

局所移動座標の選択が平面骨組の有限変位解析の精度に及ぼす影響

ON THE CHOICE OF LOCAL MOVING COORDINATES IN THE FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS OF PLANE FRAMES

後藤芳顯*・春日井俊博**・西野文雄***

By Yoshiaki GOTO, Toshihiro KASUGAI and Fumio NISHINO

The method with the separation of rigid body displacements is most commonly used in the finite displacement analysis of structures. This method introduces local moving coordinates in order to remove the rigid body rotations of respective finite elements. The local coordinates utilized in the analysis of plane frames are classified into two kinds and the choice of the local coordinates is known to have an effect on the accuracy and the convergence of the solutions.

This paper precisely examines the theoretical effect of local coordinates on the accuracy of the finite displacement analysis for plane frames.

Keywords: finite displacement analysis, plane frame, accuracy

1. まえがき

構造物の有限変位解析において多く用いられる剛体変位除去の手法は、Total Lagrangeの手法に比べ、離散化解析の定式化が比較的容易で、しかも、大きな変位挙動まで追跡し得るので、実用的な解析では最も多く用いられる。その反面、剛体変位除去の手法では、剛体回転を除去した後の、回転成分が小さいという物理的考察に基づき、局所系での支配方程式の簡略化がなされるため、その精度のみならず、理論的根拠については、従来必ずしも明らかでなかった⁽¹⁾。

著者らは、剛体変位除去の手法による効率的な計算を行うための指針を提示することを目的として、それらの問題を収束性ならびに、精度の観点から初めて理論的に明らかにし^{(1)~(3)}、この理論的検討の妥当性も、精密な数

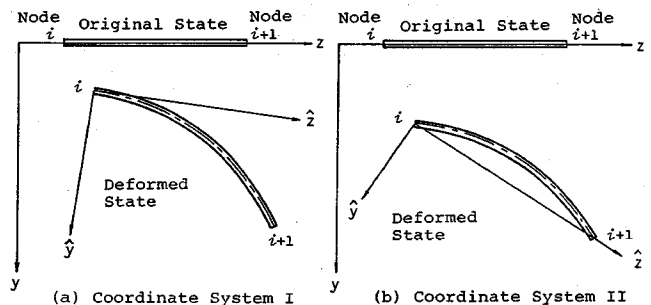


Fig. 1 Local Moving Coordinate Systems of a Beam Element.

値計算によって調べてきた⁽⁴⁾。また、著者らの研究に続き、剛体変位除去の手法の収束性のみに関しては、若干の研究⁽⁵⁾がなされている。ここでは、ひずみエネルギーの観点から、要素接線剛性の対称性を保持しつつ、剛体変位除去の手法が収束するための条件が論じられている。

著者らによる上記一連の論文^{(1)~(3)}では、理論展開の容易さから、Fig. 1 (a) に示すように、局所座標系の z 軸を i 節点における変形後の要素軸接線方向に選ぶ場合に限定しており、実際の解析で最も多く用いられるより一般的な Fig. 1 (b) のような、変形後の i 節点と $i+1$ 節点を結ぶ割線方向に z 軸を選ぶ場合の精度について

* 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

** 学生会員 名古屋工業大学大学院 博士前期課程社会開発工学専攻 (同上)

*** 正会員 Ph. D. 東京大学教授 工学部土木工学科 (〒113 文京区本郷)

注 1) 平面骨組の各種有限変位解析法に対する解説と参考文献は文献 1) に詳述されている。

は、いまだ十分に検討されていない。

本論文では、より実際に促した精度を明らかにすることを目的として、Fig. 1 (b) の局所座標系 II を採用した場合の剛体変位除去の手法の精度を Lagrange 表現の高次非線形微分方程式の解との比較において、理論的に検討する。さらに、上記の検討に、局所座標系 I に関してすでに得られている結果¹⁾に若干追加したものを含め、実用的な解析に用いられる剛体変位除去の手法の基本的な精度特性を総合的に調べ、効率的な計算を実施するための指針を明らかにするものである。なお、文献 1) ~4) では、並進ならびに回転変位、断面モーメント、空間固定座標方向の節点力の精度を示し、軸力およびせん断力の精度については明示していないが、文献 6) の討議に述べられているように、これらの諸量も設計上重要であることから、ここでは検討に加える。

2. 検討内容

剛体変位除去の手法では、局所座標系の差のほかに剛体変位除去後の局所系の支配方程式や剛体回転除去後の回転角の評価式の差により各種定式化が報告されている。ここでは、重要なものということで、Table 1 に示す 4 種類の局所系の支配方程式、さらに、Table 2 に示す 3 種類の剛体回転除去後の回転角評価式について、そ

れぞれの差が局所座標系 II のもとで、解析精度に及ぼす影響について検討する。これらの、精度評価の基準としては、先の論文¹⁾と同様、Table 3 に示す Lagrange 表現の高次非線形支配方程式の解を用いる。

Table 1 の局所系の支配方程式のうち、c) 線形化はり・柱の式は、b) はり・柱の式の軸力-変位関係式において、変位の非線形項を無視したものである。この式は、文献 1) では理論的検討に含めていないが、実際の解析では比較的多く用いられるため、新たに検討対象とする。また、d) の式は、実用的な解析ではほとんど用いられないが、e) 有限ひずみ・有限変位の式の解に収束する最低次の非線形式であり¹⁾、理論上の重要性から検討に加える。

剛体回転除去後の回転角評価式としては、通常、剛体回転除去後の回転角が微小ということで、線形の評価式 $\hat{v}'_0 = \hat{\alpha}$ が用いられることが多いが、より回転角を厳密に評価するという目的のもとに、高次非線形の評価式 $\hat{v}'_0 = \sin \hat{\alpha}$ 、 $\hat{v}'_0 = \tan \hat{\alpha}$ も用いられることがある。局所座標系 I については、すでに、最も単純な線形の評価式の精度がよく、高次非線形の評価式を用いても精度は向上せず、逆に低下する可能性もあることが判明している¹⁾。局所座標系 II のもとでも、同様の結果が類推されるが、理論的に近似の程度を明示するために、ここでは

Table 1 Expressions with Separation of Rigid Body Displacements.

Theories	Equilibrium Equations	Boundary Conditions		Stress Resultants vs. Displacements
		Mechanical	Geometrical	
a) Small Displacements	$M''=0$ $N'=0$	$M'=\overline{F}_y$ $N=\overline{F}_z$ $M=\overline{M}$	$\hat{v}_0=\overline{v}_0$ $\hat{w}_0=\overline{w}_0$ $\hat{v}'_0=\overline{\alpha}$	$M=-EI\hat{v}''_0$ $N=EA\hat{w}'_0$
b) Beam-Column	$(N\hat{v}'_0+M')'=0$ $N'=0$	$N\hat{v}'_0+M'=\overline{F}_y$ $N=\overline{F}_z$ $M=\overline{M}$	$\hat{v}_0=\overline{v}_0$ $\hat{w}_0=\overline{w}_0$ $\hat{v}'_0=\overline{\alpha}$	$M=-EI\hat{v}''_0$ $N=EA(\hat{w}'_0+\frac{1}{2}\hat{v}''_0{}^2)$
c) Linearized Beam-Column	$(N\hat{v}'_0+M')'=0$ $N'=0$	$N\hat{v}'_0+M'=\overline{F}_y$ $N=\overline{F}_z$ $M=\overline{M}$	$\hat{v}_0=\overline{v}_0$ $\hat{w}_0=\overline{w}_0$ $\hat{v}'_0=\overline{\alpha}$	$M=-EI\hat{v}''_0$ $N=EA\hat{w}'_0$
d) Theory ¹⁾ convergent to Finite Displacements with Finite Strains	$\left(\frac{M'}{1+\hat{w}'_0}\right)'=0$ $N'=0$	$\frac{M'}{1+\hat{w}'_0}=\overline{F}_y$ $N=\overline{F}_z$ $M=\overline{M}$	$\hat{v}_0=\overline{v}_0$ $\hat{w}_0=\overline{w}_0$ $\hat{v}'_0=\overline{\alpha}$	$M=-EI\hat{v}''_0$ $N=EA\hat{w}'_0$

Remarks: The following notations are used throughout Tables presented as E=Young's Modulus, A=Cross Sectional Area, I=Second Moment of Inertia, N=Axial Stress Resultants, and $(\overline{F}_y, \overline{F}_z, \overline{M})$ and $(\overline{v}_0, \overline{w}_0, \overline{\alpha})$ =Prescribed Boundary Values expressed in terms of the local components

Table 2 Evaluation of Rotational Angle after Separation of Rigid Body Rotation.

	Eq. for Evaluation
1)	$\hat{v}'_0 = \hat{\alpha}$
2)	$\hat{v}'_0 = \sin \hat{\alpha}$
3)	$\hat{v}'_0 = \tan \hat{\alpha}$

Table 3 Direct Lagrangian Expressions.

Theories	Equilibrium Equations	Boundary Conditions		Stress Resultants vs. Displacements
		Mechanical	Geometrical	
e) Finite Displacements with Finite Strains	$\{N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha\}' = 0$ $\{N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha\}' = 0$	$N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha = \bar{F}_y$ $N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha = \bar{F}_z$ $M = \bar{M}$	$v_0 = \bar{v}_0$ $w_0 = \bar{w}_0$ $\alpha = \bar{\alpha}$	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $M = -EI\alpha'$
f) Finite Displacements with Small Strains	$\{N \sin \alpha + M' \cos \alpha\}' = 0$ $\{N \cos \alpha - M' \sin \alpha\}' = 0$	$N \sin \alpha + M' \cos \alpha = \bar{F}_y$ $N \cos \alpha - M' \sin \alpha = \bar{F}_z$ $M = \bar{M}$	$v_0 = \bar{v}_0$ $w_0 = \bar{w}_0$ $\alpha = \bar{\alpha}$	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $M = -EI\alpha'$
g) Inextensional Finite Displacements (Inextensional Elastica)	$\{N \sin \alpha + M' \cos \alpha\}' = 0$ $\{N \cos \alpha - M' \sin \alpha\}' = 0$	$N \sin \alpha + M' \cos \alpha = \bar{F}_y$ $N \cos \alpha - M' \sin \alpha = \bar{F}_z$ $M = \bar{M}$	$v_0 = \bar{v}_0$ $w_0 = \bar{w}_0$ $\alpha = \bar{\alpha}$	$\sqrt{g_0} = 1$ $M = -EI\alpha'$

Remarks: ($\bar{F}_y, \bar{F}_z, \bar{M}$) and ($\bar{v}_0, \bar{w}_0, \bar{\alpha}$) = Prescribed Boundary Values

検討項目に加える。

3. 検討手法の概要

検討手法としては、文献1)~3)に準ずる。

まず Fig. 1 の有限要素 $i, i+1$ に関して、 i 節点の物理量 $Q_j|_i$ を $i+1$ 節点の物理量 $Q_j|_{i+1}$ へ伝達する形式の次のような離散化式を各種剛体変位除去の手法で求め、これを要素長 l に関する次のようなべき級数展開で表現する。

$$Q_j|_{i+1} = Q_j|_i + \sum_{n=1}^{\infty} Q_j^{(n)}|_i (l^n/n!) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、べき級数係数 $Q_j^{(n)}|_i$ は i 節点における物理量 Q_j の n 階の微係数で、 i 節点における物理量 $Q_m|_i$ ($m=1\sim 6$) で表わされる。

次に、厳密解とみなし比較基準となる Table 3 の Lagrange 表現の高次非線形の支配方程式から Taylor 展開法により、式(1)と同じ表現の離散化式を導く。そして、剛体変位除去の手法の精度は、式(1)のべき級数係数に関して、剛体変位除去の手法によるものと、いかに高次項まで一致するかによって評価される。なお、この精度評価手法の妥当性は、文献4)により数値的にも検証されている。

精度評価に、式(1)に示すような、要素長に関するべき級数展開式を用いる主たる理由としては、要素分割長を小さくしていった場合の解の収束性、ならびに精度を要素長のオーダーで評価するためであるが、もう1つの理由として、Lagrange 表現の高次非線形の支配方程式から式(1)の形が比較的容易に導けることによる。

剛体変位の除去において、局所座標系 I を用いる場合は¹⁾、局所系での幾何学的境界条件がすべて i 節点で与えられているので、式(1)に示す伝達形の離散化式の

誘導は微分方程式の初期値問題を解くことに帰着される。したがって、Lagrange 表現の高次非線形微分方程式と同様、局所系の低次非線形支配方程式の解法に Taylor 展開法を用いれば、伝達形の離散化式を求めるのは容易である。一方、局所座標系 II を用いる場合には、局所系の変位拘束条件が i 節点のほかに $i+1$ 節点についても与えられるので、局所系の離散化式の誘導は、微分方程式の境界値問題を解くことに帰着される。このため、非線形の局所系の式である b) はり・柱の式、c) 線形化はり・柱の式に関しては、一般的な伝達形の離散化式を誘導するのが困難となり、また他の局所系の式を用いる場合においても、その誘導は繁雑である。これが、文献1)~3)で局所座標系 I についてのみ扱った主たる理由である。

しかしながら、Table 1 に示すように、局所系の支配微分方程式で分布荷重項をすべて無視すれば、局所座標系 II の場合でも、解析的に境界値問題が解け、非常に繁雑ではあるが、式(1)の形の伝達形の離散化式の誘導が可能になる。また、分布荷重項は、通常の解析でも、集中荷重に置換されることが多く、これを無視することで、それほど一般性を欠くことになるとは考えられない。

以上から、次節では、分布荷重を無視することで、局所座標系 II を用いた場合の離散化式を求める。なお、Lagrange 表現の高次非線形支配微分方程式から、伝達形の離散化式の誘導過程はすでに文献1)に述べているので、ここでは説明を省略する。

4. 剛体変位除去の手法による伝達形離散化式の誘導

(1) 局所座標系 II と全体座標系の物理量の関係
式(1)に示す離散化式を全体座標系の物理成分で表わす都合上、局所座標系の成分と全体座標系の成分の関

係を求めておく必要がある。この関係は、はり要素の剛体運動に関する簡単な幾何学的考察によって求めることができる。

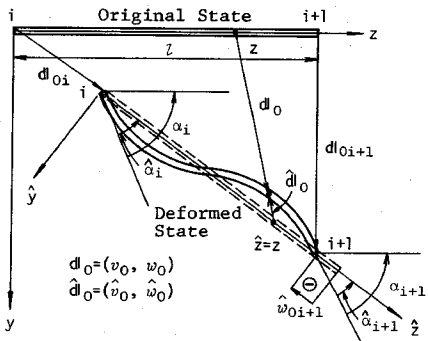
まず、幾何学量について考える。剛体変位を除去した局所座標系 II (\hat{y}, \hat{z}) では、要素節点での並進変位成分 ($\hat{v}_0|_k, \hat{w}_0|_k$) ($k=i, i+1$) について、次の拘束条件が与えられる。

$$\hat{v}_0|_i = \hat{w}_0|_i = 0, \hat{v}_0|_{i+1} = 0 \dots \dots \dots (2\cdot a, b)$$

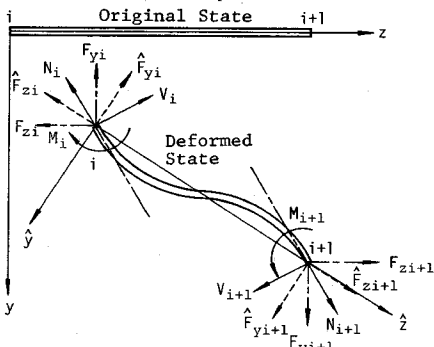
上記の拘束条件と Fig. 2 (a) の幾何学的関係を考慮すると、局所系での並進変位成分 $\hat{w}_0|_{i+1}$ 、回転成分 $\hat{\alpha}_k$ と全体座標系 (y, z) における並進変位成分 ($v_0|_k, w_0|_k$)、回転成分 α_k の関係は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} v_0|_{i+1} - v_0|_i \\ w_0|_{i+1} - w_0|_i + l \\ \alpha_{i+1} - \alpha_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i - \hat{\alpha}_i) & \sin(\alpha_i - \hat{\alpha}_i) & 0 \\ -\sin(\alpha_i - \hat{\alpha}_i) & \cos(\alpha_i - \hat{\alpha}_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{w}_0|_{i+1} + l \\ \hat{\alpha}_{i+1} - \hat{\alpha}_i \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (3)$$

また、力学量についても、Fig. 2 (b) より節点力の局所座標系の成分 ($\hat{F}_{zk}, \hat{F}_{yk}, M_k$) ($k=i, i+1$) と全体座標系の成分 (F_{zk}, F_{yk}, M_k) さらに、節点における断面力成分 (N_k, V_k, M_k) の関係として次式を得る。



(a) Geometrical Relation



(b) Mechanical Relation

Fig. 2 Components of Physical Quantities.

$$\begin{Bmatrix} F_{yk} \\ F_{zk} \\ M_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_k - \hat{\alpha}_k) & \sin(\alpha_k - \hat{\alpha}_k) & 0 \\ -\sin(\alpha_k - \hat{\alpha}_k) & \cos(\alpha_k - \hat{\alpha}_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{F}_{yk} \\ \hat{F}_{zk} \\ M_k \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_{yk} \\ \hat{F}_{zk} \\ M_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \hat{\alpha}_k & \sin \hat{\alpha}_k & 0 \\ -\sin \hat{\alpha}_k & \cos \hat{\alpha}_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_k \\ N_k \\ M_k \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (5)$$

ここで、注意しなければならないのは、式 (5) に示すように、剛体回転除去後の局所系においても、Table 1 に示すすべての支配方程式を通じ、局所座標系 (\hat{y}, \hat{z}) 方向の節点力成分と断面力成分を区別していることである⁶⁾。すなわち、Table 1 の力学的境界条件のところ与えられる力の成分 $\hat{F}_{zk}, \hat{F}_{yk}$ は断面力成分ではなく、断面力成分は式 (5) によって評価しなければならない。なお、明らかなように、 $i, i+1$ 要素に分布荷重が作用しない本論文の場合は、($\hat{F}_{zi}, \hat{F}_{yi}$) と ($\hat{F}_{zi+1}, \hat{F}_{yi+1}$) とは等しくなる。

(2) 物理量に関する離散化式の誘導

収束性、精度を検証する物理量としては、設計において、重要であるものということで、次のような全体座標系における並進、回転ならびに断面力、断面モーメント成分を選び、これらに関して式 (1) の形の離散化式を誘導する。

$$\{Q_i\} = \{v_0, w_0, \alpha, V, N, M\} \dots \dots \dots (6)$$

ここでは、文献 1), 2) で用いた節点力の全体座標系の成分 (F_z, F_y) に代えて、断面力成分 (N, V) を力の成分として採用しているが、これは、式 (4), (5) を用いれば断面力成分についても収束解が得られること⁶⁾を明示するためである。

局所座標系 II では、式 (3)~(5) を用いて、式 (6) の物理量で表わされた式 (1) の形の離散化式を誘導するが、このためには、まず式 (3)~(5) に含まれる局所系での物理量成分 $\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_{i+1}, \hat{w}_0|_{i+1}, M_{i+1}$ を Table 1 に示す局所系の支配方程式を用いて算定する必要がある。 $\hat{\alpha}_i$ の算定は、3. で述べたように、式 (2) に示す拘束条件のもとに、微分方程式を境界値問題として解くことに帰着される。このようにして、 $\hat{\alpha}_i$ に対応する $\hat{v}_0|_i$ を局所系の各種支配方程式から求めた結果を、Table 4 にとりまとめる。

$\hat{\alpha}_i$ は $\hat{v}_0|_i$ をもとに、Table 2 の回転角評価式により、おのおの算定することができる。 $\hat{\alpha}_{i+1}, \hat{w}_0|_{i+1}, M_{i+1}$ については、先に得られた $\hat{v}_0|_i$ を式 (2-a) の i 節点での境界条件に含め、微分方程式を初期値問題として解くことで算定される。

物理量 (v_0, w_0, α, M) に関する式 (1) の形式の離散化式は、以上のようにして求めた局所系の物理量

$(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_{i+1}, \hat{w}_0|_{i+1}, M_{i+1})$ を式 (3)~(5) に代入し、さらに、これらの中に含まれる $\sin \hat{\alpha}_i, \cos \hat{\alpha}_i, \sin \gamma l, \cos \gamma l, \sinh \gamma l, \cosh \gamma l$ を要素長 l に関してべき級数展開し、整理することで求めることができる。また、断面力 (N, V) に関する離散化式は、式 (5) に $i, i+1$ 節点での節点力の (\hat{y}, \hat{z}) 成分が同一であることを考慮して得られる式

$$\begin{Bmatrix} V_{i+1} \\ N_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \hat{\alpha}_{i+1} & -\sin \hat{\alpha}_{i+1} \\ \sin \hat{\alpha}_{i+1} & \cos \hat{\alpha}_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{F}_{yt} \\ \hat{F}_{zt} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (7)$$

に、 $\hat{\alpha}_{i+1}$ を代入し、 l についてべき級数展開することで求められる。

このとき、式 (7) の右辺において、 i 節点での節点力成分 $\hat{F}_{zi}, \hat{F}_{yt}$ に代え、式 (6) の断面力成分 N_i, V_i を用いるには、式 (5) により、前者を後者に変換する必要がある。しかしながら、式 (5) の座標変換行列に含まれる $\hat{\alpha}_i$ は Table 4 からわかるように $\hat{F}_{zi}, \hat{F}_{yt}$ の関

数となり、ただちに $\hat{F}_{zi}, \hat{F}_{yt}$ を N_i, V_i に変換できない。したがって、ここでは補遺のごとく、 $\hat{F}_{zi}, \hat{F}_{yt}$ を l についてべき級数展開し、低次項から高次項へ逐次変換する手法をとった。

このようにして、Table 1 に示す局所系の支配方程式と Table 2 の回転角評価式の各種組合せについて式 (1) に示す離散化式のべき級数係数に対応する微係数 Q''_i を求めた。

結果は、棒材の軸線の伸張変形を考慮する場合とこれを無視する場合とに分け、Table 5, 6 にまとめた。ここでは、近似の程度が明確になるように、剛体変位除去の手法で得られた各物理量に関する微係数を、厳密なものと考えられる Table 3 に示す Lagrange 表現の高次非線形微分方程式によるものと、低次から高次へと、一致する所まで比較する形で示している。ただし、Table 5, 6 では頁数の制限から、具体的に示した微係数としては、

Table 4 \hat{v}'_i expressed in terms of Mechanical Components.

a) Small Displacements	$\hat{v}'_i = \frac{M_i l}{2EI} + \frac{\hat{F}_{yi}}{6EI} l^2$
b) Beam-Column	$\hat{F}_{zi} \geq 0 \quad \gamma^2 = \hat{F}_{zi} /EI$ $\hat{v}'_i = \frac{M_i l}{EI} \frac{1}{\gamma l} \left(\frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l} \right) + \frac{\hat{F}_{yi} l^2}{EI (\gamma l)^2} \frac{1}{\sinh \gamma l} \left(\frac{\sinh \gamma l - \gamma l}{\sinh \gamma l} \right)$
c) Linearized Beam-Column	$\hat{F}_{zi} < 0 \quad \gamma^2 = \hat{F}_{zi} /EI$ $\hat{v}'_i = \frac{M_i l}{EI} \frac{1}{\gamma l} \left(\frac{1 - \cos \gamma l}{\sin \gamma l} \right) - \frac{\hat{F}_{yi} l^2}{EI (\gamma l)^2} \frac{1}{\sin \gamma l} \left(\frac{\sin \gamma l - \gamma l}{\sin \gamma l} \right)$
d) Theory ¹⁾ convergent to FD with FS	$\hat{v}'_i = \frac{M_i l}{2EI} + \frac{\hat{F}_{yi}}{6EI} \left(1 + \frac{\hat{F}_{zi}}{EA} \right) l^2$

Remarks: FD with FS = Finite Displacements with Finite Strains

Table 5 Derivatives of Physical Quantities.

(a) Derivatives of v_0

Theories		$v_0'' _i$	$v_0''' _i$	$v_0'''' _i$
Direct Lagrangians	e) Finite Displacements with Finite Strains	λs	$-\lambda \kappa c - V_i \kappa s / a$	$-\lambda^2 V_i c / b - \lambda \kappa^2 s + 2V_i \kappa^2 c / a - N_i \kappa^2 s / a - \lambda V_i^2 s / ab$
	f) Finite Displacements with Small Strains			$-\lambda V_i c / b - \lambda \kappa^2 s + 2V_i \kappa^2 c / a - N_i \kappa^2 s / a - V_i^2 s / ab$
With Separation of Rigid Body Displacements	a) Small Displacements			$-\lambda V_i c / b - \frac{3}{4} \lambda \kappa^2 s + \frac{3}{2} V_i \kappa^2 c / a - \frac{3}{4} N_i \kappa^2 s / a - V_i^2 s / ab$
	b) Beam-Column			$-\lambda V_i c / b - \lambda \kappa^2 s + \frac{3}{2} V_i \kappa^2 c / a - \frac{1}{2} N_i \kappa^2 s / a - V_i^2 s / ab$
	c) Linearized Beam-Column	$-\lambda V_i c / b - \frac{3}{4} \lambda \kappa^2 s + \frac{3}{2} V_i \kappa^2 c / a - \frac{3}{4} N_i \kappa^2 s / a - V_i^2 s / ab$		
	d) Theory ¹⁾ convergent to FD with FS	$-\lambda^2 V_i c / b - \frac{3}{4} \lambda \kappa^2 s + \frac{3}{2} V_i \kappa^2 c / a - \frac{3}{4} N_i \kappa^2 s / a - \lambda V_i^2 s / ab$		

Remarks: The following notations are used throughout Tables 5, 6
 $\kappa = M_i / EI, \lambda = \sqrt{g_0} = N_i / EA + 1, s = \sin \alpha, c = \cos \alpha, EA = a, EI = b$
 FD with FS = Finite Displacements with Finite Strains

Table 5 Continued

(b) Derivatives of α

Theories				$\alpha' _i$	$\alpha'' _i$	$\alpha''' _i$
Direct Lagrangians	e) Finite Displacements with Finite Strains			- κ	- V_i/b	$-\lambda V_i/\ell$
	f) Finite Displacements with Small Strains					$-\lambda N_i\kappa/b + V_i^2\kappa/ab$
With Separation of Rigid Body Displacements	Local Coordinate Expressions	a) Small Displacements	$\hat{v}_\theta = \hat{\alpha}$			$-N_i\kappa/b$
			$\hat{v}_\theta = \sin\hat{\alpha}$			$-\frac{3}{2}N_i\kappa/b$
			$\hat{v}_\theta = \tan\hat{\alpha}$			$-\frac{3}{2}N_i\kappa/b - \frac{1}{4}\kappa^3$
		b) Beam-Column	$\hat{v}_\theta = \hat{\alpha}$			$-\frac{3}{2}N_i\kappa/b + \frac{1}{2}\kappa^3$
			$\hat{v}_\theta = \sin\hat{\alpha}$			$-N_i\kappa/b$
			$\hat{v}_\theta = \tan\hat{\alpha}$			$-N_i\kappa/b - \frac{1}{4}\kappa^3$
	c) Linearized Beam-Column	$\hat{v}_\theta = \hat{\alpha}$	$-N_i\kappa/b + \frac{1}{2}\kappa^3$			
		$\hat{v}_\theta = \sin\hat{\alpha}$	$-\frac{3}{2}\lambda N_i\kappa/b + \frac{3}{2}V_i^2\kappa/ab$			
		$\hat{v}_\theta = \tan\hat{\alpha}$	$-\frac{3}{2}\lambda N_i\kappa/b + \frac{3}{2}V_i^2\kappa/ab - \frac{1}{4}\kappa^3$			
	d) Theory 1) convergent to FD with FS	$\hat{v}_\theta = \hat{\alpha}$	$-\frac{3}{2}\lambda N_i\kappa/b + \frac{3}{2}V_i^2\kappa/ab + \frac{1}{2}\kappa^3$			
		$\hat{v}_\theta = \sin\hat{\alpha}$				
		$\hat{v}_\theta = \tan\hat{\alpha}$				

(c) Derivatives of N

Theories				$N' _i$	$N'' _i$	$N''' _i$
Direct Lagrangians	e) Finite Displacements with Finite Strains			- $V_i\kappa$	- $N_i\kappa^2 - V_i^2/b$	$-N_i\kappa^2 - \lambda V_i^2/b$
	f) Finite Displacements with Small Strains					$V_i\kappa^3 - 4\lambda V_i N_i\kappa/b + V_i^3\kappa/ab$
With Separation of Rigid Body Displacements	Local Coordinate Expressions	a) Small Displacements	$\hat{v}_\theta = \hat{\alpha}$			$V_i\kappa^3 - 4V_i N_i\kappa/b$
			$\hat{v}_\theta = \sin\hat{\alpha}$			$V_i\kappa^3 - \frac{9}{2}V_i N_i\kappa/b$
			$\hat{v}_\theta = \tan\hat{\alpha}$			$\frac{3}{4}V_i\kappa^3 - \frac{9}{2}V_i N_i\kappa/b$
		b) Beam-Column	$\hat{v}_\theta = \hat{\alpha}$			$\frac{3}{2}V_i\kappa^3 - \frac{9}{2}V_i N_i\kappa/b$
			$\hat{v}_\theta = \sin\hat{\alpha}$			$V_i\kappa^3 - 4V_i N_i\kappa/b$
			$\hat{v}_\theta = \tan\hat{\alpha}$			$\frac{3}{4}V_i\kappa^3 - 4V_i N_i\kappa/b$
	c) Linearized Beam-Column	$\hat{v}_\theta = \hat{\alpha}$	$\frac{3}{2}V_i\kappa^3 - 4V_i N_i\kappa/b$			
		$\hat{v}_\theta = \sin\hat{\alpha}$	$V_i\kappa^3 - \frac{9}{2}\lambda V_i N_i\kappa/b + \frac{3}{2}V_i^3\kappa/ab$			
		$\hat{v}_\theta = \tan\hat{\alpha}$	$\frac{3}{4}V_i\kappa^3 - \frac{9}{2}\lambda V_i N_i\kappa/b + \frac{3}{2}V_i^3\kappa/ab$			
	d) Theory 1) convergent to FD with FS	$\hat{v}_\theta = \hat{\alpha}$	$\frac{3}{2}V_i\kappa^3 - \frac{9}{2}\lambda V_i N_i\kappa/b + \frac{3}{2}V_i^3\kappa/ab$			
		$\hat{v}_\theta = \sin\hat{\alpha}$				
		$\hat{v}_\theta = \tan\hat{\alpha}$				

並進変位の一方の成分 v_θ 、回転成分 α 、軸力成分 N と 曲げモーメント M とである。残りの並進変位成分 w_θ とせん断力成分 V については、一様性がそれぞれ v_θ および N と同様であるので表示を省略している。さらに、軸線の伸張変形を無視した Table 6 の場合、並進変位成分 v_θ 以外の物理量については、軸線の伸張を考慮した Table 5 の結果と同一であるため、 v_θ に関する微係数のみを示している。また Table 5 (a), (d), Table 6 (a) では、表示したオーダーまでの微係数が Table 2 の回転角評価式によらないので、これによる区分を省略している。さらに、軸線の伸張変形を無視すると Table

1) d) の式は、a) 微小変位の式と一致するので Table 6 では表示を省略している。

5. 考 察

(1) 要素分割長を無限小としたときの収束解

要素分割長を無限小とした極限では局所座標系 II の z 軸は変形後の棒材軸線の接線となり、局所座標系 I と一致する。したがって、局所座標系 II を用いた場合の剛体変位除去の手法の要素分割長無限小での収束解は、局所座標系 I の結果¹⁾より予想できるが、ここでは一応、理論的に確認しておく。

Table 5 Continued

(d) Derivatives of M

Theories		$M' _i$	$M'' _i$	$M''' _i$
Direct Lagrangians	e) Finite Displacements with Finite Strains	λV_i	$\lambda N_i \kappa - V_i^2 \kappa / a$	$\lambda^2 V_i N_i / b - \lambda V_i \kappa^2 - 3 V_i N_i \kappa^2 / a - \lambda V_i^3 / ab$
	f) Finite Displacements with Small Strains			$V_i N_i / b - V_i \kappa^2$
With Separation of Rigid Body Displacements	Local Coordinate Expressions	a) Small Displacements	V_i	$N_i \kappa$
		b) Beam-Column		
		c) Linearized Beam-Column	$V_i N_i / b - \frac{3}{4} V_i \kappa^2$	
		d) Theory ¹⁾ convergent to FD with FS	λV_i	$\lambda N_i \kappa - V_i^2 \kappa / a$

Table 6 Derivatives of Physical Quantities with Inextensional Deformations.

(a) Derivatives of v_0

Theories		$v_0' _i$	$v_0'' _i$	$v_0''' _i$	
Direct Lagrangians	g) Inextensional Finite Displacements	s	-κc	$-V_i c / b - \kappa^2 s$	
With Separation of Rigid Body Displacements	Local Coordinate Expressions			a) Small Displacements	$-V_i c / b - \frac{3}{4} \kappa^2 s$
				b) Beam-Column	$-V_i c / b - \kappa^2 s$
				c) Linearized Beam-Column	$-V_i c / b - \frac{3}{4} \kappa^2 s$

(a') Fourth Order Derivatives of v_0

Theories	$v_0^{(4)} _i$	
g) Inextensional Finite Displacements	$-N_i \kappa c / b - 3 V_i \kappa s / b + \kappa^3 c$	
b) Beam-Column	$\hat{\nu}_i = \hat{a}$	$-N_i \kappa c / b - 3 V_i \kappa s / b + \kappa^3 c$
	$\hat{\nu}_i = \sin \hat{a}$	$-N_i \kappa c / b - 3 V_i \kappa s / b + \frac{1}{2} \kappa^3 c$
	$\hat{\nu}_i = \tan \hat{a}$	$-N_i \kappa c / b - 3 V_i \kappa s / b + 2 \kappa^3 c$

剛体変位除去の手法の収束解の性質を知るには、文献 1) に示すように、式 (1) に示す離散化式の 1 次のべき級数係数 $Q_i^{(n)}$ に関して、Lagrange 表現の高次非線形支配微分方程式から得られるものとの一致性状を調べればよい。Table 5, 6 から明らかなように、軸線の伸張変形を考慮する場合、Table 2 の角度評価式の差によらず、局所系の支配方程式として、a) 微小変位の式、b) はり・柱の式、c) 線形化はり・柱の式を用いるときは、討議⁶⁾で問題となった断面力を含め、物理量の 1 次⁶⁾のべ

き級数係数について、すべて、Table 3 の f) 微小ひずみ・有限変位の式によるものと一致する。したがって、a)~c) の局所系の式を用いた場合は、いずれも、f) 微小ひずみ・有限変位の式の解に収束する。また、局所系の式 d) の場合は、同様の検討により、e) 有限ひずみ・有限変位の式の解に収束することがわかる。さらに軸線の伸張変形を無視する場合は、Table 1 のどの局所系の式を用いても、g) 軸線不伸張の有限変位の式の解に収束する。

以上、最初の予想どおり、局所座標系 II を用いた場合の収束解に関する結果は、すべて、局所座標系 I に関する結果と一致することが確認された。

(2) 要素分割長が有限の場合の精度に関する検討

要素分割長が有限の場合、剛体変位除去の手法の収束解に対する精度は、本手法によって得られる式 (1) の 1 次以上のべき級数係数が、(1) で示した収束解に対して、いかに一致しているかを検討することで知ること

Table 7 Coincidence of the Order of Derivatives.

Convergent Solutions	Theories used for Local Coordinates	Evaluation of Small Rotational Angles	V, N	M	ν_0, ω_0	α	
f) Finite Displacements with Small Strains	a) Small Displacements	$\partial \delta'_0 = \hat{\alpha}$	2(2)	2(1)	2(1)	2(2)	
		$\partial \delta'_0 = \sin \hat{\alpha}$					
		$\partial \delta'_0 = \tan \hat{\alpha}$					
	b) Beam Column	$\partial \delta'_0 = \hat{\alpha}$	3(3)	2(2)	2(1)	3(3)	
		$\partial \delta'_0 = \sin \hat{\alpha}$	2(2)				2(2)
		$\partial \delta'_0 = \tan \hat{\alpha}$					
c) Linearized Beam Column	$\partial \delta'_0 = \hat{\alpha}$	3(3)	2(2)	2(1)	3(3)		
	$\partial \delta'_0 = \sin \hat{\alpha}$	2(2)				2(2)	
	$\partial \delta'_0 = \tan \hat{\alpha}$						
e) Finite Displacements with Finite Strains	d) Theory ¹⁾ convergent to FD with FS	$\partial \delta'_0 = \hat{\alpha}$	2(2)	2(1)	2(1)	2(2)	
g) Inextensional Finite Displacements	a) Small Displacements	$\partial \delta'_0 = \hat{\alpha}$	2(2)	2(1)	2(2)	2(2)	
		$\partial \delta'_0 = \sin \hat{\alpha}$					
		$\partial \delta'_0 = \tan \hat{\alpha}$					
	b) Beam Column	$\partial \delta'_0 = \hat{\alpha}$	3(3)	2(2)	3(3)	3(3)	
		$\partial \delta'_0 = \sin \hat{\alpha}$	2(2)				2(2)
		$\partial \delta'_0 = \tan \hat{\alpha}$					
c) Linearized Beam Column	$\partial \delta'_0 = \hat{\alpha}$	3(3)	2(2)	2(2)	3(3)		
	$\partial \delta'_0 = \sin \hat{\alpha}$	2(2)				2(2)	
	$\partial \delta'_0 = \tan \hat{\alpha}$						

(): with Adoption of Local Coordinate I
 Remarks: FD with FS = Finite Displacements with Finite Strains

ができる。

Table 5, 6の結果をもとに、各物理量について、収束解と一致する最高次のべき級数係数を f) 微小ひずみ・有限変位の式、e) 有限ひずみ・有限変位の式、ならびに g) 軸線不伸張の有限変位の式のそれぞれの解に収束するグループに分け Table 7 に示す。さらに、局所座標系の違いによる精度の差を検討するために、文献 1) により得られた局所座標系 I を用いたときの結果を Table 7 の括弧内に記入している。

Table 7 を使い、局所座標系の影響を中心に、局所系の支配方程式、および、剛体回転除去後の回転角評価式が剛体変位除去の手法の精度に及ぼす影響について考察する。

まず、局所座標系の差による影響を検討する。Table 7 からわかるように局所座標系 II を用いた場合、局所座標系 I に比べ、剛体変位除去の手法による各物理量のべき級数係数の収束解に対する一致性状は、全般的によく、いずれの局所系の支配方程式、および回転角評価式を用いても 2 次の近似解となり得る。特に、局所系の式とし

て、a) 微小変位の式や d) の有限ひずみ・有限変位の式の解に収束する式等、非常に簡略化した式でも、f) 微小ひずみ・有限変位の式の解および e) 有限ひずみ・有限変位の式の解に対し、2 次の近似解となることは注目されよう。また、軸線の伸張変形が無視できる場合は、これを考慮する場合に比べ、微係数の一致性状は向上するが、全体としては 2 次の近似解にとどまっている。

一方座標系 I の場合は、すでに文献 1) にも述べているとおり、軸線の伸張変形が無視でき、しかも局所系の式として、b) はり・柱の式や、c) 線形化はり・柱の式を用いる場合のみ、2 次の近似解で、他はすべて 1 次の近似解となる。1 次の近似解でも、分割長を十分小さくしていった場合には、理論的には収束することが示されるが、実際の数値計算では誤差累積の関係上、少なくとも 2 次以上の近似解となる必要がある⁴⁾。この意味で局所座標系 I の場合は、軸線の伸張変形が小さいか、これを無視できるという前提で、局所系の式に、b) はり・柱の式や c) 線形化はり・柱の式を用いるという場合に限ってば、十分な解析が可能である。特に、局所系の

式として、低次非線形の d) の式を用いて有限ひずみ問題の解析を行う場合ならびに、a) 微小変位の式を用いる場合には局所座標系Ⅱを用いる必要がある。

次に、局所系の支配方程式の差が精度に及ぼす影響について考察する。各物理量の微係数の収束解に対する一形状をみると、局所座標系の差によらず、f) 微小ひずみ・有限変位の式の解に収束するグループでは、b) はり・柱の式、c) 線形化はり・柱の式を用いた場合の、また、g) 軸線不伸張の有限変位の式の解に収束するグループでは、b) の式を用いた場合の一形状がそれぞれ最もよい。なお、軸線不伸張のグループでは、b) の式を用いた場合と c) の式を用いた場合の差は小さい。以上の一形状と取り扱いの容易さを併せて考慮すると、局所系の式としては、非線形項を含まず、a) 微小変位の式より若干複雑なだけの c) 線形化はり・柱の式を用いるのが最も有効であろう。ただ局所座標系Ⅱを用いる場合には、前述したように、a) 微小変位の式によっても、収束解に対して 2 次の近似解となるため、十分な解析が可能と考えられる。

さらに剛体回転除去後の回転角評価式が解析精度に及ぼす影響について検討する。この影響は、局所座標系Ⅰ、Ⅱを通じて、局所系の式として、b) はり・柱の式と c) 線形化はり・柱の式を用いた場合に現われており、いずれも最も単純な線形の評価式 $\hat{\delta}_0 = \hat{\alpha}$ を用いたときの精度がよいことを示している。したがって、実際の解析では、精度と簡便さの両面から、すべて線形の回転角評価式を用いるのが適当であるといえる。以上の角度評価に関する結論は、局所系の支配方程式として、あくまで、Table 1 に示すような簡略化した式を用いることが前提で、より精度のよい局所系の支配方程式を用いた場合には、当然のこととして、非線形の評価式により精度が向上することも考えられる¹⁾。しかしながら、b) はり・柱の式以上の非線形式を用いると局所系での離散化式自体を求めるのが困難となり、支配微分方程式の簡略化を目的とした剛体変位除去の手法の意味が薄れる。

6. まとめ

通常、剛体変位除去の手法による有限変位解析では、局所座標系として、Fig. 1 (b) に示す変形後の有限要素節点を結ぶ割線座標系が最も多く用いられる。本論文では、この局所座標系を用いた場合の精度を、従来採用されている局所系での各種支配方程式ならびに剛体回転除去後の各種回転角評価式の組合せについて理論的に調べた。さらに、上記の結果に、すでに文献 1) で得られているもう 1 つの局所座標系である、Fig. 1 (a) に示す接線座標系に関する結果に若干追加したものを含め、平面骨組解析における実用的な剛体変位除去の手法の基本

的な精度特性を総合的に検討した。これらの検討から、平面骨組の有限変位解析に剛体変位除去の手法を適用し、効率的な計算を実施するための重要な指針は、ほぼ、明らかになったと考えられる。得られた結果を以下にまとめる。

なお、本論文では平面骨組を対象としているが、平面骨組は立体骨組や板殻の変形を平面内に限定した場合に相当するので、得られた結果の大部分は剛体変位除去の手法による立体骨組や板殻の解析にも適用できるものと考えられる。

(1) 局所座標系としては、座標系Ⅱを用いた方が、座標系Ⅰを用いた場合より全体的に精度がよく、従来提案されているどのような局所系の式や回転角評価式を用いても 2 次の近似解となり得る。したがって、通常の剛性法による解析では、座標系Ⅱを用いるのが有利である。特に、局所座標系Ⅱの場合には、a) 微小変位の式や、d) 有限ひずみ・有限変位の式の解に収束する式のような非常に簡略化した局所系の式を用いる場合にも収束解に対して 2 次の近似解となることは注目される。

(2) 局所座標系Ⅰは、伝達マトリックス法等で用いられるが、この局所座標系では、f) 微小ひずみ・有限変位の式の解ならびに、e) 有限ひずみ・有限変位の式の解に対して、いずれの局所系の式を用いても高々 1 次の近似解である。したがって、これらの場合、数値計算では、誤差が累積し、十分な解が得られない場合もあり得る。ただ、軸線の伸張変形が微小である場合には局所系の式に b) はり・柱の式や、c) 線形化はり・柱の式を用いると 2 次の近似解となるため、有効である。

(3) 局所系の支配方程式としては、b) はり・柱の式の精度が最もよい。しかしながら、c) 線形化はり・柱の式がほぼ同程度の精度を有していることと、式の取り扱いが格段容易であることを考慮すると、実際の解析では、c) の式を局所系の式として用いるのが有利であろう。なお、局所座標系Ⅱを用いる場合には、(1) で述べた理由により、a) 微小変位の式や、d) 有限ひずみ・有限変位の式の解に収束する式を用いた場合も有効である。

(4) 剛体回転除去後の回転角の評価式としては、局所座標系Ⅰ、Ⅱを通じ、線形の評価式を用いた場合の精度が、他の非線形の評価式を用いた場合より優れている。したがって、精度と取り扱いやすさの両面から、従来の実用的な解析に用いられている局所系の支配方程式に対して、すべて線形の回転角評価式を用いるのがよい。

補遺 \hat{F}_{zi} , \hat{F}_{yi} の N_i , V_i への変換

ここでは、局所系の式に b) はり・柱の式、剛体回転除去後の回転角の評価式に $\hat{\delta}_0 = \hat{\alpha}$ を用いた場合を例と

して説明する。

まず、Table 4 より、 v_0 を要素長 l に関するべき級数展開し、線形の回転角評価式を用いれば、

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\kappa}{2} l + \frac{1}{6b} \hat{F}_{yi} l^2 - \frac{\kappa}{24b} \hat{F}_{zi} l^3 + O(l^4) \dots\dots\dots (A)$$

ここに、 $\kappa = M_i/b$, $b = EI$

式 (A) より、 $\sin \hat{\alpha}_i$, $\cos \hat{\alpha}_i$ を l のべき級数展開で表示すると次のようになる。

$$\sin \hat{\alpha}_i = \frac{\kappa}{2} l + \frac{1}{6b} \hat{F}_{yi} l^2 - \left(\frac{\kappa}{24b} \hat{F}_{zi} + \frac{\kappa^3}{48} \right) l^3 + O(l^4)$$

$$\cos \hat{\alpha}_i = 1 - \frac{\kappa^2}{8} l^2 - \frac{\kappa}{12b} \hat{F}_{yi} l^3 + O(l^4) \dots\dots\dots (B \cdot a, b)$$

式 (B) を式 (5) に代入すれば、

$$\begin{aligned} \hat{F}_{zi} &= N_i - \frac{\kappa}{2} V_i l - \left(\frac{\kappa^2}{8} N_i + \frac{1}{6b} V_i \hat{F}_{yi} \right) l^2 \\ &\quad - \left(\frac{\kappa}{12b} N_i \hat{F}_{yi} - \frac{\kappa}{24b} V_i \hat{F}_{zi} - \frac{\kappa^3}{48} V_i \right) l^3 + O(l^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_{yi} &= V_i + \frac{\kappa}{2} N_i l + \left(\frac{1}{6b} N_i \hat{F}_{yi} - \frac{\kappa^2}{8} V_i \right) l^2 \\ &\quad - \left[\left(\frac{\kappa}{24b} \hat{F}_{zi} + \frac{\kappa^3}{48} \right) N_i + \frac{\kappa}{12b} V_i \hat{F}_{yi} \right] l^3 + O(l^4) \end{aligned} \dots\dots\dots (C \cdot a, b)$$

上式は l の 1 次項までの展開において、 \hat{F}_{zi} , \hat{F}_{yi} は N_i , V_i で表わされているが、それより高次項では、係数に \hat{F}_{zi} , \hat{F}_{yi} が含まれている。したがって、次のような手法により逐次高次項を N_i , V_i で表わす。

式 (C) より、

$$\hat{F}_{zi} = N_i - \frac{\kappa}{2} V_i l + O(l^2)$$

$$\hat{F}_{yi} = V_i + \frac{\kappa}{2} N_i l + O(l^2) \dots\dots\dots (D \cdot a, b)$$

であるから、これを式 (C) の右辺に代入すれば式 (C) は次式のように l の 3 次項まで N_i , V_i で表わされる。

$$\hat{F}_{zi} = N_i - \frac{\kappa}{2} V_i l - \left(\frac{\kappa^2}{8} N_i + \frac{1}{6b} V_i^2 \right) l^2$$

$$- \left(\frac{\kappa}{8b} V_i N_i - \frac{\kappa^3}{48} V_i \right) l^3 + O(l^4)$$

$$\hat{F}_{yi} = V_i + \frac{\kappa}{2} N_i l + \left(\frac{1}{6b} V_i N_i - \frac{\kappa^2}{8} V_i \right) l^2$$

$$- \left(\frac{\kappa}{12b} V_i^2 - \frac{\kappa}{24b} N_i^2 + \frac{\kappa^3}{48} N_i \right) l^3 + O(l^4)$$

$\dots\dots\dots (E \cdot a, b)$

さらに、このようにして得られた \hat{F}_{zi} , \hat{F}_{yi} の 3 次までの展開式を、続いて式 (C) の右辺に代入すれば、 l の 5 次項まで N_i , V_i で表わされる。これを繰り返していけば、理論上無限項まで N_i , V_i で表わされるが、本検討で必要なのは初めの数項であり、上記の操作を高々数回繰り返せばよい。

参 考 文 献

- 1) 後藤芳顕・長谷川彰夫・西野文雄：平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察，土木学会論文報告集，第 331 号，pp.33~44，1983 年 3 月。
- 2) Goto, Y., Hasegawa, A. and Nishino, F. : Accuracy and Convergence of the Separation of Rigid Body Displacement for Plane Curved Frames, Proc. of JSCE, No. 344, I-1, pp.67~77, April, 1984.
- 3) Goto, Y., Hasegawa, A., Nishino, F. and Matsuura, S. : Accuracy and Convergence of the Separation of Rigid Body Displacements for Space Frames, Proc. of JSCE, No. 356, I-3, pp.109~119, April, 1985.
- 4) 後藤芳顕・山下時治・春日井俊博・松浦 聖：平面棒材の有限変位解析の精度に関する数値的検証，構造工學論文集，Vol. 33 A, pp.15~26，1987 年 3 月。
- 5) Ai, M. and Nishino, F. : On Convergence of Geometrically Nonlinear Discretization at Limit Element Division, Proc. of JSCE, No. 374, I-6, Oct., 1986.
- 6) 後藤芳顕・長谷川彰夫・西野文雄：阿井正博・村上 淳共著“伝達関数法による面内曲げ有限変位問題の解析”への討議，土木学会論文集，第 356 号，pp.583~585，1985 年 4 月。

(1987. 4. 20・受付)