both directions of horizontal and vertical motion for inhomogeneous waves to practical subsoil layers were derived, and compared with those of elastic layers and those of some special case of viscoelastic layers.

Keywords : inhomogeneous wave, viscoelastic wave, viscoelastic multilayer, wave propagation, frequency response

1. 緒 言

弾性波を対象にし、任意角度で平面 SV 波が入射した場合の、平行多層地盤の応答解析法は実用化の段階にある。しかし弾性地盤としての解析では、弾性波の臨界角を越えるような特別な入射角に対しては非均質波としての境界波が発生し、地表においては水平動、上下動ともにきわめて大きな応答が発生することが指摘され、また地盤の卓越振動数として考えられている振動数より高次の振動数で大きな応答を示す結果が多いことも示された¹⁾。

したがって弾性波解析で得られた結果をそのまま設計に用いることには無理があるが、現在 SV 波が任意角度で入射する場合に対して、実地盤の特性を忠実に反映させた応答解析法として十分信頼できるものは少ない。

合理的な実地盤応答を得るには、波動挙動を支配する地盤の動特性を把握するとともにその動特性を考慮できる解析法を確立する必要がある。

ここでは実地盤の動特性のうち粘弾性性質を考慮した解析のために、よく知られている弾性平行多層地盤の応答解析法、たとえば著者が発表した弾性調和 SV 波応答

解析の方法¹⁾を、粘弾性波に適用できるように拡張して用い、上記の諸結果について検討を加えることを目的とする。

一般に線形粘弾性地盤においては、基盤に均質波が入射しても非均質波が発生し、わずかな粘性減衰性に対しても、弾性波とはきわめて異なった一般波としての応答を示す場合がある。

地盤の内部摩擦による粘性減衰特性は、実際の状態に対して特定し難いものであるが、ここでは、地盤振動においてしばしば用いられるように、一般に Q 値とよばれている粘性パラメータを振動数に依存しないものとして採用し解析を行った。

これらの仮定を用いた非均質粘弾性境界をもつ媒体内の波動挙動については W. Ewing²⁾, H. Cooper, Jr. & E. Reiss³⁾, H. Cooper, Jr.⁴⁾, M. Schoenberg⁵⁾, P. Buchen⁶⁾, R. Borchardt⁷⁾らが基礎的研究を行っている。これらの文献では、非均質波の伝播においては一般に粒子運動が楕円となることが証明され、また Q 値といわゆる伝播ベクトルと減衰ベクトルとの関係が示されている。

R. Borchardt⁸⁾は主として SH 波入射に対する粘弾性波応答を解析し、臨界角などの特性を詳しく述べている。また E. Krebs⁹⁾も SH 波入射時の非均質波について、

* 正会員 工修 広島大学工学部講師 第四類 (建設系)
(〒724 広島市西条町大字下見)

特別な層構成の場合に対する透過，反射係数を導いている。

R. Borchardt¹⁰⁾, P.G. Richards¹²⁾, L. Wennerberg¹³⁾はP波およびSV波入射時の非均質波の挙動を一般波の観点から論じ，一般化されたSnellの法則と臨界角などについて詳細に述べている。

粘弾性平行多層地盤に対してP波およびSV波が任意角度で入射する場合についての応答はW. Silva¹⁴⁾によって解析され，いくつかの実際の地盤例に対する応答関数が求められている。しかしここでは基盤を弾性体と仮定しており，これは非均質波伝播においては減衰ベクトルが常に層境界に垂直であるという特別な場合であり，一般波に対する一般化されたSnellの法則がきわめて簡単な形になる場合である。したがってその意味で一般的な非均質波の応答解析とは異なると考えられる。

井藤¹⁵⁾は3要素粘弾性モデルの多層地盤に，SH波が垂直に入射する場合の応答を解析し，粘性係数と振動数伝達関数の関係を検討している。

本論文では前述した一般波を対象にして，非均質波伝播の観点から，均質平面SV波が平行多層地盤の基盤に任意角度で入射した場合の調和粘弾性波動を，複素弾性定数とQ値の関係を用い，調和弾性波動応答解析において用いたのと同じ方法¹⁾で解析し，振動数応答関数と波動伝播特性を明らかにする。なおここでは粘性パラメーターに $Q^{-1} \ll 1$ の仮定を用いない。

2. 線形粘弾性波動

(1) 粘弾性調和波

均質等方線形粘弾性体内の微小振幅の平面波を考える。デカルトテンソルの表示を用いると， u_j を変位ベクトル， σ_{jk} を応力テンソル， ϵ_{jk} をひずみテンソル， ρ を密度また $\bar{\lambda}$ および $\bar{\mu}$ をLaméの定数 λ および μ に対応する複素弾性定数として，物体力を無視するとき，運動方程式は

$$\sigma_{jkk} = \rho \ddot{u}_j \dots \dots \dots (1)$$

となる。ここに小文字の下添字は1, 2, 3の値を取り，添字の間の \cdot はデカルトテンソル表示に通常用いられる偏微分オペレーターである。また $\ddot{\cdot}$ は時間 t に関する2階微分を表わす。

ひずみと変位の関係は

$$\epsilon_{jk} = (u_{j,k} + u_{k,j})/2 \dots \dots \dots (2)$$

構成関係式は

$$\sigma_{jk} = \bar{\lambda} \delta_{jk} \epsilon_{hh} + 2 \bar{\mu} \epsilon_{jk} \dots \dots \dots (3)$$

と書ける。ここに δ_{jk} はクロネッカーのデルタである。

いま実数の円振動数 ω をもつ調和項 $\exp(-i\omega t)$ ， $i = \sqrt{-1}$ の調和波を考え， U_j を空間座標の複素関数として変位を

$$u_j(x, t) = U_j(x) \exp(-i\omega t) \dots \dots \dots (4)$$

とする。ここに x は位置ベクトルである。

このとき運動方程式(1)は次式となる。

$$\bar{\mu} U_{j,kk} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) U_{k,jk} + \rho \omega^2 U_j = 0 \dots \dots \dots (5)$$

一方変位場と粒子速度場の関係から， v を粒子速度ベクトルとして，

$$v = \dot{u} \equiv V(x) \exp(-i\omega t) \dots \dots \dots (6)$$

とすれば，一般に V はスカラーポテンシャル Φ とベクトルポテンシャル Ψ を用いて，

$$V = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi \dots \dots \dots (7)$$

と書ける。ここに ∇ はハミルトンの演算子， \times はベクトル積を表わし， $V = -i\omega U$ または $U = iV/\omega$ である。

式(7)の左辺を変位成分で表わして式(5)に代入すると，式(5)は2つのポテンシャル Φ ， Ψ がHelmholtzの方程式

$$\Phi_{,jj} + \bar{k}_L^2 \Phi = 0, \quad \Psi_{,jj} + \bar{k}_T^2 \Psi_k = 0 \dots \dots \dots (8)$$

を満たすとき満足される。ここに \bar{k}_L ， \bar{k}_T はそれぞれ縦波(P波)および横波(S波)に対する伝播方向の複素波数ベクトルで， $\bar{k}_Z^2 = \bar{k}_Z \cdot \bar{k}_Z$ である。ただし \cdot はベクトルの内積を表わし，以下では下添字 Z は縦波および横波に対してそれぞれ L ， T をとるものとする。

これらは複素縦波速度 $\bar{C}_L = \sqrt{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})/\rho} \equiv \sqrt{\bar{M}_L/\rho}$ と複素横波速度 $\bar{C}_T = \sqrt{\bar{\mu}/\rho} \equiv \sqrt{\bar{M}_T/\rho}$ を用いると，次式で表わせる。

$$\bar{k}_Z^2 = \omega^2 / \bar{C}_Z^2 = \rho \omega^2 / \bar{M}_Z \dots \dots \dots (9)$$

ここに \bar{M}_Z は複素速度に対応する複素弾性定数である。

式(8)の平面波に対する一般解はたとえば $\bar{\phi}$ ， $\bar{\psi}$ を複素定数として

$$\Phi = \bar{\phi} \exp(i\bar{k}_L \cdot x), \quad \Psi = \bar{\psi} \exp(i\bar{k}_T \cdot x) \dots \dots \dots (10)$$

の形で書ける。

以下では P_Z ， A_Z をそれぞれ \bar{k}_Z の実部と虚部とする。このとき

$$\bar{k}_Z = P_Z + iA_Z \dots \dots \dots (11)$$

と書け，式(10)は次式となる。

$$\Phi = \bar{\phi} \exp(-A_L \cdot x) \exp(iP_L \cdot x) \dots \dots \dots (12 \cdot a)$$

$$\Psi = \bar{\psi} \exp(-A_T \cdot x) \exp(iP_T \cdot x) \dots \dots \dots (12 \cdot b)$$

したがって縦波および横波の粒子速度ベクトル V_L と V_T はそれぞれ以下となる。

$$V_L = \bar{\phi} (-A_L + iP_L) \exp(-A_L \cdot x) \exp(iP_L \cdot x - i\omega t) \dots \dots \dots (13 \cdot a)$$

$$V_T = -\bar{\psi} \times (-A_T + iP_T) \exp(-A_T \cdot x) \exp(iP_T \cdot x - i\omega t) \dots \dots \dots (13 \cdot b)$$

(2) 一般波と非均質波

式(9)と式(11)から複素波数ベクトル \bar{k}_Z の実部と虚部の関係は，

$$\text{Re}(\bar{k}_Z^2) = P_Z \cdot P_Z - A_Z \cdot A_Z \dots \dots \dots (14 \cdot a)$$

$$\text{Im}(\bar{k}_Z^2) = 2 P_Z \cdot A_Z = 2 |P_Z| |A_Z| \cos \zeta_Z \dots \dots \dots (14 \cdot b)$$

となる。ここに Re および Im はそれぞれ実部と虚部を表わし、 ζ は波数ベクトルの実部のベクトル \mathbf{P} と虚部のベクトル \mathbf{A} のなす角度で、減衰角または波動の非均質度とよばれる。式 (14) から、波数ベクトルの実部と虚部はそれぞれ

$$|\mathbf{P}_z|^2 = [\text{Re}(\bar{k}_z^2) + \{[\text{Re}(\bar{k}_z^2)]^2 + [\text{Im}(\bar{k}_z^2)]^2 \cos^2 \zeta\}^{1/2}] / 2, \dots\dots\dots (15 \cdot a)$$

$$|\mathbf{A}_z| = -\text{Im}(\bar{k}_z^2) / 2 |\mathbf{P}_z| \cos \zeta, \dots\dots\dots (15 \cdot b)$$

である。

\mathbf{P} は縦波または横波が同一位相をもつ波面に垂直なベクトルで伝播ベクトルとよばれる。一方 \mathbf{A} は縦波または横波の伝播において振幅が一定であるように選んだ波面に対して垂直なベクトルで、最大の減衰方向に一致しており、減衰ベクトルとよばれる。また減衰角 ζ は伝播ベクトルの方向に振幅が増加しないという物理的要請から $0 \leq \zeta \leq \pi/2$ でなければならない。

伝播ベクトルと減衰ベクトルの方向が一致していない波 ($\zeta \neq 0$) は非均質波、一致している波 ($\zeta = 0$) は均質波とよばれ、両者をまとめて一般波とよばれる。

弾性波では非均質境界での反射または透過において減衰ベクトルが 0 であるか、境界への入射角が臨界角を越えたとき減衰角が $\zeta = \pi/2$ である非均質波のみが存在し得る。しかし粘弾性波では $\zeta = \pi/2$ となることはない。また弾性境界波の粒子運動の軌跡が楕円であるように、非均質波のそれは常に楕円である⁷⁾。

(3) 粘性パラメーター Q 値

構成関係式 (3) は複素弾性定数で表現したが、ここでは地盤振動において一般に採用される粘性パラメーター Q 値と複素弾性定数の関係を定める。

Q 値は通常以下のように Q^{-1} (以下では Q' と表わすこともある) として定義される¹⁶⁾。

$$Q^{-1} \equiv Q' = -\Delta E / 2\pi(\text{PED}) \dots\dots\dots (16)$$

ここに ΔE は 1 サイクル当たり、単位体積当たりのエネルギー損失であり、PED は 1 サイクル中に蓄えられる最大ポテンシャルエネルギー密度である。

式 (16) の定義から Lamé の定数に対応する複素弾性定数を、実部と虚部にそれぞれ添字 R と I を付けて

$$\bar{\lambda} = \lambda^R + i\lambda^I, \quad \bar{\mu} = \mu^R + i\mu^I \dots\dots\dots (17)$$

とすると、均質波としての縦波と横波に対する Q'_{nz} と複素弾性定数および複素波数の関係はそれぞれ以下のように与えられる。

$$Q'_{nz} = -(\lambda^R + 2\mu^R) / (\lambda^R + 2\mu^R) \equiv -M'_I / M'_R \\ = \text{Im}(\bar{k}_z^2) / \text{Re}(\bar{k}_z^2), \dots\dots\dots (18 \cdot a)$$

$$Q'_{tr} = -\mu^I / \mu^R \equiv -M'_I / M'_R = \text{Im}(\bar{k}_T^2) / \text{Re}(\bar{k}_T^2) \dots\dots\dots (18 \cdot b)$$

一方非均質波に対する Q^{-1} を Q'_{nz} とすると式 (18) を用いて以下のように与えられる。

$$Q'_{nz} = Q'_{nz} [1 + 2(Q'_{tr} / Q'_{nz}) H_z] / (1 + H_z), \dots\dots\dots (19 \cdot a)$$

ここに、

$$H_z = (Q'^2_{nz} / x^2_T) (C'^2_{tr} / C'^2_{nz}) \{ (1 + \chi_T) / (1 + \chi_z) \} \tan^2 \zeta, \dots\dots\dots (19 \cdot b)$$

$$C'^2_{nz} = (M'_R / \rho) [2(1 + Q'^2_{nz}) / S_z], \dots\dots\dots (19 \cdot c)$$

$$\chi_z = (1 + Q'^2_{nz} \sec^2 \zeta)^{1/2}, \dots\dots\dots (19 \cdot d)$$

$$S_z = 1 + (1 + Q'^2_{nz})^{1/2}, \dots\dots\dots (19 \cdot e)$$

であり、 C_{nz} は均質波の位相速度である。

弾性体では $Q^{-1} = 0$ であり、式 (19 \cdot c) からそのとき M'_R すなわち複素弾性定数の実部を、対応する弾性定数とすると C_{nz} は弾性波の伝播速度 (C'^2_{nz}) となる。

式 (19) から明らかなように、同じ地盤であっても均質波と非均質波に対する Q^{-1} は非均質度 ζ によって異なり、それに伴い地盤の応答が異なる。一方 ζ は後述する一般化された Snell の法則により定まり、基盤への入射角に依存する。

均質波または非均質波に対する Q^{-1} が与えられると、それぞれの波動に対する複素波数、複素弾性定数および複素伝播速度は、 $Q^{-1} < 1$ を仮定せずそれぞれ以下のように求められる。

$$\bar{k}_z = (\omega^2 / C'^2_{nz}) (2 / S_z) (1 + iQ_z), \dots\dots\dots (20 \cdot a)$$

$$\bar{k}_z = (\omega / C_{nz}) (1 + iQ'_z / S_z), \dots\dots\dots (20 \cdot b)$$

$$(|\mathbf{P}_z|, |\mathbf{A}_z|) = (\omega / C_{nz}) \{ (1 + \chi_z) / S_z \}^{1/2}, \dots\dots\dots (20 \cdot c)$$

$$\bar{M}_z = M'_R + iM'_I = M'_R (1 - iQ'_z) \\ = \rho C'^2_{nz} [S_z / 2 (1 + Q'^2_z)] (1 - iQ'_z), \dots\dots\dots (20 \cdot d)$$

$$\bar{C}_z = C'_z + iC'_I = \sqrt{\bar{M}_z / \rho} \\ = [C_{nz} S_z / 2 \sqrt{1 + Q'^2_z}] (1 - iQ'_z / S_z) \dots\dots\dots (20 \cdot e)$$

ただし式 (20 \cdot c) の複号の正と負はそれぞれ $|\mathbf{P}|$ と $|\mathbf{A}|$ に対応する。また複素数の平方根はすべて主値を取るものとする。

均質波に対する Q 値は一般に振動数 ω の関数であるが、地震に含まれる振動数の範囲ではほぼ一定と考えてよいとされているので、ここでは振動数に依存しないとす。また Q'_I と Q'_R が独立に推定できない場合にも両者の関係式がいくつか提案されている¹⁷⁾。

(4) 一般波に対する一般化された Snell の法則

平行多層地盤における一般波に対する Snell の法則は、弾性波の場合と同様に全層境界で波数ベクトルの層境界方向の成分が常に等しいという要請から、一般化された Snell の法則として得られる。いま Fig. 1 に示すように層境界方向を x 軸、地表から内部に向かって z 軸をとり、基盤を第 $n+1$ 層とする多層地盤を考える。Fig. 1 は境界 (m) に入射する非均質波動のうち、非均質横波に対するすべての散乱波の一般的状态を示している。

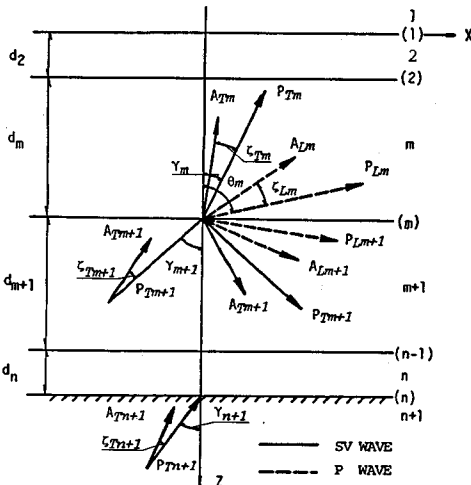


Fig. 1 Multilayer Model and Inhomogeneous Wave Field.

第 m 層の縦波と横波の伝播ベクトルの z 軸からの角度をそれぞれ θ_m と γ_m とすると、Fig. 1 から明らかなように、波数の x 方向成分を添え字 x で示せば、式 (11) を考慮して $m=2 \sim n$ の任意の値に対して次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{k}_{zx,1} &= \bar{k}_{zx,m} = P_{Lm} \sin \theta_m + iA_{Lm} \sin (\theta_m - \zeta_{Lm}) \\ &= P_{Tm} \sin \gamma_m + iA_{Tm} \sin (\gamma_m - \zeta_{Tm}) \\ &= \bar{k}_{zx,n+1} = \bar{k}_{zm} \sin \xi_{zm} \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

ただしここで Z は層番号にかかわらず L と T のどちらでも任意に選べる。また最後の表現は形式的に弾性波の場合と同じ形に書いたもので、 ξ_z は各境界での縦波または横波の透過、反射角であり、一般に複素数である。

実用形での一般化された Snell の法則は、式 (22) を実部と虚部に分けて、 $m=1 \sim n$ の任意の値に対して以下の連立方程式となる。この点で弾性波の場合と実際計算上で異なる。

$$\begin{aligned} P_{Lm} \sin \theta_m &= P_{Tm} \sin \gamma_m = P_{Ln+1} \sin \theta_{n+1} \\ &= P_{Tn+1} \sin \gamma_{n+1}, \dots \dots \dots (22 \cdot a) \\ A_{Lm} \sin (\theta_m - \zeta_{Lm}) &= A_{Tm} \sin (\gamma_m - \zeta_{Tm}) \\ &= A_{Ln+1} \sin (\theta_{n+1} - \zeta_{Ln+1}) \\ &= A_{Tn+1} \sin (\gamma_{n+1} - \zeta_{Tn+1}). \dots \dots (22 \cdot b) \end{aligned}$$

いま基盤である第 $n+1$ 層への入射波が均質波であれば、 $\zeta_{zn+1}=0$ であり、 \bar{k}_{zn+1} として均質波のそれを用いることができる。また基盤が弾性体であれば、 $A_{zn+1}=0$ であるから、式 (22) から $\zeta_{Lj}=\theta_j$ 、 $\zeta_{Tj}=\gamma_j$ ($j=1 \sim n$) となり、基盤より上部の全層で縦波と横波の減衰ベクトルは常に z 軸に平行になる。したがってこの場合は Snell の法則として式 (22・a) のみを適用すればよい。これは非均質波として特別な状態であるが、Silva¹⁴⁾ はこの仮定で応答を求めている。

この場合各層の ζ は右辺にその層の値を用いるものとして、以下のように陽に求められる。

$$\sin^2 \xi_z = [(1+B) + \sqrt{(1+Q_{2H}^2) + B^2 - 2B} / |2 - (2B)^{-1} Q_{2H}^2|] \dots \dots \dots (23)$$

ここに、 $B = p_{n+1}^2 C_{2H}^2 S_z / 2$ であり、 ξ_{zn+1} を基盤面への入射角として $p_{n+1} = \sin \xi_{zn+1} \bar{C}_{zn+1}$ である。

一方、一般波の場合は基盤入射波の入射角 ξ_{zn+1} と減衰角 ζ_{zn+1} ($\zeta_{zn+1}=0$ を含む) が与えられたとして、式 (22) を三角関数を含んだまま連立して解かなければならず、 ζ は陽に求められない。

粘弾性地盤においては基盤への入射波が均質波であっても、式 (22) から明らかなように入射波と同種の反射波のみが均質波で、上層には非均質波が伝播する。しかし SH 波が入射する場合には特別な層定数の比に対して透過波も均質波となることがある。

(5) 一般波に対する臨界角

一般波の臨界角は、“入射波と同種の反射波以外の散乱波の伝播ベクトルが境界に平行になる場合の入射角”として定義される。弾性波動では臨界角は必ず存在し、いったん臨界角に達するとそれ以上の角度はすべて臨界角である。しかし粘弾性波動においては臨界角は特定の角度でしか存在しないし、縦波と横波に対する Q^{-1} の比により、臨界角が存在しない場合がある。

SV 波入射を考えた弾性波動解析では入射角が増加するとき、多くの地盤では最初に基盤面での反射 P 波に対して臨界角に達する。しかし粘弾性基盤ではたとえば均質 SV 波が入射した場合の反射 P 波に対する臨界角 γ_c は $Q'_{HT} \leq Q'_{HL}$ のとき次式で与えられる⁷⁾。

$$\sin^2 \gamma_c = (C_{Tn}^2 / C_{Ln}^2) \{ (1 + Q_{HT}^2) / (1 + Q_{HL}^2) \} (Q'_{HL} / Q'_{HT}) \dots \dots \dots (24)$$

式 (24) の右辺の最後の () は γ_c に対して Q'_{HL} と Q'_{HT} のコントラストが支配的であることを示す。基盤上の各層に対しても Q'_{HL} をその層の値として同じ関係が成立し、粘弾性地盤では基盤が最初に臨界角に達するとは限らない。

一方 $Q'_{HT} > Q'_{HL}$ のとき入射角の増加とともに反射角 θ は限りなく $\pi/2$ に近づくが臨界角は存在しない。しかも後者の場合には減衰ベクトルが z 軸の負方向 (地表方向) を向く¹⁸⁾。このことは反射 P 波の寄与として基盤から下方に向かって振幅が増加することを意味する。

一般の地盤では $Q'_{HT} \leq Q'_{HL}$ より $Q'_{HT} > Q'_{HL}$ が普通であるとされているので、上述の現象は通常地盤の波動応答には常に現われる。

3. 解析地盤と応答解析法

(1) 解析地盤例と Q 値

振動数応答関数を計算する地盤例は文献 1) で採用し

た地盤¹⁹⁾を対象とするが、粘弾性地盤を特徴づける重要なパラメーター Q 値はそこには与えられていないので、以下のような仮定で与えた。

a) 均質横波に対する各層の Q 値 (Q_{HT}^*) は弾性横波伝播速度 C_{HT}^* のみの関数であり、均質縦波に対する各層の Q 値 (Q_{HL}^*) は Q_{HT}^* 値と一定の関係にあるとする。

b) 地殻深部の Q 値についての報告は多数あるが²⁰⁾、地表付近の特定の地盤に対する Q 値の実測例からは、上記の関数関係を統一することは困難であるため、下記の2種類の関係を用いた。

$$Q_{HT}^* = 0.033 + 0.00039 C_{HT}^{*2} \dots \dots \dots (A)$$

$$Q_{HT}^* = 0.615 - 0.0013 C_{HT}^{*2} \dots \dots \dots (B)$$

ただし、 C_{HT}^* は m/s の単位の値である。

式 (A) はわが国およびカリフォルニア州で測定された地盤に対して提案された推定式²¹⁾で、弾性横波速度の増加とともに Q^{-1} も増加する関係である。また式 (B) は Silva¹⁴⁾ が応答解析した地盤に用いられている値から著者が推定した式で、式 (A) の関係とは逆に横波速度が増加すると Q^{-1} は減少する。したがって通常の地盤において、基盤より上層では式 (B) による Q^{-1} の方が式 (A) による値より大きい。

c) Q^{-1} の縦波と横波に対する関係も、表層付近の地盤を対象にしたものについては明らかでないので、文献 14) に用いられている値から平均的に

$$Q_{HL}^* = 0.2 Q_{HT}^* \dots \dots \dots (C)$$

と推定した。

式 (A), (B), (C) は必ずしも根拠のある関係ではなく対象地盤ごとに異なると考えられ妥当性には疑問もあるが、ここでは実地盤の資料が十分でないことと、広い範囲の Q^{-1} 分布に対する応答を比較する目的で採用した。なおここには示さないが式 (C) の右辺の係数を 0.4 とした場合でも応答にほとんど差がないことがわかっている。

以上の仮定を用いて定めた解析地盤例の層定数を Table 1 に示す。

地盤 L 6), L 9), L 16) はそれぞれ表中に示したような弾性地盤としての地盤の特性値 $T_c(s)^{1), 19)}$ をもち、したがって地盤種別ではそれぞれ第 2, 3, 4 種地盤である。なおポアソン比はすべての地盤において一定とし、基盤では 0.40、基盤上の各層では 0.45 とした。また式 (24) で述べた非均質波の臨界角を入射角 30° のときすでに越えている層を 2 重アンダーラインで示した。

(2) 振動数応答関数の計算手順

弾性平行多層地盤に対する調和 SV 波の応答解析法は、Haskell²²⁾ の方法などよく知られておりここには再掲しないが、たとえば文献 1) の弾性地盤に対して用いた方法で、粘弾性平行多層地盤の基盤に任意角度で、P

Table 1 Material Properties and Thickness of Layers.

Layer T _c (s)	Velocity C _{HT} [*] (m/s)	Density ρ (t/m ³)	Thick- ness d (m)	Lossfactor (Q ⁻¹) for Homogeneous Waves			
				eq.(A)		eq.(B)	
				Q ⁻¹ _L	Q ⁻¹ _T	Q ⁻¹ _L	Q ⁻¹ _T
L 6) 0.30s	150	1.4	2.8	0.02	0.09	0.09	0.45
	207	1.9	3.2	0.02	0.11	0.08	0.38
	160	1.4	1.4	0.02	0.09	0.09	0.43
	319	2.1	4.5	0.03	0.16	<u>0.05</u>	0.26
	295	2.1	1.2	0.03	0.15	0.06	0.28
	329	2.1	1.1	0.03	0.16	<u>0.05</u>	0.24
	282	1.8	3.3	0.03	0.14	0.06	0.30
L 9) 0.43s	500	2.1	∞	0.05	0.23	0.01	0.05
	119	1.9	3.1	0.02	0.08	0.10	0.48
	201	1.9	3.3	0.02	0.11	0.08	0.39
	317	2.1	5.9	0.03	0.16	<u>0.05</u>	0.26
	328	2.1	2.3	0.03	0.16	<u>0.05</u>	0.24
	267	1.8	0.8	0.03	0.14	0.06	0.31
	314	2.1	3.0	0.03	0.15	<u>0.05</u>	0.26
L 16) 1.17s	269	1.8	7.7	0.03	0.14	0.06	0.31
	500	2.1	∞	0.05	0.23	0.01	0.05
	70	1.2	4.3	0.01	0.06	0.11	0.54
	170	1.7	2.9	0.02	0.10	0.08	0.42
	70	1.2	3.2	0.01	0.06	0.11	0.54
	100	1.6	8.0	0.01	0.07	0.10	0.50
	170	1.7	11.2	0.02	0.10	0.08	0.42
200	1.7	4.6	0.02	0.11	0.08	0.39	
500	2.1	∞	0.05	0.23	0.01	0.05	

Poisson's ratio: 0.45 in upper layers
0.40 in base rock

— shows that the incident angle of 30° exceeds the viscoelastic critical angle in that layers.

波または SV 波が入射した場合の振動数応答解析を行う手順は以下のようである。

a) 弾性地盤の層定数 (層厚 d , 密度 ρ , 弾性横波速度 C_{HT}^* , 弾性縦波速度 C_{HL}^*) に、均質波の Q_{HT}^* を加える。

b) 与えられた入射条件 (入射波の種類, 入射角, 入射波の減衰角) に対して連立方程式 (22) を、P, A が式 (20・c) の χ すなわち ξ の関数であることに注意して解き、 θ, γ, ξ_2 を求める。このとき粘弾性一般波では試行錯誤計算を行う必要がある。

c) 式 (19) により b) で求められた各層の非均質波の Q_{HT}^* を求め、式 (20・e) から非均質波の複素速度を得て、それを弾性波速度の代わりに用いる。また式 (21) から縦波と横波に対する ξ を求め、それぞれを文献 1) の θ と γ とする。

d) 文献 1) の Snell の法則を除く式 (8)¹⁾ 以下の行列のすべての要素を複素関数とし、境界条件なども含めて同じ手順で解析する。

4. 解析結果と考察

本研究では基盤面への入射波はすべて均質波であるとし、基盤面で反射した波動は放射条件¹⁾に従うものとする。

(1) SV波が垂直入射する場合

いま基盤である第 $n+1$ 層に下方から垂直に均質 SV 波が入射する場合を考える。この場合は任意層ですべての波動が均質 SV 波となり、非均質波としての応答特性は現れない。また水平動しか現れず SH 波が垂直入射する場合とも同じになる。

Fig. 2 (a), (b), (c) に Table 1 に示した地盤例に対する振動数応答関数 $\eta(i\omega)$ を、弾性地盤 (以後 E 地盤とよぶ) と 3. (1) で述べた推定式 (A), (B) による 2 種類の Q^{-1} をもつ粘弾性地盤 (以後それぞれを VA 地盤, VB 地盤とよぶ) について示す。

横軸の ω^* は無次元化した入射波の円振動数で、 $\omega^* = \omega d_2 / C_{T2} = 2\pi d_2 / \Lambda_{T2}$ である。ここに d_2 は Fig. 1 の第 2 層 (地表を含む層) の層厚で、 C_{T2} , Λ_{T2} はこの層内の弾性 SV 波の伝播速度および波長である。また上部横軸に実際の振動数 f (Hz) を示し、弾性と粘弾性で応答の大きさが違い過ぎる場合は左右の縦軸を別の大きさにして対応する応答を示した。

弾性波解析ではどの地盤例に対しても、2 次以上の固有振動数で、しかも実地震波として生じ得る範囲の振動数領域で、応答 η が 10 以上のきわめて大きな応答を生じる。したがって弾性解析結果のみをもとに設計するのは無理と思われる。

どの地盤例においても VA, VB 地盤は E 地盤と縦軸の設定が異なることに注意すると、いずれも E 地盤と

応答曲線がかなり異なり、 $\omega^* \leq 2\pi$ の範囲で ω^* の増加とともに η は急激に減衰する。

VA 地盤の応答は E 地盤の応答より明らかに減衰しているが、E 地盤に現われる振動数応答曲線 η の局所的なピークに対応して比較的明瞭にピークを保存している。特に Fig. 2 (a), (b) に示す地盤例 L 6), L 9) ではそれぞれ 3 次および 2 次の固有振動数で、E 地盤の対応するピーク値がそれぞれ 23%, 48% に減少するものの、依然として応答が卓越しており、ここで用いられた程度の Q^{-1} のときは、弾性解析の場合と同様にやはり T_0 (\equiv 1 次固有周期) が卓越周期を示していない。また Fig. 2 (c) に示す地盤例 L 16) では、E 地盤の 4 次の固有振動数におけるきわめて大きい卓越応答に対応

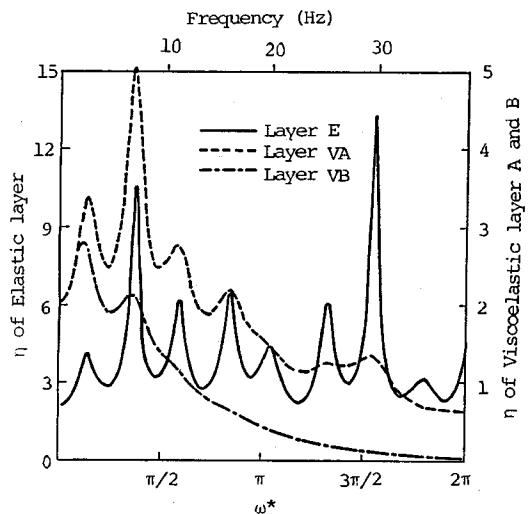


Fig. 2(b) Frequency response function η at the surface of L 9) for normal incidence of SV wave.

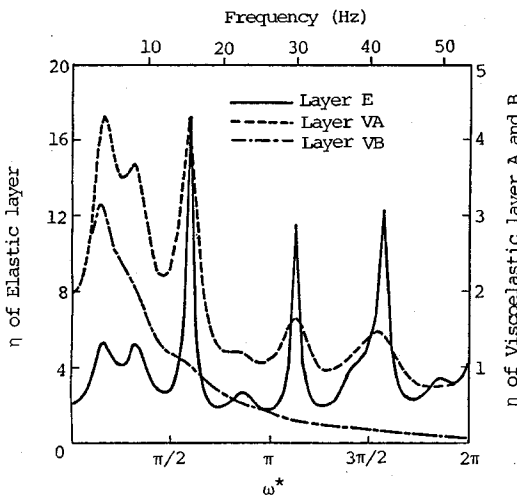


Fig. 2(a) Frequency response function η at the surface of L 6) for normal incidence of SV wave.

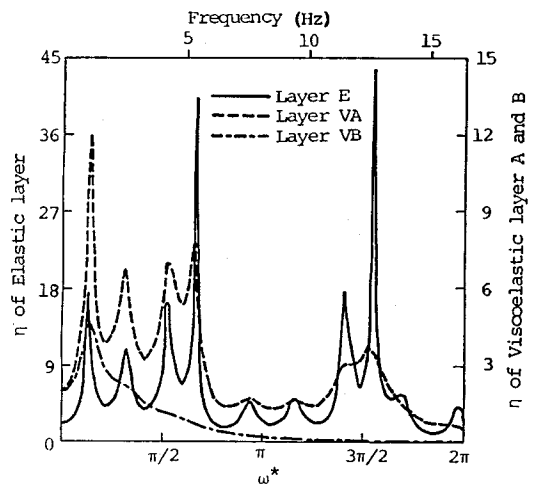


Fig. 2(c) Frequency response function η at the surface of L 16) for normal incidence of SV wave.

するピークがほぼ20%に減少し、約70%にしか減少しない1次固有振動数での η が卓越応答となる。

一方どの地盤例においても、VB地盤は2次以上の高い振動数領域での減衰が激しく、E地盤の η に比較して減少の割合は異なるが、ほぼ T_c である1次固有振動数(固有周期)の応答が卓越する。特に ω^* が $\pi/2$ 以上で η はきわめて滑らかに減衰する。

以上の結果からQ値を実際地盤に即して適当に与えることができれば、粘弾性波動解析による振動数応答関数 η は、水平動については合理的な値として設計に用いることができると思われる。

(2) SV波が任意角度で入射する場合

基盤へ均質SV波が任意角度で入射した場合について、SV波の入射角を γ_0 とし、弾性解との比較を容易にするため、文献(1)で採用した入射角すなわち弾性地盤と考えた場合の、基盤の反射P波に対する臨界角($\gamma_c = 24.2^\circ$)をわずかに越えた $\gamma_0 = 25^\circ$ と、さらに越えた $\gamma_0 = 30^\circ$ の場合について応答解析を行った。なお粘弾性地盤としての臨界角はTable 1に示したように、 $\gamma_c = 30^\circ$ のとき、L 6)、L 9)のVB地盤の2、3の層で越え、L 16)ではこの入射角で越える層はない。また弾性地盤の場合と異なり、どの粘弾性地盤でもあらゆる入射角に対して基盤で臨界角に達することはない。

任意角入射の場合は基盤上の各層には非均質波が伝播し、また水平動のみならずSH波では生じない上下動の応答も現われる。以下ではこれら水平動と上下動の振動数応答関数をそれぞれ $\eta_x(i\omega)$ 、 $\eta_z(i\omega)$ とする。

Fig. 3 (a), (b)に地盤例L 9)のE地盤、VAおよびVB地盤それぞれについて各入射角に対する η_x と η_z を示す。

E地盤では入射角 γ_0 が基盤の弾性波の臨界角を越えると、弾性波の η_x は η_z のピークと密接に関係し、両者が同じ ω^* で必ず凸凹いずれかのピークをもつという意味で特徴ある応答を示す¹⁾。この例では $\gamma_0 = 25^\circ$ のとき η_z の卓越ピークは η_x の4次の固有振動数以上のかかなり高い振動数で初めて現われ、 ω^* が 2π までの範囲の η_x の卓越ピークより大きい。また η_x はFig. 2に示した垂直入射時の値を越えない。

粘弾性波の応答 η_x はVA、VB地盤の両者について、垂直入射の場合より応答曲線全体が滑らかになり、3次以上の固有振動数の存在は示されなくなる。しかし2次までの卓越応答のピークの減少率と卓越振動数においては垂直入射の場合とほぼ同じ関係を維持する。

η_z は η_x において示した弾性波に対する応答の減衰割合よりさらに激しく減衰する。そのためE地盤で現われたような卓越応答は消滅し、 η_x と η_z の間の応答曲線のピークの対応もなく無視できる程度の大きさとなる。

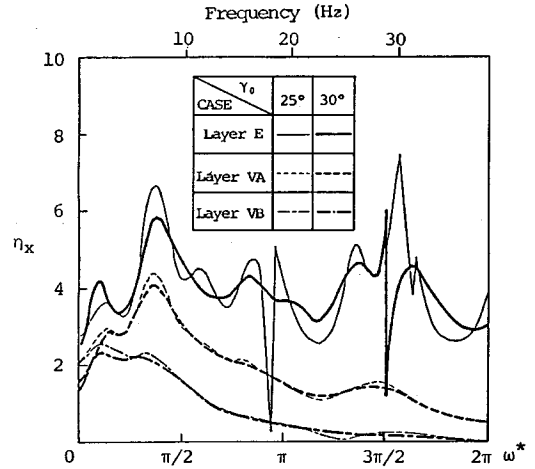


Fig. 3(a) Frequency response function η_x of horizontal direction at the surface of L 9).

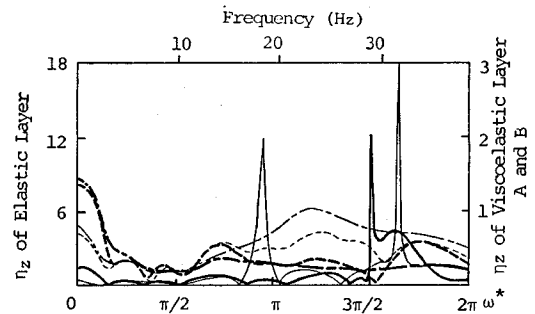


Fig. 3(b) Frequency response function η_z of vertical direction at the surface of L 9).

この原因の1つは2. (5)で述べたように基盤で臨界角にならないためであろう。ただしVA地盤よりVB地盤の方が層全体の Q^{-1} は増加しているにもかかわらず、VB地盤の $\gamma_0 = 25^\circ$ のときの η_z は $\omega^* > \pi/2$ の範囲でVA地盤のそれより増加している。

Fig. 4 (a), (b)に、地盤例L 16)の各入射角に対するE地盤、VAおよびVB地盤それぞれの η_x と η_z を示す。

この場合E地盤の応答 η_x 、 η_z は両者が卓越するピーク振動数の対応関係で、L 9)の場合と同じような凸凹の関係をもつ部分もあるが、 $\omega^* = \pi/2$ 付近の3次固有振動数で $\gamma_0 = 30^\circ$ の η_x 、 η_z は両者ともに卓越ピークをもつ点で特徴がある。さらに η_z に大きく鋭い立ち上がりをもつ卓越ピークが現われるときの実振動数 f は比較的低く、 $\gamma_0 = 30^\circ$ のときの最低卓越振動数は水平動の3次固有振動数に相当する。また η_x は垂直入射のそれを越えない。

VA、VB地盤の応答 η_x はL 9)の場合と同じ傾向をもつ。しかし両地盤とも η_z は、 $\gamma_0 = 25^\circ$ の場合より 30°

の場合の方がここで示した ω^* の範囲で必ず大きく、値も無視できない程度に大きい。また水平動の2次固有振動数までは η_x と η_z のピークが凸と凹で対応しているが、3, 4次固有振動数ではE地盤の場合と同様に両者が卓越ピークをもち、それ以上の高い振動数においては明瞭な対応関係がみられない。

VB地盤の場合の η_z のピークは入射角が増加すると振動数の高い方に移動し、しかも高い振動数でのピークほどその移動が大きい。同じ傾向はE地盤にもあるが、VA地盤およびL9)を含めて水平動には本解析の範囲でその傾向は認められない。また地盤例L9)で述べた $\gamma_0 = 25^\circ$ の場合のVA, AB地盤の η_z 関係はこの地盤例には現われない。

粘弾性地盤の上下動応答は弾性地盤のその卓越応答が低い振動数領域で存在するとき、やはりほぼ同じ振動数域で無視できない大きさで存在する場合があることに注意する必要がある。また粘弾性地盤の応答の ω^* に関する関係は、弾性地盤に比較して一般に鋭くなく、応答の局所的なピークを形成する凸部分の底辺の振動数領域が広い。L16)の場合から明らかなように上下動の応答は特にその傾向が著しい。このことは実際の震動応答において、粘弾性応答が弾性解析から得られる値より低い場合でも、実質的に重要な震動を生じる可能性があると考えられる。

(3) 特別な仮定をする場合

ここでは粘弾性地盤の応答解析において計算を単純化

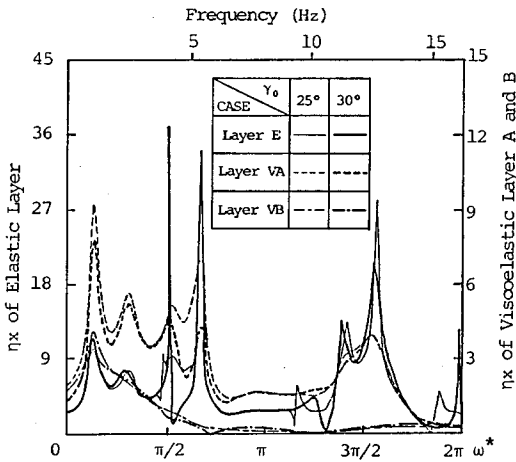


Fig. 4(a) Frequency response function η_x of horizontal direction at the surface of L 16).

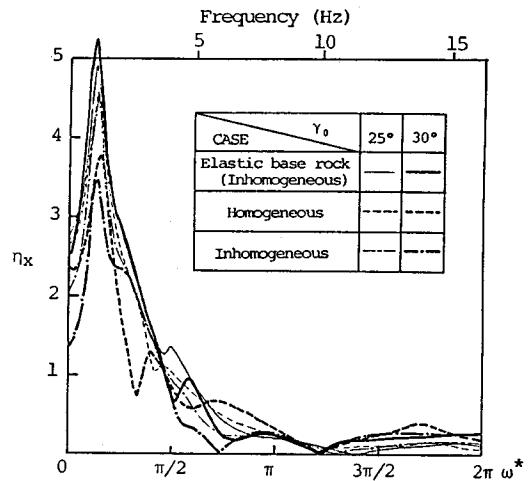


Fig. 5(a) Frequency response function η_x at the surface of L 16) of Elastic base rock, homogeneous and inhomogeneous case.

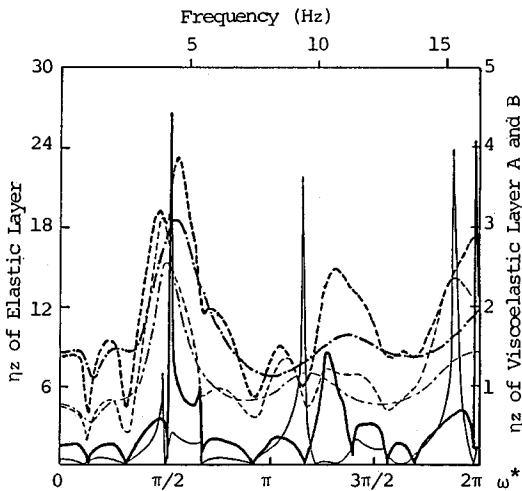


Fig. 4(b) Frequency response function η_z of vertical direction at the surface of L 16).

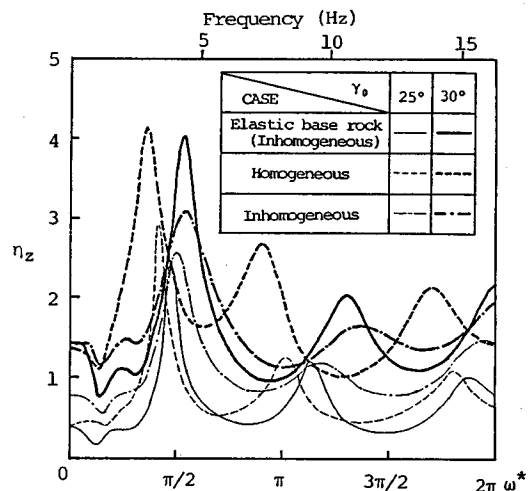


Fig. 5(b) Frequency response function η_z at the surface of L 16) of Elastic base rock, homogeneous and inhomogeneous case.

できるという理由で、層定数または Q^{-1} に特別な仮定を設けた場合の応答を上述した非均質波解析と比較する。

Fig. 5 (a), (b) に L 16) の VB 地盤に SV 波が入射する場合について、非均質波 (N), 基盤のみが弾性であるとした場合の非均質波 (S) および Q^{-1} が不変とし、均質波 (H) として解析 (以後それぞれを N, S, H とよぶ) したときの η_z , η_x を示す。

S は 2. (4) で述べた非均質波の特別な場合であり、減衰角 ζ は透過・反射角と等しく Snell の法則が簡単な形になる。H は正しい粘弾性波解析ではないが、N と比較するために減衰角 ζ にかかわらず式 (18) の Q_z のみを用いて解析した結果である。H の状態は Borchardt⁽¹¹⁾ が指摘したように、減衰が微小 ($Q^{-1} \ll 1$) であることを考慮するときの誤った近似法において現われる。なお垂直入射においては均質波のみが存在するから N と H は一致し、S も N に比較して基盤の Q^{-1} の寄与が少なく、どの解析法も同じ応答を示す。

η_z は解析法と入射角によらず 1 次固有振動数で卓越応答を示す。この卓越応答は S が最大で、その値は $\gamma_0 = 30^\circ$ のとき N, H のそれより約 15 % 大きい。しかもこの最大値は N, H の場合と逆に入射角の増加とともに増加し、さらにそのピークが振動数の低い方に移動する。しかし N および H の場合は弾性波解析の場合と同様にほとんど移動しない。

η_x の最大値は $\gamma_0 = 30^\circ$ のとき上下動としての第 1 次卓越振動数にあり、H, S, N の順に小さく、S および H の最大値は N を基準にして約 30 % 大きい。また第 2 次卓越振動数での応答も H が最も大きい。入射角との関係は入射角の増加とともに η_x のピークが H の場合だけ振動数の低い方に移動し、N および S の場合はその逆で弾性波解析の場合と同様である。

S は弾性地盤の場合と同様に入射角が増加するとき最初に基盤で弾性の臨界角に達すること、また Q^{-1} のコントラストが一般波の挙動を支配することを考えると、全層が粘弾性である地盤の応答解析として適当でない場合がある。

上に示したように粘弾性波動解析として特殊な取扱いをした場合の応答と正しい非均質波応答の違いを考慮すると、対象地盤の層性質が与えられる限り一般の非均質波動としての解析を行う必要があると考えられる。

5. 結 語

(1) 一般によく用いられる弾性平行多層地盤に対する応答解析法をそのまま用いて、粘弾性平行多層地盤に均質調和 SV 波が任意角度で入射した場合の応答解析を行う手順を示した。ここでは弾性地盤の層定数に適当に

推定した粘性パラメーター Q 値を加え、 $Q^{-1} \ll 1$ としての仮定を用いず、一般波としての非均質波動応答解析を行い、弾性波動応答と比較するとともに粘弾性波動応答を検討した。

(2) 非均質波動応答計算は均質波 (弾性波を含む) 応答の場合と比較して、伝播ベクトルと減衰ベクトルに関する 2 種類の波数について Snell の法則を満足しなければならず、またその結果求められる減衰角により非均質粘弾性パラメーター Q^{-1} を定めるという手順が異なる。

(3) 粘弾性性質を考慮した実地盤の応答解析において、粘性パラメーターを実際の状態に即して与えることがきわめて重要である。特に P 波, SV 波を対象にする場合には両者それぞれに対する粘性パラメーターが必要であり、しかもそれらの値が非均質波の応答を支配する。ここではこのパラメーターが振動数に依存しないとし、SV 波の弾性横波速度の関数であるとして解析を行ったが、それらの妥当性を明らかにすることは今後の重要な課題として残されている。

(4) 粘弾性波動応答は一般に弾性波動応答と比較して、入射波の振動数が増加するとともに急激に減衰し、水平動応答は Q^{-1} の比較的大きな VB 地盤では 1 次固有振動数が卓越振動数となるが、VA 地盤のように Q^{-1} の設定によっては、卓越振動数は依然として 2 次以上の固有振動数域にあり、地盤の特性値 T_0 だけで地盤種別を行えない場合がある。

(5) 粘弾性地盤の上下動応答は、弾性地盤解析での応答が低い振動数領域で大きな値をもつ場合には、VB 地盤のように Q^{-1} が大きい地盤であっても、入射角の範囲によってはほぼ同じ振動数域で無視できない応答を示す場合がある。

(6) 水平動, 上下動ともに粘弾性波の振動数応答曲線は、弾性波に比較してピークが現われる振動数が低く、かつ広い振動数領域にまたがってピークを形成している。特に上下動にその傾向が強く、応答値そのものは小さく得られた場合でも実際の震動挙動は無視できない場合があることが予想される。

(7) 基盤を弾性体と考えたり、均質波伝播を仮定すると解析過程が若干簡単になるが、任意角入射を対象にする場合には非均質波応答と無視できない差が生じ、一般波として解析する必要がある。

(8) 粘弾性波動解析の結果は垂直入射の場合はもちろん、任意角入射についても、振動数応答関数の最大値は弾性波解析の結果よりかなり低い。対象地盤が平行多層であり、与えられた動特性が信頼できる場合には、最大値を実際の耐震設計のための目安として取り扱える可能性がある。

(9) 非定常 P 波, SV 波または実地震波に対する時刻歴応答解析は, ここで得られた振動数応答関数からたとえば FFT などにより容易に遂行できる。

訂正とお詫び: 本論文の引用文献として重要な, 文献 1) の 60 頁の式 (15・b) 中の B_{21} と B_{j3} に誤りがありますので, この場を借りて以下のように訂正 (アンダーライン部が正しい表現) し, お詫びします。

$$B_{21} = -\cos \theta_{n+1} / C_{Tn+1},$$

$$B_{j3} = (A_{j1} \sin \theta_1 - A_{j2} \cos \theta_1) / C_{L1}$$

$$- \rho_1 (A_{j3} \cos \gamma_1 - A_{j4} \sin 2 \theta_1 / \tau_1^2),$$

参 考 文 献

- 1) 佐藤 誠: 平行多層地盤に対する調和 SV 波の伝播解析, 土木学会論文報告集, 第 328 号, pp. 57~68, 1982.
- 2) Ewing, W.M., Jardetzky, W.S. and Press, F.: Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill, pp. 124~254, 1957.
- 3) Cooper, Jr. H.F. and Reiss, E.L.: Reflection of plane viscoelastic waves from plane boundaries, J. Acoustical Soc. America, Vol. 39, pp. 1133~1138, 1966.
- 4) Cooper, Jr. Henry F.: Reflection and transmission of oblique plane waves at a plane interface between viscoelastic media, J. Acoustical Soc. America, Vol. 42, pp. 1064~1069, 1967.
- 5) Schoenberg, M.: Transmission and reflection of plane waves at an elastic-viscoelastic interface, Geophys. J. R. astr. Soc., Vol. 25, pp. 35~47, 1971.
- 6) Buchen, P.W.: Plane waves in linear viscoelastic media, Geophys. J. R. astr. Soc., Vol. 23, pp. 531~542, 1971.
- 7) Borchardt, R.D.: Energy and plane waves in linear viscoelastic media, J. of Geophysical Research, Vol. 78, No. 14, pp. 2442~2453, 1973.
- 8) Borchardt, R.D.: Reflection and refraction of type-II waves in elastic and anelastic media, Bull. Seis. Soc. America, Vol. 67, No. 1, pp. 43~67, 1977.
- 9) Krebes, E.S.: The viscoelastic reflection/transmission problem: two special cases, Bull. Seis. Soc. America, Vol. 73, No. 6, pp. 1673~1683, 1983.
- 10) Borchardt, R.D.: Reflection-refraction of general P- and type-I S-waves in elastic and anelastic solids, Geophys. J. R. astr. Soc., Vol. 70, pp. 621~638, 1982.
- 11) Borchardt, R.D. and Wennerberg, L.: General P, type-I S, and type-II S waves in anelastic solids; inhomogeneous wave fields in low-loss solids, Bull. Seis. Soc. America, Vol. 75, No. 6, pp. 1729~1763, 1985.
- 12) Richards Paul G.: On wave fronts and interfaces in anelastic media, Bull. Seis. Soc. America, Vol. 74, No. 6, pp. 2157~2165, 1984.
- 13) Wennerberg Leif: Snell's law for viscoelastic materials, Geophys. J. R. astr. Soc., Vol. 81, pp. 13~18, 1985.
- 14) Silva, W.: Body waves in a layered anelastic solid, Bull. Seis. Soc. America, Vol. 66, No. 5, pp. 1539~1554, 1976.
- 15) 井藤昭夫: 地表での強震記録から粘弾性モデルにより推測した基盤の震動特性, 土木学会論文報告集, 第 333 号, pp. 1~9, 1983.
- 16) たとえば Aki, Keiiti and Richards, P.G.: Quantitative Seismology, Theory and Methods, Vol. 1, Freeman and Company, pp. 167~185, 1980.
- 17) たとえば Ben-Menahem, A. and Singh, S.J.: Seismic Waves and Sources, Springer, pp. 848~944, 1981.
- 18) 佐藤 誠・嶋 宗和: 多層地盤の粘弾性波動応答について, 第 38 回土木学会中四支部研究発表会講演概要集, pp. 47~48, 1986.
- 19) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, V 耐震設計編, 日本道路協会, pp. 88~102, 1980.
- 20) たとえば Anderson D.L. and Given, J.W.: Absorption band Q model for the earth, J. Geophysical Research, Vol. 87, No. B 5, pp. 3893~3904, 1982.
- 21) 土岐憲三: 構造物の耐震解析, 技報堂出版, pp. 71~80, 1981.
- 22) Haskell, N.A.: The dispersion of surface waves in multilayered media, Bull. Seis. Soc. America, Vol. 43, No. 1, pp. 17~34, 1953.

(1986.12.5・受付)