

## 半無限弾性体上の円板の水平・ロッキング連成振動

COUPLED HORIZONTAL AND ROCKING VIBRATION OF  
CIRCULAR DISK ON ELASTIC HALF SPACE

東原 紘道\*

By Hiromichi HIGASHIHARA

Coupled vibrations, in which horizontal and rocking components coexist, of circular disk on elastic half space are analyzed rigorously by means of the direct integral equation method. The conventional methods for the dynamic compliance theory of circular disk have depended exclusively upon the relaxed condition of contact. In the circumstances, the horizontal and the rocking modes were artificially separated; consequently, they could solve the coupled vibrations only approximately, and there was noticeable difference among the results obtained. One can solve this problem rigorously by means of the direct integral equation method which was established recently. In this paper the direct integral equation for the coupled vibrations is presented. It is solved numerically, and the stress of contact as well as the dynamic compliance are determined highly accurately.

*Keywords*: dynamic compliance, footings, coupled vibration

## 1. はじめに

半無限弾性体上にある剛体円板の振動問題は、耐震工学の1つの理論的基礎を与えるものである。本論文はこのうちで実用的に最も重要なものの1つであり、しかも既往の研究においても今なお完全な解明をみていない水平並進モードと鉛直ロッキングモードの連成振動を、厳密に定式化し、さらにそれに基づいて応答計算を行うものである。

表面加振に対する半無限弾性体の動的コンプライアンス問題の解析的研究は、Lambによる点加振問題の解決のあとは、主に剛体円板についてなされてきた。剛体円板の4つのモードのうち、ねじれ振動は定式化が最も容易であり、最初に厳密な定式化がなされている。しかし多くの研究において対象とされたのは鉛直振動とりわけその並進モードである。

この初期の研究は、本来は理論的に決定されるべき接触圧力を仮定するものであった<sup>1),2)</sup>。1966年に至ってRobertsonはこの仮定を取り除いて厳密に定式化することに成功した<sup>3)</sup>。Dual integral equations法の登場である。これは適用性の広い手法であって、その後の短期間

のあいだに、剛体円板の残るすべてのモードがこれを用いて定式化された<sup>4),5)</sup>。

いうまでもなくこのモデルは、現実の問題を相当に単純化したものである。しかし無限の広がりをもつ領域中での波動問題を数値解析しようとする、有限領域の問題や、無限領域であっても静的な問題にはなかった種々の困難な問題が生じるので、結果の信頼性が不十分ことが多い。したがってこのような問題では、たとえ強い単純化がなされたとしても、解析解の意義は大きい。

しかしそれでもなお dual integral equations法はいくつかの看過できない制約に服している。その1つが接触条件の問題である。すなわちこの方法は、接触条件としては、もっぱら緩和された応力条件を前提するものである。具体的には、鉛直モードにおいては接触面のせん断応力を0と仮定し、それに応じて接触面における円板と弾性体の水平変位の適合条件を無視する。同様に水平並進モードにおいては接触面の垂直応力を0と仮定し、接触面における鉛直変位の適合条件を無視する(ただし水平ねじれ振動のみは例外である。このモードにおいては垂直応力が厳密に0であるので、上記の仮定は不要である)。その他の接触条件、たとえば完全固着条件では、上記の仮定は許されない、dual integral equations法で解くことは困難である。

\* 正会員 工博 埼玉大学助教授 工学部建設工学科  
(〒338 浦和市下大久保 255 番地)

ここで現実の構造物の振動に目を向けてみよう。水平成分が優勢な地盤振動を受ける構造物の支配的な振動モードはロッキングである。しかしこのモードは原則として水平並進振動を伴い、両者の連成として現われる。

この振動様式は、緩和された接触条件では正確に捉えることができない。この接触条件下では、ロッキング振動と水平並進振動は必然的に分離され、連成の余地はないからである。したがって dual integral equations 法でこの振動様式を厳密に解くことは不可能である。

このため、この振動様式の解析は、緩和された接触条件下での解を利用した技巧によって、近似的に行われてきた<sup>6),7)</sup>。そこでその考え方を2.で取り上げて、その近似の内容を点検する。

次に厳密な定式化を試みる。Dual integral equations 法の体系とは別に、より一般的な解析手法として、接触面変位と接触応力を直接かつ陽な形のまま積分変換で関係づける、直接積分方程式法が提案されている<sup>8)</sup>。この方法は、緩和された接触条件については、剛体円板のすべての振動モードに適用され、その解析に成功している。また必要な公式はすべて明示されている<sup>9)~12)</sup>。すなわち直接積分方程式法は dual integral equations 法の適用範囲をカバーし、しかもより多くの有用な情報をもたらすことができるものである。

しかしこの方法の意義はそこにとどまらない。その一例が、上記の各種モードの連成振動を厳密に解くことができることである。このうち、接触面の完全固着条件のもとで生じる、鉛直並進振動と軸対称水平振動の連成についてはすでに解かれている<sup>13)</sup>。この方法をロッキング振動と水平振動の連成振動に拡張するのが本論文の目標である。このために3.において連成振動の基本方程式を誘導する。得られた方程式の積分核は、動的コンプライアンス問題特有の特異性をもっている。そこで4.において積分核の計算公式を求める。積分方程式の計算は5.において行う。解の精度の吟味および既往の研究の結果との照合を経て、最終的に連成モードの動的コンプライアンス関数が確定される。

2. 近似解法の性質

本章では連成モードの近似解法の検討を行う。しかし、問題点の理解を容易にするために、まず直接積分方程式法による厳密解法の決定関係をみておこう。

最初に円板の変位量の水平成分  $\Delta$  と回転角  $\phi$  が与えられると、これに対応する接触面変位 ( $u, v, w$ ) が定まる。ここで円板と弾性体の変位は連続であるとする。接触面のせん断応力を  $\tau_1, \tau_2$ 、垂直応力を  $\sigma$  とすると、次のような基本方程式が得られる。ここに  $\hat{G}$  は線形の積分演算子であり、詳細は後出の式 (6) で与えられる。

$$\begin{cases} u = \hat{G}_{11}\tau_1 + \hat{G}_{12}\tau_2 + \hat{G}_{13}\sigma \\ v = \hat{G}_{21}\tau_1 + \hat{G}_{22}\tau_2 + \hat{G}_{23}\sigma \\ w = \hat{G}_{31}\tau_1 + \hat{G}_{32}\tau_2 + \hat{G}_{33}\sigma \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

これを解いて接触応力を定める。

この接触応力を用いると、連成モードの動的コンプライアンス行列  $C$  が次のように決定される。すなわち接触応力を接触面上で積分して水平力  $H$  と回転モーメント  $M$  が求まる。これは次式によって複素剛性行列  $K$  を定める。

$$\begin{Bmatrix} H \\ M \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \Delta \\ \phi \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

$K$  の逆行列として  $C$  が決定される。

これに対して、dual integral equations 法に基づいた近似解法は次の手順による。まずロッキングモードを計算する。すなわち円板の運動と適合するように鉛直変位を指定する。さらに接触面でのせん断応力を0と仮定する。この条件のもとで接触圧  $\sigma$  および接触面における弾性体の水平変位  $u_M$  が計算される。この  $u_M$  は剛体円板の水平変位とは違ったものである。

同様に水平並進モードを計算する。そのために円板と一致するように水平変位を指定する。しかし同時に接触面での垂直応力=0と仮定する。この結果として接触面でのせん断応力  $\tau$  および接触面における弾性体の鉛直変位  $w_H$  が計算される。この  $w_H$  も剛体円板の鉛直変位とは違っている。その一例として、静的な場合の  $u_M$  と  $w_H$  の形状を Fig.1 の実線で示す。ただし変位の大きさは規格化されている。R は円板の半径である。

図からも明らかのように、 $u_M$  と  $w_H$  は剛体円板のもつ直線的な変位とは全く異なっている。しかし以下でみる方法では、これが図中の破線で示す直線で代用される。ここに第1の近似が導入されている。この誤差は小さいものでないので、適合性の吟味が必要である。

近似の具体的な方法は、論理的に唯一に定まることはなく、任意性がある。このうち実際に用いられているのは、接触応力の  $\sigma$  もしくは  $\tau$  を重み関数として、 $w_H$  および  $u_M$  を平均したものである。この方法によると、近

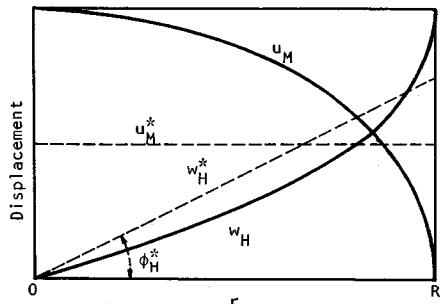


Fig.1 Approximation of Displacement.

似の回転角  $\phi_H^*$  と水平変位  $u_H^*$  は次式で計算される。

$$\begin{cases} H u_H^* = \iint \tau \cdot u_H dS \\ M \phi_H^* = \iint \sigma \cdot w_H dS \end{cases} \dots\dots\dots(3)$$

ここで  $H$  は  $\tau$  の合力,  $M$  は  $\sigma$  の合モーメントであり, また積分は接触面全体にわたる。

$u_H$  は  $M$  に比例し  $w_H$  は  $H$  に比例するので,  $u_H^*$  も  $M$  に比例し  $\phi_H^*$  は  $H$  に比例する。その比例係数を, Luco に倣って  $C_{HM}$ ,  $C_{MH}$  と書いて, これをもって動的コンプライアンス行列の連成項の近似値とみなす。ここに本質的な近似が導入された。

ここでもし現象が保存的であれば, 緩和された接触条件に対する上記の2組の解に対して相反作用の定理が適用できる結果,  $H u_H^*$  と  $M \phi_H^*$  は相等しい。したがって  $C_{HM}$  と  $C_{MH}$  は一致する。特に静的な場合にこの関数は厳密に成り立つ。ただしこの関係はあくまで緩和された接触条件下で成立するものであり, 固着条件のもとで厳密に計算された動的コンプライアンス行列がもつ性質とは別問題である。いずれにせよ上述した  $C_{HM}$  と  $C_{MH}$  の誘導自体は相反作用の定理と無関係になされていることに注意すべきである。

上に紹介した方法による計算結果を Fig. 2 に示す<sup>6),7)</sup>。計算条件はポアソン比  $\nu=1/3$  である。2つの研究が同一の方法によっているにもかかわらず, その結果は大きく異なっている。実線が Luco の結果であり, 破線が Veletsos のものである。数値は後述の定義に従って無次元化されている。特に無次元振動数は  $bR$  に等しい。

Veletsos は  $C_{HM}$  と  $C_{MH}$  が常に一致するとみなして, その一方のみを与えている。しかし Luco によると, 静的な場合を除いて,  $C_{HM}$  と  $C_{MH}$  は大きく異なっている。これの主要な原因は, 後者が重み関数として, もっぱら静的な場合の  $\sigma$  と  $\tau$  を用いたことに帰することができる。もっとも, すでにみたように, 重み関数の選択には

もともと任意性がある確とした物理的根拠があるわけではないので, 図の結果をもって一概に Veletsos の結果の方が精度が高いということとはできない。その精度の優劣は最終的には厳密解との対照によってのみなされ得るものである。これは5.において実行される。

### 3. 積分方程式の誘導

本章および次章において, 連成モードの厳密解を与える直接積分方程式法の基本公式を求める。

円板の中心線を  $z$  軸とする円柱座標  $(r, \theta, z)$  をとり, 半無限弾性体が  $z \geq 0$  となるようにする。弾性体の振動の一般解は妹沢によって与えられている<sup>14)</sup>。以下では振動モードとして水平並進とロッキングを対象とするので,  $\theta$  に関するフーリエ級数の1次の項のみを考える。

$z=0$  における変位成分を

$$(u_r \cos \theta, u_\theta \sin \theta, w \cos \theta) e^{i\omega t}$$

と書き, 応力成分を

$$(\tau_r \cos \theta, \tau_\theta \sin \theta, \sigma \cos \theta) e^{i\omega t}$$

と書くと, 妹沢の公式によって,

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \int_0^\infty \left\{ -(A-\beta B) \frac{\partial J_1(kr)}{\partial r} + C \frac{J_1(kr)}{r} \right\} dk \\ u_\theta &= \int_0^\infty \left\{ (A-\beta B) \frac{J_1(kr)}{r} - C \frac{\partial J_1(kr)}{\partial r} \right\} dk \\ w &= \int_0^\infty (aA - k^2 B) J_1(kr) dk \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_r}{\mu} &= \int_0^\infty \left[ 2aA - (k^2 + \beta^2) B \right] \frac{\partial J_1(kr)}{\partial r} - \beta C \frac{J_1(kr)}{r} dk \\ \frac{\tau_\theta}{\mu} &= \int_0^\infty \left[ -2aA - (k^2 + \beta^2) B \right] \frac{J_1(kr)}{r} \\ &\quad + \beta C \frac{\partial J_1(kr)}{\partial r} dk \\ \frac{\sigma}{\mu} &= \int_0^\infty \{ -(k^2 + \beta^2) A + 2k^2 \beta B \} J_1(kr) dk \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

ここに,  $A \sim C$  は  $k$  の関数であって未知量である。また  $a^2 = \rho\omega / (\lambda + 2\mu)$ ;  $b^2 = \rho\omega / \mu$ ;  $\lambda$  と  $\mu$  は Lamé の弾性定数;  $\rho$  は密度;  $\omega$  は振動数;  $J_m$  は  $m$  次のベッセル関数;  $\alpha = \sqrt{k^2 - a^2}$ ;  $\beta = \sqrt{k^2 - b^2}$ 。

式(5)にフーリエ・ベッセルの積分定理を適用して, 未知関数  $A \sim C$  を応力成分の積分変換で表わし, これを式(4)に代入すれば, これらの関数は消去されて, 変位と接触応力との関係が得られる。

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ w \end{Bmatrix}_{(r)} = \frac{1}{4\mu} \int_0^R s [G(r; s)] \begin{Bmatrix} \tau_r \\ \tau_\theta \\ \sigma \end{Bmatrix}_{(s)} ds \dots\dots\dots(6)$$

ここに積分核  $[G]$  は  $3 \times 3$  型行列であって,

$$G_{11} = g_2(r; s) + g_0(r; s) - g_1(r; s) - g_1(s; r)$$

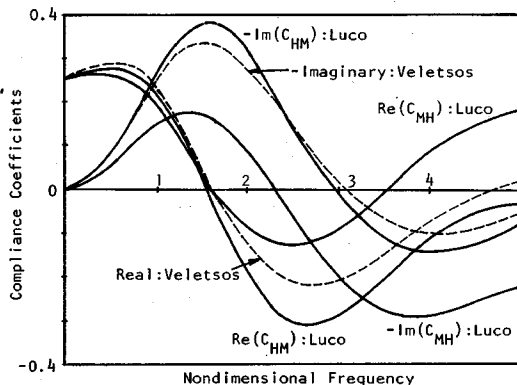


Fig. 2 Compliance Coefficients by the Conventional Methods.

$$\begin{aligned}
 G_{12} &= g_2(r; s) - g_0(r; s) - g_1(r; s) + g_1(s; r) \\
 G_{13} &= 2\{h_0(r; s) - h_2(r; s)\} \\
 G_{22} &= g_2(r; s) + g_0(r; s) + g_1(r; s) + g_1(s; r) \\
 G_{23} &= 2\{h_0(r; s) + h_2(r; s)\} \\
 &\dots\dots\dots(7)
 \end{aligned}$$

$$G_{33} = 4b^2 \int_0^\infty \frac{k\sqrt{k^2 - a^2}}{F(k)} J_1(kr) J_1(ks) dk \dots\dots\dots(8)$$

$$\begin{aligned}
 g_m(r; s) &= \int_0^\infty \left\{ b^2 \frac{k\sqrt{k^2 - b^2}}{F(k)} - \frac{k}{\sqrt{k^2 - b^2}} \right\} \\
 &\quad \cdot J_m(kr) J_m(ks) dk \quad \dots m=0, 2 \dots\dots\dots(9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_1(r; s) &= \int_0^\infty \left\{ b^2 \frac{k\sqrt{k^2 - b^2}}{F(k)} + \frac{k}{\sqrt{k^2 - b^2}} \right\} \\
 &\quad \cdot J_0(kr) J_2(ks) dk \dots\dots\dots(10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_m(r; s) &= \int_0^\infty k^2 \frac{k^2 + \beta^2 - 2a\beta}{F(k)} J_m(kr) J_m(ks) dk \\
 &\dots\dots\dots(11)
 \end{aligned}$$

$$F(k) = (k^2 + \beta^2)^2 - 4k^2 a\beta \dots\dots\dots(12)$$

積分核は次のような対称性をもっているので、式(7)に挙げられていない要素がこれによって定まる。

$$G_{\mu\nu}(r; s) = G_{\nu\mu}(s; r) \dots\dots\dots(13)$$

これら[G]のうち、G<sub>33</sub>は緩和条件下の高次鉛直振動モードで現われている<sup>10)</sup>。またG<sub>11</sub>、G<sub>12</sub>、G<sub>22</sub>は水平並進運動で現われている<sup>12)</sup>。したがって初出の積分核はG<sub>13</sub>、G<sub>23</sub>のみである。これはほかならぬ水平振動とロッキング振動の連成項である。

4. 積分核の計算

積分核の式(8)~(11)のうち前者3者はすでに計算されているので結果のみを要約する。鉛直振動と水平振動の公式は類似の構造をもっており、これらをあらためて統一的に表示することは有意義と思われる。

まず特異部分を表示するために次のように書く。

$$\int_0^\infty J_m(kr) J_n(ks) dk = K_{mn}(r; s) \dots\dots\dots(14)$$

ただしmとnの差は偶数であるとする。

いまr>sとし、s/r=ξと書くと、

$$K_{00}(r; s) = \frac{2}{\pi r} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 t}} \dots\dots\dots(15)$$

$$K_{11}(r; s) = \frac{2}{\pi r} \xi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 t}} dt \dots\dots\dots(16)$$

$$\begin{aligned}
 K_{22}(r; s) &= \frac{2}{\pi r} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2t (2\xi^2 \cos^2 t - 1)}{\sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 t}} dt \\
 &\dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

明らかにK<sub>mm</sub>(r; s)はrとsに関して対称であるから、s>rのときは上式のrとsを交換すればよい。さらに

$$K_{02}(r; s) = -\frac{2}{\pi r} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 t}} dt \dots\dots\dots(18)$$

$$K_{20}(r; s) = -\frac{2}{\pi r} \int_0^{\pi/2} \frac{2\xi^2 \cos^2 t - 1}{\sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 t}} dt \dots\dots\dots(19)$$

これらの式の左辺はrとsに関して対称でない。しかし次の関係があるので、s>rのときは互いに交換すればよい。

$$K_{02}(r; s) = K_{20}(s; r) \dots\dots\dots(20)$$

剛体円板の場合に現われる特異項は以上がすべてである。これらはいずれも、s↑rのとき、対数的に発散する。

式(8)の表示として、高次鉛直モードで計算されている結果を要約すると

$$\begin{aligned}
 G_{33}(r; s) &= \frac{2b^2}{b^2 - a^2} K_{11}(r; s) \\
 &\quad - 4\pi b^2 \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{F'(x)} H_{11}(xr, xs) \\
 &\quad + 4b^2 \int_0^b k E_0(k) H_{11}(kr, ks) dk \dots\dots\dots(21)
 \end{aligned}$$

ここに、F'はFの導関数；xはFの実数の0点である。また、

$$E_0(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{(2x^2 - b^2)^2 + 4x^2 \sqrt{(b^2 - x^2)(a^2 - x^2)}} \dots a > x > 0 \\ \frac{4x^2 \sqrt{b^2 - x^2} (x^2 - a^2)}{(2x^2 - b^2)^4 + 16x^4 (b^2 - x^2)(x^2 - a^2)} \dots b > x > a \end{cases} \dots\dots\dots(22)$$

$$\begin{aligned}
 H_{mn}(x, y) &= \frac{1}{2} \left\{ J_m(x) N_n(y) + J_n(y) N_m(x) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \cos m\theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \cos n\theta_2 d\theta_2 \\
 &\quad \cdot \sin |x \sin \theta_1 - y \sin \theta_2| + i J_m(x) J_n(y) \\
 &\dots\dots\dots(23)
 \end{aligned}$$

$$N_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos m\theta \sin(x \sin \theta) d\theta \dots\dots\dots(24)$$

同様に式(9)、(10)の表示として、水平並進モードで計算されている結果を要約すると

$$\begin{aligned}
 m=0, 2 \text{ に対して} \\
 g_m(r; s) &= -(2-\nu) K_{mm}(r; s) \\
 &\quad - \pi b^2 \frac{x\sqrt{x^2 - b^2}}{F'(x)} H_{mm}(xr, xs) \\
 &\quad + \int_0^b \left\{ b^2 k \sqrt{b^2 - k^2} E_1(k) + \frac{k}{\sqrt{b^2 - k^2}} \right\} \\
 &\quad \cdot H_{mm}(kr, ks) dk \dots\dots\dots(25)
 \end{aligned}$$

ここにνはポアソン比である。また

$$E_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2x^2 - b^2)^2 + 4x^2 \sqrt{(b^2 - x^2)(a^2 - x^2)}} \\ \dots a > x > 0 \\ \frac{(2x^2 - b^2)^2}{(2x^2 - b^2)^4 + 16x^4 (b^2 - x^2)(x^2 - a^2)} \end{cases}$$

$$\dots b > x > a \dots\dots\dots(26)$$

次に  $g_1(r; s)$  については,  $r > s$  のとき

$$g_1(r; s) = \frac{2\nu}{\pi r} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - 2(s/r)^2 \cos^2 t}{\sqrt{1 - (s/r)^2 \cos^2 t}} dt - \pi b^2 \frac{x\sqrt{x^2 - b^2}}{F'(x)} H_{02}(xr, xs) + \int_0^b \left[ b^2 k \sqrt{b^2 - k^2} E_1(k) - \frac{k}{\sqrt{b^2 - k^2}} \right] \cdot H_{02}(kr, ks) dk \dots\dots\dots(27)$$

$s > r$  のときは式 (27) の右辺第 1 項を次式で置き換える.

$$-\frac{2\nu}{\pi r} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2t}{\sqrt{1 - (s/r)^2 \cos^2 t}} dt \dots\dots\dots(28)$$

最後に式 (11) で定義された  $h_0$  および  $h_2$  は, 緩和された接触条件のもとでは現われることのなかった関数である. しかし文献 8) で確立された積分法はこれらに対してもなお有効であって, 次の結果が得られる.

$r > s$  のとき

$$h_0(r; s) = \pi i \frac{2x^2 - b^2 - 2\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}}{F'(x)} \cdot x^2 H_0^{(2)}(xr) J_1(xs) - 2ib^2 \int_a^b k^2 E_2(k) \cdot H_0^{(2)}(kr) J_1(ks) dk \dots\dots\dots(29)$$

$$h_2(r; s) = \pi i \frac{2x^2 - b^2 - 2\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}}{F'(x)} \cdot x^2 H_2^{(2)}(xr) J_1(xs) - 2ib^2 \int_a^b k^2 E_2(k) \cdot H_2^{(2)}(kr) J_1(ks) dk \dots\dots\dots(30)$$

ここに

$$E_2(x) = \frac{(2x^2 - b^2)\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}{(2x^2 - b^2)^2 + 16x^4(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)} \dots\dots\dots(31)$$

また,  $H_m^{(2)}$  は  $m$  次の第 2 種ハンケル関数である.

同様に  $s > r$  のとき

$$h_0(r; s) = \pi i \frac{2x^2 - b^2 - 2\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}}{F'(x)} \cdot x^2 H_1^{(2)}(xs) J_0(xr) - 2ib^2 \int_a^b k^2 E_2(k) \cdot H_1^{(2)}(kr) J_0(ks) dk \dots\dots\dots(32)$$

$$h_2(r; s) = \pi i \frac{2x^2 - b^2 - 2\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}}{F'(x)} \cdot x^2 H_1^{(2)}(xs) J_2(xr) - 2ib^2 \int_a^b k^2 E_2(k) \cdot H_1^{(2)}(kr) J_2(ks) dk \dots\dots\dots(33)$$

$h_0$  および  $h_2$  の数値例を Fig. 3~6 に示す.

計算条件は, 無次元振動数  $bR=5$ ,  $\nu=0.25$  である. 実数部分は  $r=s$  において第 1 種の不連続性をもつ. もちろんこれは積分の計算には何の支障も及ばさない. 一方,

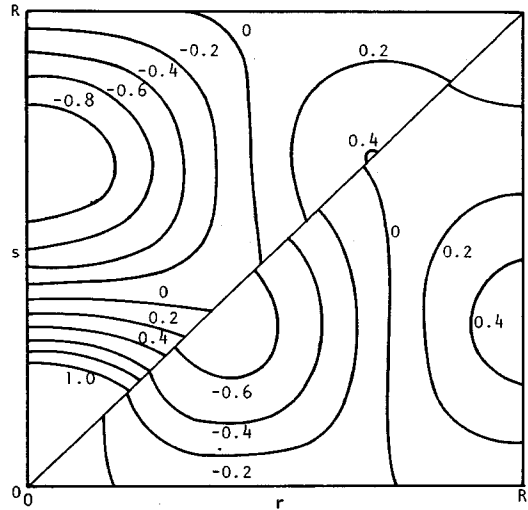


Fig. 3 Function  $h_0(r; s)$ : Real Part.

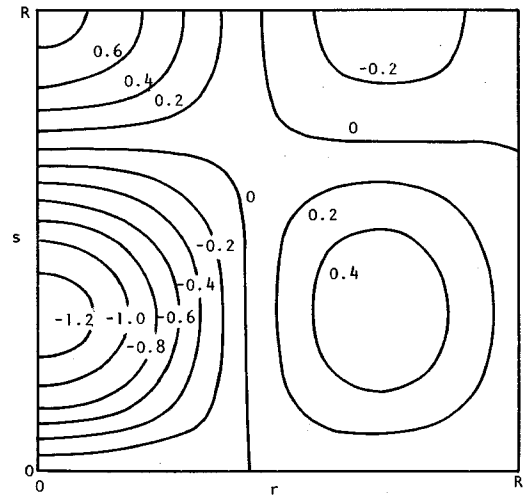


Fig. 4 Function  $h_0(r; s)$ : Imaginary Part.

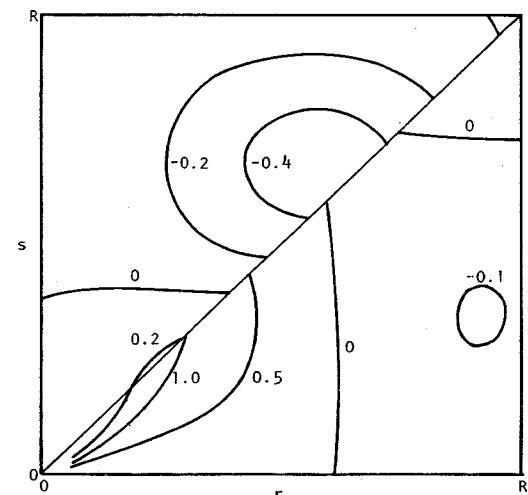


Fig. 5 Function  $h_2(r; s)$ : Real Part.

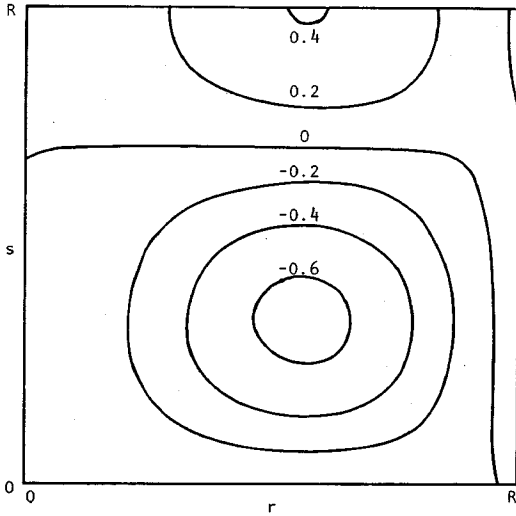


Fig. 6 Function  $h_2(r; s)$ : Imaginary Part.

虚数部分はいたるところで連続である。

以上によって、基本方程式の計算のために必要な積分核の数値データがすべて決定された。

5. 積分方程式の数値計算と解の性質

前章で決定された基本方程式 (6) は数値的に解かれる。そのための離散化の方法は文献 10) および 12) で明らかにされている。これによって、接触応力の 3 成分すべての節点での値を未知数とする連立 1 次方程式が得られる。これは緩和された接触条件の場合よりも大きな元数をもっている。しかし計算によると、単精度計算でも解の精度が大きく低下することはない。

以下ではもっぱら剛体円板を考える。するとその変位は、水平並進型の、 $u_r = \Delta$ ,  $u_\theta = -\Delta$ ,  $w = 0$  およびロッキング型の、 $u_r = u_\theta = 0$ ,  $w = r\phi$  という 2 つのタイプの重ね合せで表わされる。そこでこれらについて基本方程式を解いて接触応力を求めておけばよい。

Fig. 7 は、水平並進型変位に伴って発生する接触応力の分布を、絶対値を  $\mu$  で除した無次元量で示したものである。計算条件は  $\nu = 0.25$  である。

太線は  $\tau_1 = \tau_r - \tau_\theta$  である。これは振動方向のせん断応力 ( $\tau_r \cos^2 \theta - \tau_\theta \sin^2 \theta$ ) のほぼ 2 倍に等しい大きさを持ち、与えられた変位に対する主たる反力を示している。これに対して、細線は垂直応力  $\sigma$  であって、これは水平並進振動に伴って発生するロッキング型変位を抑制したために生じたものである。

図中の数字は無次元振動数である。線が錯綜するのを避けるため、 $\sigma$  の表示はケースをしぼってある。文献 12) の図-6 の  $\tau_x$  と対照すると、上図の  $\tau_1$  の分布形状には若干の変化が生じているものの、その大きさ特に合力は

ほぼ同じである。なお文献 12) の図-6 と 7 における  $\tau_x$  と  $\tau_y$  は、ここでの  $\tau_1$  と同じもしくは準じて定義されたものであるが、その旨の説明が欠けているので、ここで慎んで補足しておきたい。

同様に Fig. 8 はロッキング型変位に際して発生する接触応力の絶対値の無次元量である。ここでは太線が垂直応力  $\sigma$  であり、細線がせん断力  $\tau_1$  である。与えられた変位に対する主たる反力を  $\sigma$  が形成し、ロッキング型変位に伴って発生する水平変位を主に  $\tau_1$  が拘束している。図中の数字は無次元振動数であり、線の錯綜を避けるために、やはり一部のケースは省略してある。

この  $\sigma$  を文献 10) の図-4 と対照すると、大きさはほぼ同程度であるが、その形状は相当複雑に変化しており、簡単な傾向は認められない。

以上で求められた接触応力を接触面上で積分して合力を求めることにより、式 (2) の剛性行列が計算される。具体的には Fig. 7 の  $\tau_1$  と  $\sigma$  から  $K_{11}$  と  $K_{12}$  が、Fig. 8 の  $\tau_1$  と  $\sigma$  から  $K_{21}$  と  $K_{22}$  が決定される。この剛性行列の逆行列としてコンプライアンス行列  $C$  が定まる。この成分を次のように書く。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \\ \phi \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu R^2} \begin{bmatrix} C_{HH} & C_{HM} \\ C_{MH} & C_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ M \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

これは全体としては無次元表示ではないが、 $C_{HM}$  と  $C_{MH}$  は無次元量である。このうち対角項の  $C_{HH}$  および  $C_{MM}$  については、既往の研究結果に問題がないので、議論を省略し、ここではもっぱら連成振動に特有の非対角項  $C_{HM}$  および  $C_{MH}$  を考察する。

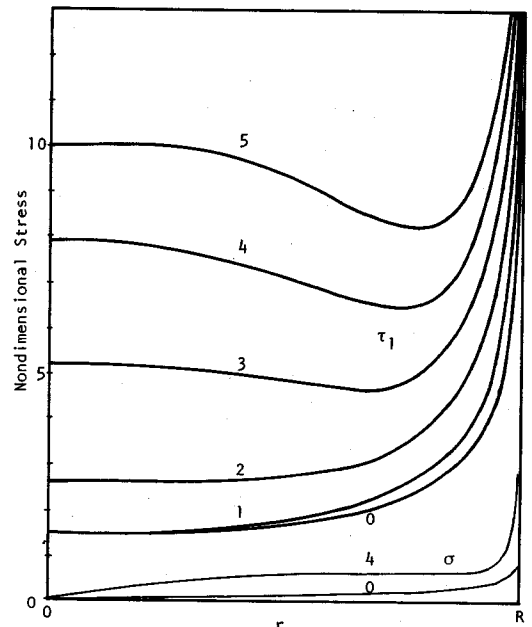


Fig. 7 Stress of Contact under Horizontal Motion.

Fig. 9 は、本研究によって計算された  $C_{MH}$  である。図中の数字はポアソン比を表わす。

文献 10) と 12) で求められている  $C_{HH}$  や  $C_{MM}$  と比較すると、 $C_{MH}$  の大きさは相当に小さい。これは Fig. 7 と 8 からすでに予想されたことである。

計算によると、ポアソン比の大きさいかんによらず、 $C_{HM}$  と  $C_{MH}$  はほぼ一致する。その差は、計算誤差も含めて、高々 3% 程度にすぎない。すなわち通常の振動数の範囲では、次のような相反関係が成立している。

$$C_{HM} \doteq C_{MH} \dots \dots \dots (35)$$

Veletsos らはこの関係を前提してその一方のみを計

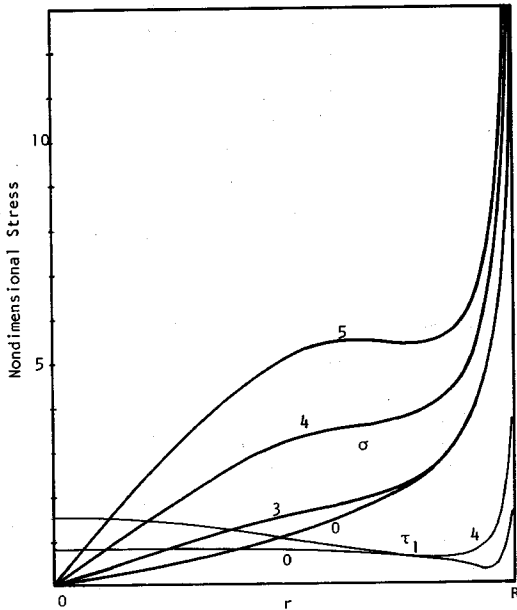


Fig. 8 Stress of Contact under Rocking Motion.

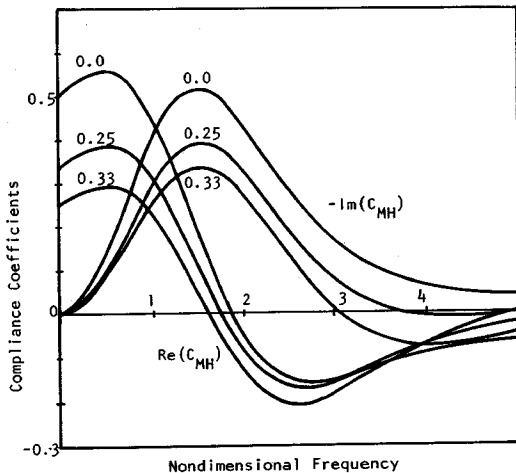


Fig. 9 Compliance Coefficients by the Present Method.

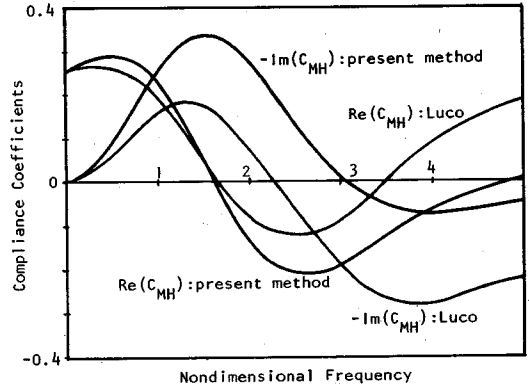


Fig. 10 Comparison of Compliance Coefficients (1).

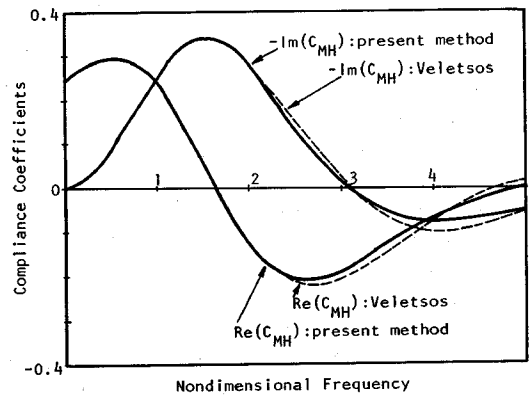


Fig. 11 Comparison of Compliance Coefficients (2).

算している。これに対して Luco らは両方を計算しているが、それらは互いに大きく異なっている。しかしこれは計算法に問題があるためであり、事実は上式のとおり相反関係が成立するのである。それと同時に上の計算結果は本解析法の精度をも示している。

次に本研究の結果を既往の研究結果と照合してみよう。Fig. 10 は  $\nu=0.33$  のときの  $C_{MH}$  を Luco の結果と比較したものである。後者は相当に大きな誤差を含んでいることがわかる。同様に Fig. 11 は、同じ量を Veletsos の結果と比較したものである。比較的高い振動数では 15% 程度の差が生じるが、全体としてはよく符合しており、特に低い振動数領域では両者はほとんど一致している。

これら 2 つの研究が緩和条件下の解を利用する手法には本質的に違いがない。したがって上で指摘された Luco の計算結果の誤差の主たる部分は、重み関数として用いる応力として、常に静的な場合の分布形を使っていることに帰することができる。

### 6. 結 論

実用上重要でありながら、既往の理論では厳密な扱い

の不可能な、接触面の完全固着条件のもとでの剛体円板の水平・ロッキング連成振動を解析した。その結果、

(1) この問題を、接触面変位の3成分すべてと接触応力の3成分すべてを含む直接積分方程式法によって厳密に定式化した。すべての積分核は、解析関数の有限区間上の積分に帰着された。

(2) この積分方程式を、緩和条件に対して実績のある選点法によって数値解析し、接触応力を決定した。

(3) これに基づいて、連成効果を表現する、コンプライアンス行列の非対角成分を決定した。

(4) 通常の振動数の範囲では、これらは事実上、相反関係にあることを示した。

(5) 既往の近似理論による計算結果を吟味し、その精度を明らかにした。

#### 参 考 文 献

- 1) Reissner, E. : Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, Ingenieur-Archiv Band 7, pp. 381~396, 1936.
- 2) Bycroft, G. N. : Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum, Phil. Trans. Roy. Soc. London Vol. 248, A. 948, pp. 327~368, 1956.
- 3) Robertson, I. A. : Forced vertical vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite elastic solid, Proc. Camb. Phil. Soc. 62-A, pp. 547~553, 1966.
- 4) Gladwell, G. M. L. : Forced tangential and rotatory vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite solid, Int. J. Eng. Sci. Vol. 6, pp. 591~606, 1968.
- 5) Luco, J. E. : Impedance functions for a foundation on a layered medium, Nuclear Eng. Design Vol. 31, pp. 204~217, 1974.
- 6) Veletsos, A. S. and Wei, Y. T. : Lateral and rocking vibration of footings, J. Soil Mech. Div., ASCE Vol. 97, No. SM9, pp. 1227~1248, 1971.
- 7) Luco, J. E. and Westmann, R. A. : Dynamic response of circular footings, J. Eng. Mech. Div., ASCE Vol. 97, No. EM5, pp. 1381~1395, 1971.
- 8) Higashihara, H. : Explicit Green's function approach to forced vertical vibrations of circular disk on semi-infinite elastic space, J. Eng. Mech. Div., ASCE Vol. 110, No. EM10, pp. 1510~1523, 1984.
- 9) 東原紘道：半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンス問題、その1、軸対称鉛直振動、日本建築学会構造系論文報告集、第349号、pp. 50~57、1985年。
- 10) 東原紘道：半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンス問題、その2、鉛直高次モード、日本建築学会構造系論文報告集、第371号、pp. 39~43、1987年。
- 11) Higashihara, H. : Explicit Green's function approach to torsionally oscillating circular disk on elastic half space, Theoretical and Applied Mechanics Vol. 35, pp. 95~102, 1987.
- 12) 東原紘道：半無限弾性体上の円板の水平並進振動の直接積分方程式法、土木学会論文集、第374号/I-6、pp. 523~530、1986年。
- 13) 東原紘道・宿谷 勝：半無限弾性体に密着した円板の軸対称鉛直振動、構造工学論文集、Vol. 33A, pp. 623~630、1987。
- 14) Sezawa, K. : Further studies on Rayleigh waves having some azimuthal distribution, Bull. Earthq. Res. Inst. Vol. 6, pp. 1~18, 1929.

(1987. 2. 10・受付)