

確率有限要素法と要素分割

DISCRETIZATION OF RANDOM FIELD FOR STOCHASTIC FINITE ELEMENT METHOD

鈴木 誠*・石井 清**

By Makoto SUZUKI and Kiyoshi ISHII

When the structural reliability analyses are performed using stochastic finite element method, the spatial variations of material properties are so significant that they must be treated as random functions of the spatial coordinates. Spatial variation of material properties for each element is considered by locally averaging the quantity over the element. Displacements are considered in terms of the integration of each element's strain. This paper evaluates the relation between element discretization and random functions of the spatial coordinates with respect to the accuracy using Monte Carlo simulation. This paper includes a brief discussion on the applicability of stochastic finite element method using first-order gaussian approximation, comparing that of Monte Carlo simulation.

Keywords : stochastic finite element method, spatial variation, random field, Monte Carlo simulation, first-order gaussian approximation

1. ま え が き

従来、多くの構造解析では、構造物に作用する外力や構造物の材料定数のばらつきを考慮せずに確定値として計算を行ってきた。しかし、構造物が自然環境の中に建造されることを考えると、不確定な外力や、構造物の材料定数の不確定性を考慮することは、構造解析の結果を正確に判断するうえで重要なことである。そこで、これらの不確定性を、確率論の導入により定量的に評価しようという試みが多くなされてきた^{1)~4)}。その1つに、構造解析として有効な手法である有限要素法に、確率論を導入した確率有限要素法がある。この方法には Combou⁵⁾、桜井ら⁶⁾、中桐・久田⁷⁾、篠塚ら⁸⁾、Kiureghian⁹⁾、Vanmarckeら¹⁰⁾や著者ら¹¹⁾の研究がある。確率有限要素法の研究においては、構造物の材料定数は、ばらつきを有するものとして、平均値や分散値などをもった確率変数として扱われている。さらに、構造物の材料定数は、一般に近傍の2点間において高い相関性を有するが、距離が離れるに従って相関性が小さくなるという空間的な相関特性をもつ。このような相関特性を有する場を確率

場 (random field) とよび、この確率場を考慮することが、構造信頼性解析における1つの重要なポイントであると指摘されている¹²⁾。確率有限要素法を実際の問題に適用する場合、一般的に次に述べるような問題点が挙げられる。

- ① 空間的な相関特性のモデル化
- ② 確率場から要素モデルに変換する場合の材料定数の取り扱い方
- ③ 数値計算の効率化

このうち①と②は互いに関連している。確率有限要素法の材料定数は、要素内では均質として単一の確率変数で与えるので、たとえば、2点間の距離の増加によって相関性が急激に小さくなる場合には、要素分割を細部の挙動が把握できるほど十分に細かくすればよいことになる。しかし、確率有限要素法といえども要素分割を無制限に多くすることはできないし、また実用的でもない。特に、解析結果として評価する対象が、変位や全体の破壊など各要素の変形や局所破壊の和の形で表現される場合には、解の精度をあまり低下させることなく要素の分割数をある程度少なくできると考えられる。このような点から、確率場から要素モデルに変換する場合の材料定数の取り扱い自体が、確率有限要素法における1つの重要な研究課題になるわけである。この種の研究としては

* 正会員 清水建設(株)大崎研究室
(〒100 千代田区内幸町 2-2-2 富国生命ビル)

** 正会員 工博 清水建設(株)大崎研究室主任研究員(同上)

Vanmarcke¹³⁾の研究がある。Vanmarckeは、たとえば要素の材料定数として確率場から求められる局所平均値を用いれば、要素の分散は元の確率場の分散より小さくなることを示している。

本研究は、Vanmarckeの考え方をもとに②を研究の主題として、次に述べる諸点について検討を行ったものである。2.では、本章の補足として、空間的な相関特性を考慮すると各要素間の共分散は、要素の重心間の共分散とは異なったものとなることを示した。3.では、適用する数値解析手法における誤差を極力除くために、シミュレーション法を適用して要素の分割数と解の精度との関係を検討した。ここでは解析モデルとして、一辺の要素節点をピン支持され、他の一辺を一様に引張られる正方形の板を考え、引張側の端部の変位に着目し、精度を検討している。また、解析モデルでは弾性定数 E を確率変数として、相関特性を変化させたため、端部の変位は各要素の変形の和として与えられ、その変動は、各要素の弾性定数の不確定性に起因することになる。この解析において、変位に着目した理由は次のとおりである。ひずみについては、要素を小さくすると要素の分散は大きくなり、元の確率場の分散に近づく。逆に、要素を大きくすると要素の分散は小さくなる。また応力度は、ひずみと弾性定数との積により求められる。これより、弾性定数が小さいときはひずみが大きく、反対に弾性定数が大きいときにはひずみが小さくなるため、応力度は弾性定数の値にかかわらず一定となる。すなわち、応力度は力のつり合いで求まるため、弾性定数の値には影響を受けなくなる。さらに4.では、一次ガウス近似法を用いた確率有限要素法¹¹⁾の適用性を、3.で得られたシミュレーション法による解との比較から検討した。

2. 要素間の相関特性

空間的なばらつきを有する確率場を確率有限要素法を用いて解析する場合、解析対象範囲をある大きさをもつ有限個の要素で分割することになるので、確率場が有する本来の相関特性を、解析上設けられる要素間の相関特性に変換する必要がある。ここでは、最初に一次元要素についてその理論¹³⁾を説明し、本研究の主題を明確にし、次に、一次ガウス近似法を適用した確率有限要素法解析で用いる二次元要素について、要素間の相関特性の求め方を示す。

いま、一次元のはり要素を考え、弾性定数などの材料定数が位置により変化するものとする。ここで、図-1に示すように位置 u の材料定数を $X(u)$ と表現し、これが一次元の定常確率過程に従うものとする。

要素の長さを U とすると、その移動平均過程 (moving

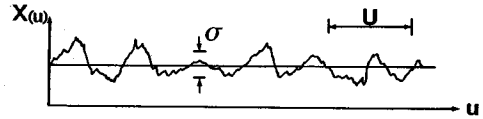


図-1 一次元定常確率過程のサンプル

average process) $X_d(u)$ は次のように表わすことができる。

$$X_d(u) = \frac{1}{U} \int_{u-U/2}^{u+U/2} X(u) du \dots\dots\dots (1)$$

また、任意の点 u_1 と u_2 の間の相関係数を $\rho(u_1 - u_2)$ で表現し、 $X(u)$ の分散を σ^2 とすると、 $X_d(u)$ の分散は次のようになる¹³⁾。

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_d(u)] &= \frac{\sigma^2}{U^2} \int_0^U \int_0^U \rho(u_1 - u_2) du_1 du_2 \\ &= \frac{2\sigma^2}{U} \int_0^U \left(1 - \frac{u}{U}\right) \rho(u) du \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

この式より、要素の材料定数として確率場の局所平均値を用いると、要素の分散は材料定数が本来有する分散に比べて変化する (小さくなる) ことがわかる。

さらに、図-2に示す長さ U の要素と U' の要素の共分散は、 U_0 から U_3 を用い次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_{U_0}, X_{U'}] &= \frac{1}{2U \cdot U'} (U_0^2 \text{Var}[X_{U_0}] - U_1^2 \text{Var}[X_{U_0}] \\ &\quad + U_2^2 \text{Var}[X_{U_0}] - U_3^2 \text{Var}[X_{U_0}]) \\ &\dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

さて、簡単な例として、 $X(u)$ が平均値 0、分散 1.0 で、相関係数が $\rho(u) = \exp\{-a|u|\}$ ($a=0.5$) で表わすことができる確率過程に従うものとして、要素の長さ L を 5, 10, 15, 20, 25 と変化させて、それぞれの共分散を計算した。ここでは、相関係数として、2点間の距離に対して指数関数的に相関性が減少するモデルを用いている¹⁴⁾⁻¹⁶⁾。図-3には2つの要素の中心間の距離を変数として共分散の値を示している。実線は、確率場自体の共分散である。

これより、確率有限要素法の要素の中心間の共分散は、空間的な相関特性を考慮した確率場では、要素の長さが大きくなると各要素の中心間距離から求めた共分散と比べて小さくなる、ことがわかる。もちろん、1.で述べた

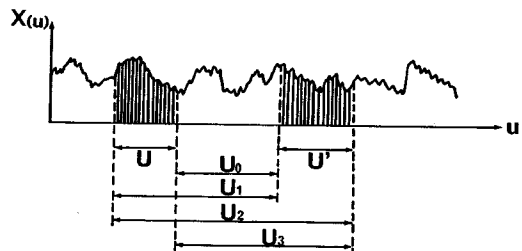


図-2 区間 U, U_0, U_1, U_2, U_3 の定義

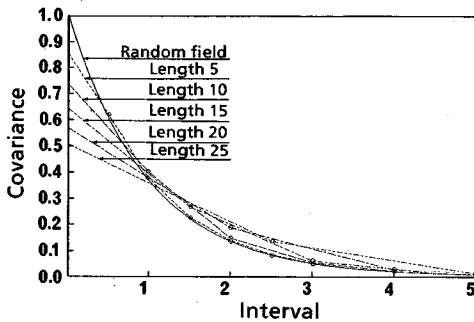


図-3 要素間距離と共分散

ように要素の長さを小さくすれば、各要素の値を中心における値で代表させても問題は生じない。しかし、広い範囲を解析対象とする場合には実用上できるだけ要素数を少なくしたいのであるから、上に述べた特性を解析上考慮することも必要となる。

上に述べた例では、材料定数を一次元の確率過程で表わしたが、要素間の相関特性は二次元モデルについても同様に現われる。ただし、二次元確率過程における任意の要素間の相関特性は、一次元のように理論的に求めるのは難しいため、数値計算により求めることになる(付録1参照)。

3. シミュレーション法による要素分割と解析精度の検討

本章では、はじめに解析モデルとシミュレーション法を用いた検討内容の概要を述べ、次に、確率場のシミュレーション法を概説し、最後に相関特性を変化した確率場に対する要素分割と解の精度との関係について結果を報告する。

(1) 解析モデルと検討内容の概要

解析モデルは、図-4に示されるように一辺の長さを10.0とする正方形の板であり、一辺の要素節点をピン支持とし、他の一辺に一樣な引張荷重を受けるモデルとした。ここで、要素分割数は2~20の間で変化させ、三角形要素で分割している。確率場としては弾性定数 E の空間的な分布を考え、平均値を1.0、変動係数を0.3の正規分布とし、相関係数を式(5)で与えられるものとした。ここでは、式(5)の相関パラメーター a, b は、確率場の等方性を仮定し、 $a=b$ =定数として変化させる。荷重は定数として、その大きさは1.0としている。

さて、本章の検討では、数値解析手法による誤差を極力排除するために、シミュレーション法を適用してA点の変位の統計量を求めることにした。この手法では、まずシミュレーションにより確率場のサンプルを求め、このサンプル確率場から直接要素の材料定数を計算し、次にA点の変位を静的解析から算定した。さらにA点にお

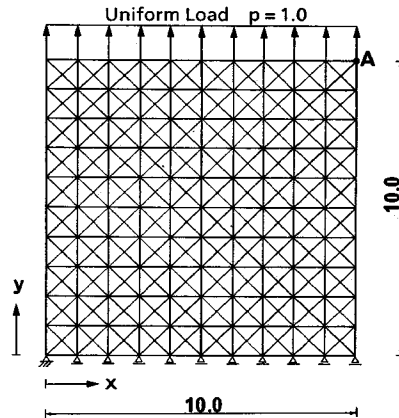


図-4 解析モデル

ける変位に関する統計量を求めるために、シミュレーションを繰り返し、必要なサンプル数を集めた。なお、この解析では、サンプル確率場から要素の材料定数を求める際に、三角形要素の頂点、辺の中央および重心の7か所を代表点としてその平均で値を定めている。したがって、分割数が少ないときには、平均化に伴う誤差が結果に入り込むことになる。次節では、シミュレーション法自体の精度について、はじめに確認しておくことにした。

(2) 確率場のシミュレーション

構造物の材料定数などの空間的なばらつきを二次元の定常ガウス確率過程で表現されるものとする。二次元確率過程をシミュレートする方法としては、調和関数型モデル^{17),18)}やAR/AR-MAモデル¹⁹⁾などがあるが、ここでは次式で与えられる調和関数型モデルを用いることとする。

$$X(u, v) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m C_{kl} \cos(\omega_k u + \phi_{kl}) \cos(\omega_l v + \phi_l) \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 ϕ_{kl} と ϕ_l は0~ 2π の乱数であり、 ω_k と ω_l は次のようになる。

$$\begin{aligned} \omega_k &= (k-1)\Delta\omega_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \\ \omega_l &= (l-1)\Delta\omega_l \quad (l=1, 2, \dots, m) \\ \Delta\omega_k &= 2\pi/(\Delta u \cdot N_x) \quad (N_x; \text{確率場の } x \text{ 方向の発生個数}) \\ \Delta\omega_l &= 2\pi/(\Delta v \cdot N_y) \quad (N_y; \text{確率場の } y \text{ 方向の発生個数}) \end{aligned}$$

空間的な相関特性はいろいろ提案されているが、ここではShinozuka²⁰⁾, Tang²¹⁾やVanmarcke¹⁴⁾が用いている次式を用いる。

$$\rho = \exp[-(ax)^2 + (by)^2] \dots \dots \dots (5)$$

ここで、式中の a, b は相関特性の減衰の程度を決定するパラメーターであり、本文では相関パラメーターとよんでいる。式(5)からも明らかのように、相関パラメーター a, b が大きくなると、異なる2地点における材料

定数の相関係数は指数関数的に小さくなる。式(5)によれば、相関特性は距離の2乗で減少するもので、図-6の破線に示されるような特性を示す。一般に、相関特性を表わすモデルとしては、距離の1乗または2乗(より一般的には n 乗)で相関係数が減少するモデルが用いられているが、ここでは文献(20), (21), (14)を参考にして2乗で減少するモデルを用いた。二次元フーリエ変換を用いると、 C_{k_i} は次のように求められる。

$$\frac{1}{16} C_{k_i} = \frac{\sigma^2}{4\pi ab} \exp\left[-\left\{\left(\frac{\omega_k}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\omega_l}{2b}\right)^2\right\}\right] \Delta\omega_k \Delta\omega_l \dots\dots\dots (6)$$

これより C_{k_i} が求められるので式(4)に代入し、高速フーリエ変換(FFT)を利用して確率場をシミュレートすることができる。

図-5には、相関パラメーター $a=b=0.5$ をもとにして、上述の手法で求めた二次元確率過程の一例を示す。ここで、確率場は発生間隔を0.1きざみとして x, y の長さを102.4(データ数一辺1024)として発生させたが、図では、その一部として格子は0.2間隔で x, y の長さは20.0としている。図-6は、図-5のサンプル確率場

から求められた空間的な共分散である。この図では実線が1回のシミュレーションの結果を、破線が理論値を示す。図の格子間隔は0.2であり、 $\Delta x, \Delta y$ の全長は約6.0になっている。両者はよい対応を示しており、当初に定めた空間的な相関特性を十分精度よくシミュレートしていることがわかる。

図-4に示される10分割のモデルについて、サンプル確率場から求められた弾性定数 E の空間的な共分散を図-7に示す。この図では実線がシミュレーションの結果を、破線が確率場本来の共分散である。格子間隔は三角形の重心間の距離であり、 $\Delta x, \Delta y$ の全長は図-4に示されるモデルのほぼ全長(10.0)になる。後述の計算では、 $a=b=0.5$ から $a=b=100.0$ までの値を用いているが、 $a=b=1.0$ のときには4分の1の距離で図-7と同じように相関が減少し、 $a=b=100.0$ のときには40000分の1の距離で相関が減少することになる。

図-8には、付録1で述べた方法により求めた理論的な

Simulated Sample Variation of Young's Modulus

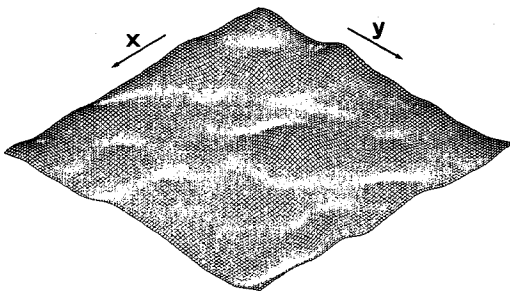


図-5 二次元定常確率過程のサンプル

Covariance

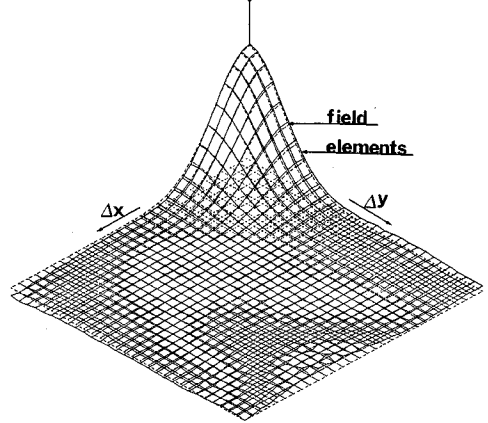


図-7 シミュレーションによる要素の空間的な共分散

Covariance

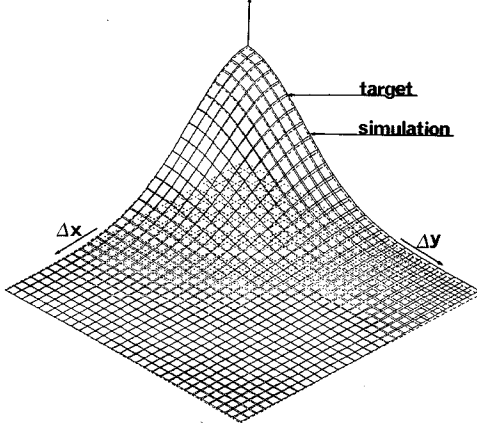


図-6 シミュレーションによる空間的な共分散

Covariance

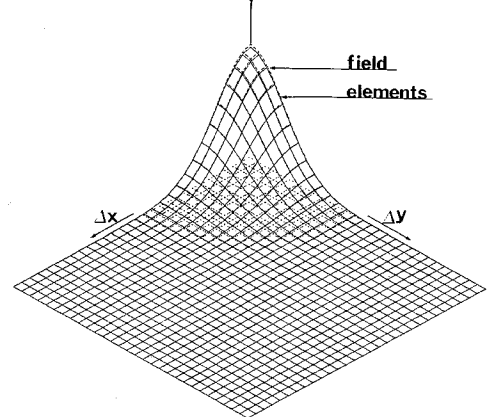


図-8 理論的な要素の共分散

共分散を示す。

(3) 要素分割と解の精度

相関パラメーター a, b を変化させ、A点における y 方向の変位を計算した。100回の試行をもとに求められたA点の y 方向変位の累積分布を図-9に示す。なお図-9において、完全相関の場合の結果は全要素の値を平均値1.0、変動係数0.3の確率変数として計算したものである。この図から、相関パラメーターが小さくなる(すなわち2点間の相関が強くなる)と、変位の変動が大きくなり、反対に相関パラメーターが大きくなると、変位の変動が小さくなることわかる。これは、前者では、相関パラメーターが小さくなることにより、サンプル中には各要素の弾性定数の平均値が、確率場の平均値(母平均)から大きく離れたものも出現するようになるためである。また後者では、相関パラメーターが大きくなることにより、サンプル中の各要素の弾性定数が独立に近くなり、各要素の弾性定数の平均値は確率場の平均値(母平均)に近づくことによる。

さらに、A点における x 方向と y 方向の変位に対して平均値と標準偏差を求めたものを図-10から図-13にそれぞれ示す。ここで試行回数は100回である。これらの結果からは、次のことがいえる。

図-10と図-11より、相関パラメーターが小さいとき、すなわち2点間の相関が強くなると、平均値は大きくなることわかる。これは、同じ平均値と変動係数をもった確率場でも、それが弾性定数のように変位に非線形に影響するときには、空間的な相関特性の影響を受けるためである。また、要素分割数を多くすると、平均値は多少大きくなるが、その影響は顕著ではない。

図-12と図-13より、相関パラメーターが小さいとき ($a=b=0.5$)、標準偏差は要素分割数を多くするに従って大きくなっている。これは、要素数を少なくすると要素内で平均化が図られ、各要素の材料定数の変動が確率場自体の変動(母分散)に比べ小さくなるが、要素数を多くしていくと要素内で平均化が図られなくなり、サンプル中に極端な弾性定数をもつ要素が現われてくる

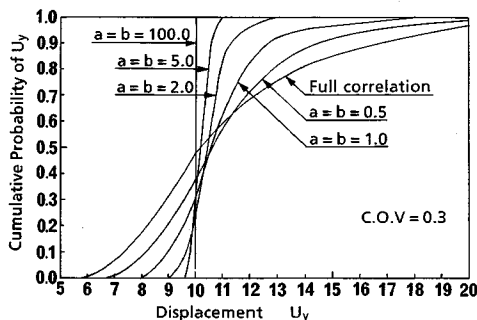


図-9 変位 U_y の累積分布 (C. O. V. = 0.3)

ためである。このため、要素の弾性定数の平均値が確率場の平均値(母平均)から大きく隔たることになり、極

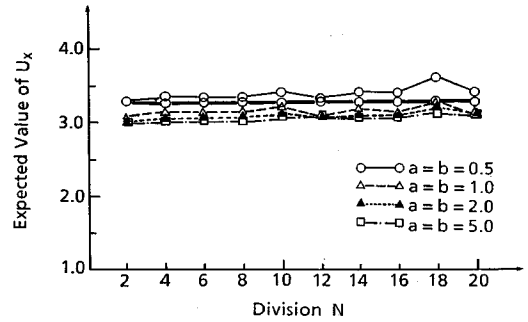


図-10 要素分割と変位の平均値 (x 方向)

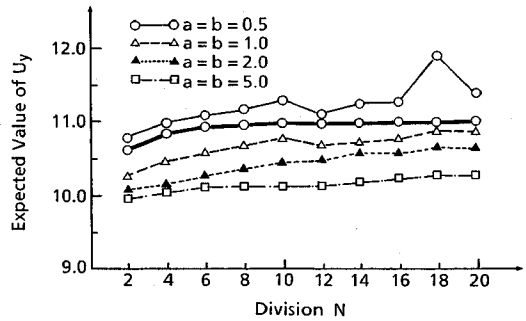


図-11 要素分割と変位の平均値 (y 方向)

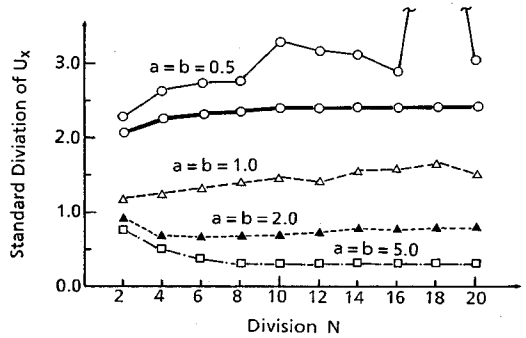


図-12 要素分割と変位の標準偏差 (x 方向)

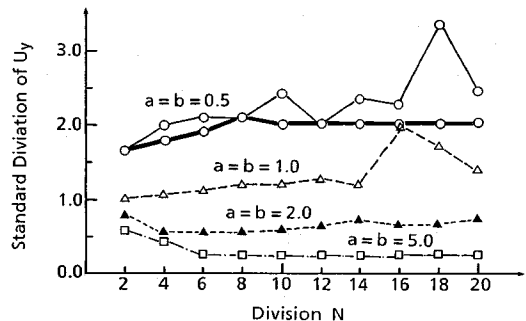


図-13 要素分割と変位の標準偏差 (y 方向)

端に大きな（あるいは小さな）変位を与える場合が発生する。これを異常値として、JIS Z 8402 の Grubbs の方法により検定し、取り除いたものを太実線で示している。結果として、異常値を取り除いたデータによれば少ない要素分割数でも、標準偏差の値はほぼ一定値に収束している。

図-12 と図-13 において、相関パラメーターが大きいとき ($a=b=5.0$)、すなわち各要素が独立に近づくときは標準偏差が小さくなり、しかも要素数の影響を受けないようにみえる。この原因は2つに分けて考えられる。1つは、要素数が少ないときである。このとき、確率場は大きな要素で分割されることになり、要素の値を平均化していることになる、すなわち、相関パラメーターが小さいときに説明したように、要素数を少なくすると要素内で平均化が図られ、各要素の材料定数の変動が確率場自体の変動（母分散）に比べ小さくなるためである。また一方、要素数が多いときには要素内で平均化が図られなくなり、1回の試行の各要素の分散は大きくなっている。しかし、場が独立であるため要素の平均値はどの試行回でもほぼ一定となる。これより、今回対象としている問題、すなわち各要素の変形の和として得られる変位の変動が小さくなり、結果として標準偏差は小さいものになる。

以上の結果より、各要素の変形の和で表現できる変位などを問題にするのであれば、相関パラメーターが大きいときにも必ずしも細かい要素分割は必要でないことがわかった。さらに、今回のモデルでは、相関パラメーターの大きさによらず統計値（平均値、標準偏差）はほぼ一定になり、モデル全体の要素分割数が10以上であれば、解は一定値に収束している。

4. 一次ガウス近似法を用いた確率有限要素法に対する解の検証

3. ではシミュレーション法により要素分割の精度について述べたが、ここでは一次ガウス近似法を用いた確率有限要素法の適用性を、シミュレーション法による解との比較から検討する。ここで、一次ガウス近似法は非線形の性能関数を破壊点においてテーラー展開し、確率変数が非正規分布のときは正規化近似を行うことを特徴にしている²²⁾。なお、その適用に際しては、今回の問題に適用できるように以下の工夫を取り入れている。すなわち、図-8の共分散マトリックスを線形変換を行って、互いに相関のない確率変数に変換²³⁾し、その後、一次ガウス近似法を用いて変位の分布を求める。

一次ガウス近似法では、破壊を定義する性能関数を破壊点まわりにテーラー展開するため、直接に変位 U_y の累積分布を求めることはできない。そこで、図-4のA

点の y 方向の変位 U_y を変化させることにより、これを超えない確率（非超過確率）を求めて累積分布を作成した。そのときの性能関数は、次式で定義した。

$$Z = \delta - U_y \dots \dots \dots (7)$$

ここで、 δ は一次ガウス近似法を適用して求められるA点の y 方向の変位である。また、 Z が負になる確率が非超過確率となる（ x 方向の変位 U_x を求めるときは U_y を U_x とする）。

確率場の弾性係数を1つの確率変数として与える、すなわち、完全相関という特殊な例を図-14から図-16に示す。図-14は変動係数0.3、図-15は0.2、図-16は0.1の場合を示している。これらの図で破線はシミュレーションの結果、実線は一次ガウス近似法の結果を示している。図-14から図-16すべてについて、破線と実線はほぼ一致していることより、完全相関の場合には一次ガウス近似法の精度はよいことがわかる。

図-17から図-19には相関係数を $\rho(x, y) = \exp[-(ax)^2 + (by)^2]$ として、相関パラメーターを $a=b=0.5$ とし変動係数を0.3, 0.2, 0.1と変化させた変位 U_y の累積分布を示す。さらに、図-20～図-22には変動係数を0.3とし相関パラメーターを $a=b=1.0, 2.0, 5.0$ と変化させたものを示す。図-17～図-19からは、相関パラメーターを $a=b=0.5$ とした場合、超過確率0.7以下で変位 U_y の誤差は変動係数が0.3のとき10%以下になり、変動係数が0.2のときには5%以下になり、また変動係数が0.1のときほとんど誤差はないことがわかる。次に、図-20～図-22からは変動係数を0.3として相関パラメーターを変化させた場合、超過確率0.9以下のとき変位 U_y の誤差は、 $a=b=1.0$ では10%以下に、また $a=b=2.0, 5.0$ では、ほぼ5%以下におさまっていることがわかる。

5. 結 論

本研究は、空間的な相関特性を有する確率場に確率有限要素法を適用するにあたり、この相関特性モデルと要

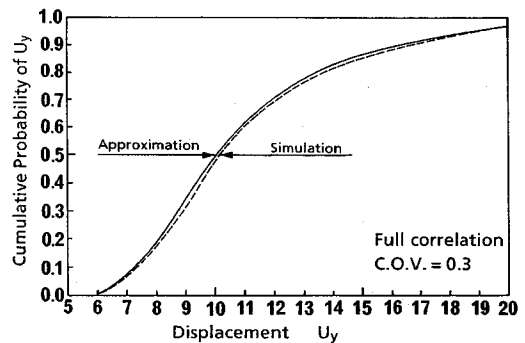
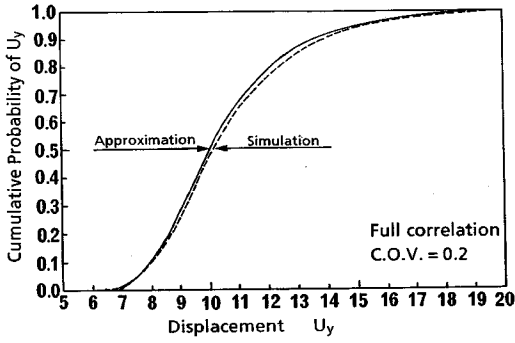
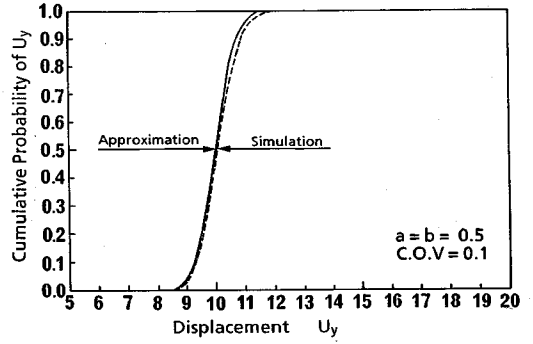


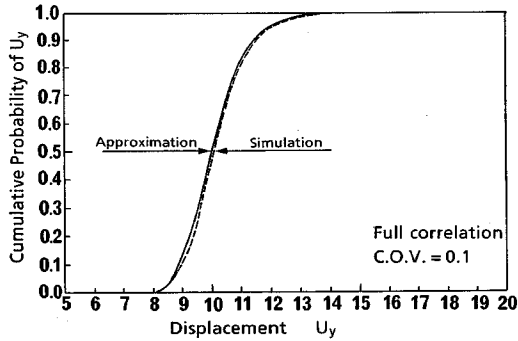
図-14 変位 U_y の累積分布 (C. O. V. = 0.3, 完全相関)



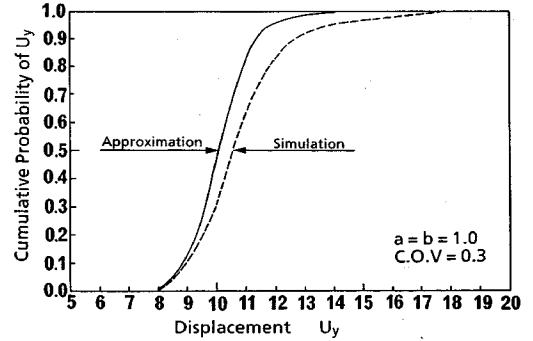
図—15 変位 U_y の累積分布 (C. O. V. = 0.2, 完全相関)



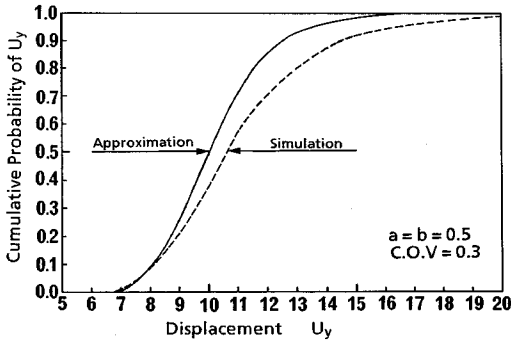
図—19 変位 U_y の累積分布 (C. O. V. = 0.1, $\alpha = \beta = 0.5$)



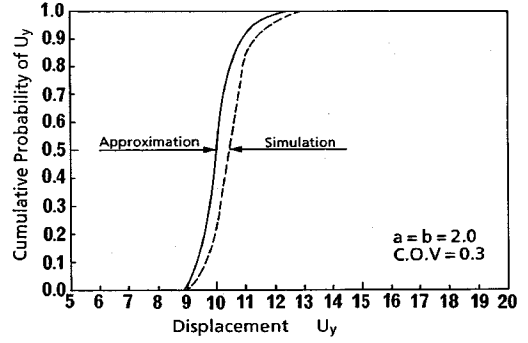
図—16 変位 U_y の累積分布 (C. O. V. = 0.1, 完全相関)



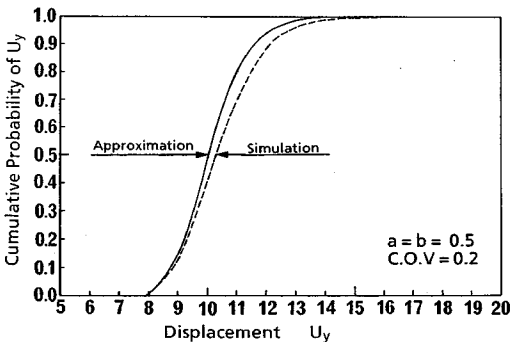
図—20 変位 U_y の累積分布 (C. O. V. = 0.3, $\alpha = \beta = 1.0$)



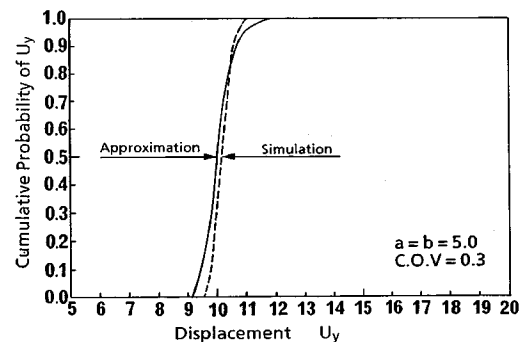
図—17 変位 U_y の累積分布 (C. O. V. = 0.3, $\alpha = \beta = 0.5$)



図—21 変位 U_y の累積分布 (C. O. V. = 0.3, $\alpha = \beta = 2.0$)



図—18 変位 U_y の累積分布 (C. O. V. = 0.2, $\alpha = \beta = 0.5$)



図—22 変位 U_y の累積分布 (C. O. V. = 0.3, $\alpha = \beta = 5.0$)

素分割、また、解の精度との関係をシミュレーション法を用いて検討し、さらに、一次ガウス近似法を用いた確率有限要素法の適用性についても検討したものである。解析モデルとして、一辺の要素節点をピン支持され、他の一辺を一樣に引張られる正方形の板を考え、引張側の端部の変位に着目した。モデルでは弾性定数 E を確率変数として、相関特性を変化させた。したがって、端部の変位は各要素の変形の和として与えられ、その変動は、各要素の弾性定数の不確定性に起因することになる。結果は次のようにまとめられる。なお、次に述べる結論は、図一四に示される有限要素（三角形）分割ならびに荷重状態（引張荷重）についてのものであり、確率有限要素法を実際に適用する場合には、要素分割や荷重条件により解析精度が大幅に変化する可能性がある。すなわち、解析対象は、材料定数が有する空間的な相関特性が、確率有限要素法の解析精度に与える影響のみを検討できるようにしたモデルであり、荷重を一樣な引張状態として解析モデルに生じる応力状態を単純化するとともに、要素分割にも規則性をもたせている。

(1) 2点間の距離が離れるに従って、相関特性が急激に小さくなる場合にも必ずしも細かい要素分割は必要ではないことがわかった。これは、次の理由による。要素分割数が少ないときには、確率場は大きな要素で分割されることになり、要素内の弾性定数を平均化していることになる。また、要素分割数が多いときには、要素内では平均化が図られなくなり、1回の試行の各要素の分散は大きくなっているが、確率場が独立であるため要素の平均値はどの試行回でも一定となることによる。全体的に、今回のモデルでは、相関パラメータの大きさによらず統計値（平均値、標準偏差）は、要素分割数が10（400要素）以上であれば一定となった。

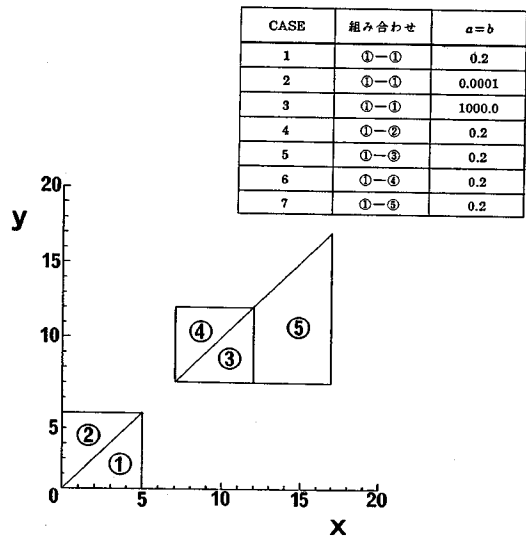
(2) 一次ガウス近似法を用いた確率有限要素法を適用したとき、材料定数の変動係数が0.1と小さい場合は精度がよかった。変動係数が0.2、0.3と大きくなると、ある超過確率を定めて変位を推定する場合には、相関性が大きい（ $a=b=0.5, 1.0$ ）と誤差が10%を超えることもあるが、超過確率を小さくすると推定の誤差は小さくなる。相関性が小さくなる（ $a=b=2.0, 5.0$ ）と、誤差は5%以下となった。

付録1 二次元要素の相関特性

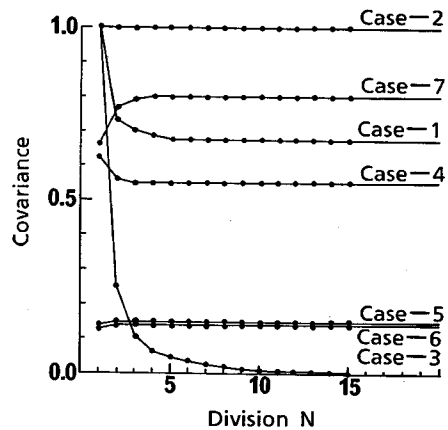
二次元要素の相関を求めた例を示す。求め方は、2.で述べたが、ここでは図一A・1に示すような①～⑤の三角形の要素を考え、その要素の組合せを変えて要素間の共分散を算定した。相関特性のモデルとしてはいくつか提案されているが、その中で相関特性が急激に低下するモデルを用いた。分散は1.0で、相関係数は $\rho(x, y) =$

$\exp[-\{(ax)^2+(by)^2\}^{1/2}]$ で表現できる二次元確率過程とする。ここで用いる相関係数は、図一3に示した次元のモデルと同様に距離の増加に従って指数関数的に相関が減少するモデルとしている。また、ここでは a, b は相関パラメータとよぶことにする。ケース1～ケース3では、要素①に2つの要素が重なっている状態（この場合、重心間の距離は0となる）について、相関パラメータ a, b を $a=b=0.2, a=b=0.0001$ （ほぼ完全相関）、さらに、 $a=b=100.0$ （ほぼ完全独立）としたものを考えた。ケース1, 2, 3は要素①の分散を求めることである。また、ケース4～ケース7は距離による差異をみるため $a=b=0.2$ として、要素①と他の要素の共分散を求めたものである。

結果を図一A・2に示す。ここでは、要素間の共分散は次のように求めるものとする。各要素を x, y 方向に相



図一A・1 要素モデルと組合せ



図一A・2 分割数と共分散

似形の小要素に分割して、小要素重心間の共分散をその小要素間の共分散とする。次に面積比の重みを考えて数値積分し、元の要素間の共分散を求める。図—A・2の分割数は x 方向や y 方向の分割数を示しており、3分割では $3^2=9$ の小要素に分割して計算を行っている。ケース1では5分割で一定値に収束しているが、このように確率場より局所平均を用いて求めた要素の分散は、本来の分散より小さくなるのがわかる。ケース2では完全相関に近い場合、要素内ではばらつきはほとんどなく、結果として分割数によらず要素の分散は一定値になるが、ケース3では逆に完全独立に近い場合、要素内ではかなりばらついており、共分散は0に収束することになる。また、ケース4からケース7より、同じ形の要素や距離が離れている要素などは少ない分割数で収束することがわかるが、どのような場合でも10分割もすれば十分であるといえる。

以上示したような計算を行えば、任意の形状の三角形であっても共分散を求めることができる。

参 考 文 献

- 1) Benjamin, J. R. and Cornell, C. A. : Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers, McGraw-Hill, 1970.
- 2) 松尾 稔 : 地盤工学, 信頼性設計の理念と実際, 技報堂出版, 1984.
- 3) Schuëller, G. 著, 小西一郎・高岡直善・石川 浩 共訳 : 構造物の安全性と信頼性, 丸善, 1984.
- 4) 星谷 勝・石井 清 : 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, 1986.
- 5) Cambou, B. : Application of First-order Uncertainty Analysis in the Finite Element Method in Linear Elasticity, The Second Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Eng., Aachen, pp. 67~87, 1975.
- 6) 桜井春輔・土居康成 : 有限要素法による斜面の信頼性解析, 土木学会論文報告集, No. 330, pp. 87~97, 1983.
- 7) 中桐 滋・久田俊明 : 確率有限要素法入門, 不確定構造の解析, 培風館, 1985.
- 8) Shinozuka, M. and Dasgupta, G. : Stochastic Finite Element Methods in Dynamics, The Third Conf. on Dynamic Response of Structures, EM Div./ASCE, University of California, L. A., pp. 44~54, 1986.
- 9) Kiureghian, A. D. : Numerical Methods in Structural Reliability, The Fourth Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Universita di Firenze, Italy, Pitagora Editrice, pp. 769~784, 1983.
- 10) Vanmarcke, E. H. and Grigoriu, M. : Stochastic Finite Element Method, Journal of Engineering Mechanics, ASCE., Vol. 109, No. EM5, pp. 1203~1214, Oct. 1980.
- 11) 鈴木 誠・石井 清 : 確率有限要素法による斜面安定解析, 土木学会論文集, 第 364 号/III-4, pp. 199~208, 1985.
- 12) 土質工学会編 : 土質基礎の信頼性設計, 土質基礎工学ライブラリー 28, 1985.
- 13) Vanmarcke, E. H. : Random Fields, The MIT Press, 1983.
- 14) Vanmarcke, E. H. : Probabilistic Modeling of Soil Profiles, Journal of the Geotech. Eng. Div, ASCE, Vol. 103, No. GT11, pp. 1227~1246, Nov. 1977.
- 15) Matsuo, M. and Asaoka, A. : Probability Models of Undrained Strength of Marine Clay Layer, Soils and Foundations, Vol. 17, No. 3, pp. 53~68, 1977.
- 16) Alonso, E. E. and Krizek, R. J. : Stochastic Formulation Soil Properties, The Second Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Eng., Aachen, pp. 9~32, 1975.
- 17) Shinozuka, M. and Jan, C.-M. : Digital Simulation of Random Processes and Its Applications, Journal of Sound and Vibration, Vol. 25, No. 1, pp. 111~128, 1972.
- 18) Shinozuka, M. : Digital Simulation of Random Processes in Engineering Mechanics with the Aid of FFT Technique, Stochastic Problems in Mechanics, Ariaratnam, S. T. and Leipholtz, H. E., editors, Univ. of Waterloo Press, pp. 277~286, 1974.
- 19) Naganuma, T., Deodatis, G., Shinozuka, M. and Samaras, E. : Digital Generation of Multidimensional Random Fields, The Fourth Int. Conf. on Structural Safety and Reliability, Kobe, pp. I-251~I-260, 1985.
- 20) Shinozuka, M. : Probabilistic Modeling of Concrete Structures, Journal of the Eng. Mechanics Div, ASCE, Vol. 98, No. EM6, pp. 1433~1451, Dec. 1972.
- 21) Tang, W. H. : Probabilistic Evaluation of Penetration Resistances, Journal of the Geotech. Eng. Div, ASCE, Vol. 105, No. GT10, pp. 1173~1191, Oct. 1979.
- 22) Ang, A. H.-S. and Tang, W. H. : Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. II - Decision, Risk, and Reliability, John Wiley & Sons, 1984.
- 23) Christensen, P. T. and Baker, M. J. : Structural Reliability Theory and Its Applications, Chapter 6, Extended Level 2 Methods, Springer-Verlag, 1983.

(1986. 10. 22・受付)