

一様せん断変形を受ける円孔を有する正方形板の弾塑性座屈強度

ELASTO-PLASTIC BUCKLING STRENGTH OF SQUARE PLATES WITH CIRCULAR HOLES SUBJECTED TO UNIFORM SHEAR DEFORMATION

上野谷 実*・大村 裕**

By Minoru UENOYA and Hiroshi OHMURA

Elasto-plastic shear buckling of square plates containing centrally located circular holes is investigated analytically. Critical loads are obtained by the Rayleigh-Ritz method in combination with the finite element method used only to evaluate in-plane stresses. The plates are subjected to uniform shear stresses or uniform shear deformations. Ratios of the hole diameter to the plate length are 0.15, 0.3, 0.5, 0.7 and 0.85. The influence of the circular hole and in-plane loading condition on buckling strength is considered on various sized holes. The results suggest that the buckling strength in the uniform shear deformations is higher than the uniform shear stresses in the elastic and elasto-plastic ranges. These phenomena are more remarkable for the clamped plates than the simply supported plates in the elastic range and for the simply supported plates than the clamped plates in the elasto-plastic range.

Keywords: elasto-plastic buckling, perforated plates, shear load

1. ま え が き

土木、建築、造船、航空機などの分野において、構造部材の板に配管、配線、維持管理用マンホール、重量軽減などの目的で孔を設ける場合がある。このような孔を有する板要素を有孔板という。土木構造物では鋼箱桁のダイヤフラムやプレートガーダーの横桁ウェブなどに有孔板がみられる。有孔板は孔のない板に比較すると、孔による応力集中や断面積減少による力学的強度の低下が著しく、設計には応力状態、耐荷力、力学的挙動などを正確に把握する必要がある。

有孔板に面内荷重が作用すると、孔のため応力集中を生じる。この応力集中に関する研究は古くから多くなされ、応力関数を用いた弾性論による解析や光弾性による実験結果が西田¹⁾によって集大成されている。近年では有限要素法などのコンピュータによる数値解析法によって、複雑な孔形、荷重、境界条件などを有する有孔板の弾性はもちろん弾塑性応力解析も可能となった。有孔板は孔のため面外剛性も減少し座屈強度が著しく低下す

る。板の座屈強度は主に荷重条件と周辺の面外支持条件によって決まるが、有孔板の場合これらに加えて孔の形や大きさとその位置および孔縁の補強の有無などが影響する。

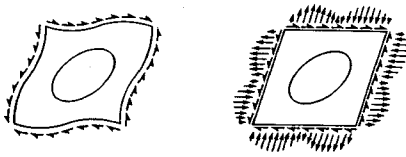
有孔板の座屈に関する研究は使用頻度の少ない特殊構造であることや解析の複雑さのため少なく、座屈の基本的荷重である圧縮を受ける場合が最も多く行われている^{2)~11)}。せん断あるいは曲げを受ける場合や圧縮、せん断、曲げの組合せ荷重を受ける場合の座屈解析に関する研究は少ない。せん断を受ける有孔板の弾性座屈に関する研究に限ってみれば、Kroll¹²⁾が1949年にRayleigh-Ritz法を用いて、円孔を有する単純支持正方形板が周辺に一様せん断応力を受ける場合の座屈解析を行った。無限板に対する応力分布を用いたため正方形板の辺長 l に対する円孔形の直径 d の比は $d/l=0.125, 0.25$ と小さい円孔に対する結果だけである。有限要素法による座屈解析は1967年にRockeyら¹³⁾が行ったが、無孔板の古典解に対して9.7%小さく、精度はあまりよくなかった。1968年、川井・大坪⁶⁾は円孔を有する圧縮板の座屈解析に面内応力解析を有限要素法で行い、面外変位を表わすたわみ関数に多項式を用いたRayleigh-Ritz法による方法を示した。1975年、Allman¹⁴⁾は有限要素法で精度のよい要素を用いてよい結果を得たが、孔の大きさは

* 正会員 工修 福山大学助教授 工学部土木工学科
(〒729-02 福山市東村町三蔵)

** 正会員 工博 広島大学教授 工学部第四類(建設系)
(〒724 東広島市西条町下見)

$d/l=0.5$ のみだった。1978年、著者¹⁵⁾は円孔を有する正方形板が一樣せん断応力を受ける場合の弾塑性座屈解析を行い、円孔の大きさが広範囲にわたって変化するときの座屈強度を示した。解析法は川井・大坪と同じ Rayleigh-Ritz法であるが、たわみ関数は精度のよいフーリエ級数を用い、面内の弾塑性応力解析は有限要素法で行った。この解析法は固有値計算にほとんど時間がかからず、材料非線形である面内の弾塑性応力計算に時間がかかるだけで非線形座屈計算への有用性を示した。1979年にRockey¹⁶⁾は円孔縁の補強リングの効果について理論および実験的研究を行っている。

いままでに述べた研究では Fig. 1(a) のように荷重は有孔板の周辺境界上で、せん断応力が等分布に作用し、面内方向変位の拘束がない場合である。当然、孔のために周辺は同図のような変形をする。ところが実際の構造物は多くの場合周辺境界にフランジやスチフナーなどが存在して、面内方向変位をある程度拘束する。周辺が完全な剛体で固定された状態でせん断変形する場合は、周辺が Fig. 1(b) のように直線を保ったままの変形となる。ここでは Fig. 1(a) と (b) の荷重状態をそれぞれ「一樣せん断応力荷重」および「一樣せん断変形荷重」あるいは単に「応力荷重」および「変形荷重」とよぶことにする。Schlack^{4),5)} および川井・大坪⁶⁾は周辺境界における面内方向変位の拘束が圧縮荷重を受ける円孔板の座屈強度を増加させることを解析と実験で明らかにした。



(a) uniform shear stress (b) uniform shear deformation

Fig. 1 Perforated plate subjected to shear.

一樣せん断変形を受ける有孔板の弾性座屈解析は1976年 Grosskruth ら¹⁷⁾が有限要素法を用いて初めて行った。その結果、一樣せん断変形荷重の座屈強度は円孔が大きくなると一樣せん断応力荷重より大きくなることを解析および実験によって明らかになったが、座屈強度について述べられているだけで、有孔板の応力状態や後座屈における面外挙動までは言及されなかった。その後、1983年に Sabir・Chow¹⁸⁾は円孔あるいは正方形孔を有する正方形板の弾性座屈解析を有限要素法によって行い、円孔について Grosskruth らの結果とよく近似する結果を得ている。1986年、著者¹⁹⁾は一樣せん断変形を受ける正方形板が板の中央に円孔を有する場合の弾性座屈解析を Rayleigh-Ritz法で行い、一樣せん断変形

荷の弾性座屈強度は一樣せん断応力荷重より増加し、孔縁の応力集中は減少することなどを明らかにした。また、模型実験を行い、初期座屈強度および後座屈挙動と後座屈強度を実験的に明らかにした。

板の辺長に対する板厚の比、すなわち幅厚比が大きい場合は弾性座屈が起こるが、土木、建築、造船では幅厚比の小さい板を使用することが少なくない。このような場合には、有孔板の一部が塑性状態となる弾塑性座屈を起こす。薄板の場合に起こる弾性座屈は崩壊強度に達するまでの後座屈強度を十分期待できるが、厚板の場合に起こる弾塑性座屈は後座屈強度がほとんどなく崩壊するので非常に重要となる。

有孔板の弾塑性座屈に関する研究は少なく圧縮荷重を受ける場合として藤田ら^{20),21)}、Azizian・Roberts²²⁾の研究がある。せん断荷重を受ける場合は、著者が一樣せん断応力荷重に関する弾塑性座屈強度の研究を行い、円孔による弾塑性座屈強度の低下は、弾性座屈強度の場合より大きいことを示した¹⁵⁾。Roberts・Azizian²³⁾は単純支持された正方形板が円孔あるいは正方形孔を有し、一樣せん断応力荷重あるいは相対する2辺だけ一樣せん断変形を受ける場合の弾塑性座屈を有限要素法によって解析したが、円孔や正方形孔の大きさは $d/l=0.25, 0.5$ の2種類だけである。板の4辺が一樣せん断変形荷重を受ける場合の弾塑性座屈解析はまだ行われていない。

実際の構造物にみられる有孔板の設計には周辺がフランジやスチフナーなどで弾性支持される有孔板の弾塑性座屈強度を明らかにすることが必要であるが、その上下限である変形荷重と応力荷重の座屈強度を明らかにすることが先決と考える。

本研究は一樣せん断変形あるいは一樣せん断応力荷重を受ける正方形板が板の中央に円孔を有する場合の弾塑性座屈解析を行う。弾塑性応力解析は有限要素法で行う。有限要素法で座屈解析を行えば高精度の結果が期待できるが、大型の固有値計算が必要である。本研究では多くのケースについて数値計算をするため精度の低下が懸念されるけれど計算時間を短縮するため固有値計算にほとんど時間のかからない Rayleigh-Ritz法を適用する。周辺の面外変形境界条件は単純支持あるいは固定とし、円孔の大きさは $d/l=0.15, 0.3, 0.5, 0.7, 0.85$ とする。荷重条件と円孔の大きさが応力状態、座屈強度、塑性域の拡大状況、塑性崩壊強度などに及ぼす影響を明らかにする。荷重条件と円孔の大きさによる影響を明確にする意味から、初期不整の残留応力や初期たわみはないものとして解析する。

2. 解析方法

(1) 座屈解析

Rayleigh-Ritz 法による板の座屈解析は幾何学的面外境界条件を満足するたわみ関数を仮定し、この関数の未定係数を座屈時のポテンシャルエネルギーが最小となるように決定する。以下この解析法について簡単に述べる。

面外荷重のない場合、面内荷重によって、座屈を起こすときのたわみに関する微分方程式は等方性板に対して直角座標系で次のように表わされる。

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 w は x と y で表わされるたわみ関数、 D は板の単位幅当たりの曲げ剛度、 N_x 、 N_y 、 N_{xy} は xy 面内に作用する面内力である。

座屈するときの板のひずみエネルギーと外力によってなされる仕事から板の全ポテンシャルエネルギー U は、次のように表わされる。

$$U = \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy + \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \dots\dots\dots (2)$$

求める解は U が最小になるようにたわみ関数 w を決定すれば得られる。

$$\delta \frac{l^2}{12(1-\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy + \delta \lambda \iint \left[\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\frac{\tau_{xy}}{\sigma_y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\sigma_y}{\sigma_y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} は、ある任意の荷重における面内の垂直およびせん断応力であり、 σ_y は降伏応力である。次式で定義される λ が求めれば荷重と幅厚比の関係が得られる。

$$\lambda = \frac{\sigma_y l^2}{E t^2} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 t は板厚である。Rayleigh-Ritz 法ではたわみ関数を次のような級数で表わす。

$$w(x, y) = \sum a_i f_i(x, y) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 a_i は未定係数であり、 $f_i(x, y)$ は幾何学的面外境界条件を満足する関数である。式 (5) を式 (3) へ代入して、各係数に関して微分すれば、次の方程式が得られる。

$$(\Phi + \lambda \Psi)A = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\Phi = [\phi_{ij}]$ 、 $\Psi = [\psi_{ij}]$ 、 $A = \{a_j\}$

$$\phi_{ij} = \sum_{q=1}^{N_e} \frac{l^2}{12(1-\nu^2)} \iint \left\{ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x \partial y} \right\} dx dy \dots\dots\dots (7)$$

$$\psi_{ij} = \sum_{q=1}^{N_e} \iint \left\{ \frac{\sigma_{x,q}}{\sigma_y} \frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{\tau_{xy,q}}{\sigma_y} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial y} + \frac{\partial f_j}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) + \frac{\sigma_{y,q}}{\sigma_y} \frac{\partial f_i}{\partial y} \frac{\partial f_j}{\partial y} \right\} dx dy \dots\dots\dots (8)$$

ここに、有限要素法で応力を計算する場合、各積分は要素ごとに行い、総和は全要素 N_e についてとる。本解析ではたわみ関数に後で示すフーリエ級数を用いるので、三角形要素について行う 2 重積分は、ガウスの 7 点公式数値積分によって計算する。式 (7) と (8) の微分と式の展開はたわみ関数の項数が増えると筆算では扱いがたい膨大な計算量になる。本解析では数式の微分、積分、展開などのできる数式処理言語を用いてコンピュータで計算式を誘導した。式 (7) と (8) の値が求めれば、板の座屈問題は式 (6) の λ を求める固有値問題に帰着し、たわみ関数が n 項の場合、 n 元の固有値解析となる。

(2) たわみ関数

たわみ関数は板の面外変形を表わす関数であり、面内変形とは無関係であり、周辺境界条件は任意に規定できる。Fig. 2 に示すようなせん断を受ける場合、本解析では正方形板の対称座屈に対するたわみ関数を次のような 8 項のフーリエ級数で仮定する。

単純支持の場合

$$w(x, y) = a_1 \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot \sin \frac{2\pi y}{l} + a_3 \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{3\pi y}{l} + a_4 \cos \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} + a_5 \cos \frac{3\pi x}{l} \cdot \cos \frac{3\pi y}{l} + a_6 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{4\pi y}{l}$$

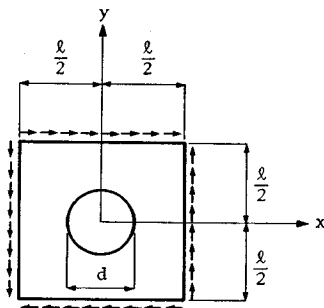


Fig. 2 Coordinate of perforated plate.

$$+ a_7 \sin \frac{4 \pi x}{l} \sin \frac{2 \pi y}{l} + a_8 \sin \frac{4 \pi x}{l} \cdot \sin \frac{4 \pi y}{l} \dots \dots \dots (9)$$

固定の場合

$$w(x, y) = \left(\cos \frac{\pi x}{l} \right)^2 \left(\cos \frac{\pi y}{l} \right)^2 \left(a_1 + a_2 \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \sin \frac{\pi y}{l} + a_3 \cos \frac{2 \pi x}{l} \cos \frac{2 \pi y}{l} + a_4 \sin \frac{2 \pi x}{l} \sin \frac{2 \pi y}{l} + a_5 \sin \frac{3 \pi x}{l} \cdot \sin \frac{3 \pi y}{l} + a_6 \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} + a_7 \cos \frac{3 \pi x}{l} \cos \frac{3 \pi y}{l} + a_8 \sin \frac{4 \pi x}{l} \sin \frac{4 \pi y}{l} \dots \dots \dots (10)$$

式(9)と(10)のたわみ関数は、著者が一様せん断応力載荷の場合に用いた¹⁵⁾。項の順序は座屈応力の収束に貢献する順位を示す。正方形板全体を8×8分割(128の三角形要素)した場合、これらのたわみ関数はFig.3に示すように、無孔板の古典解に対して5項で2%以下に収束し、8項のとき1%以下に収束する。第6~8項はほとんど収束に貢献していないが、これは無孔板に対してであり、有孔板の孔が大きい場合や弾塑性域では第6~8項が貢献することを今までの研究で確認している。しかし、このたわみ関数の項数の妥当性は有限要素法など他の解法や実験による結果と比較検討されなければならない。

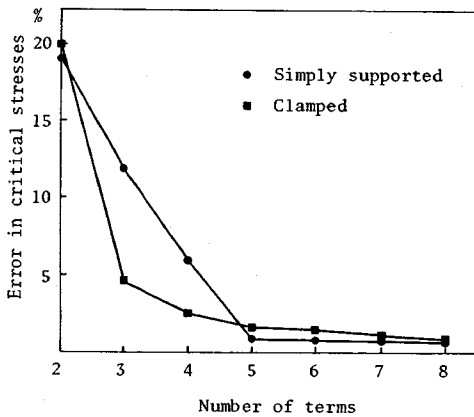


Fig. 3 Convergence of stresses with number of terms in the deflection function.

(3) 弾塑性応力解析

円孔を有する正方形板の平面応力解析は有限要素法で行った。用いた要素は要素内応力一定の三角形要素である。一様せん断変形は境界辺の長さが一定のまま直線を

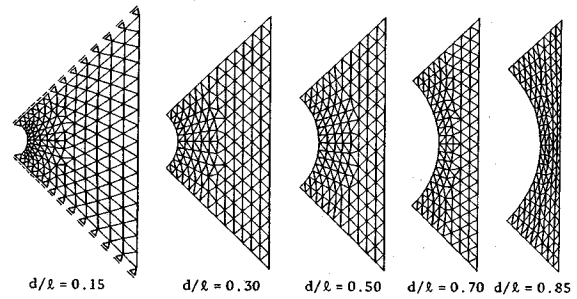


Fig. 4 Finite element mesh.

保ちながら回転するような変位を節点に与えた。計算は対称性を利用して正方形板の1/4について行った。要素分割はFig.4に示すように、板の1/4においてd/l=0.15~0.85に対してそれぞれ節点数167~151、要素数278~242である。

弾塑性応力解析は初期応力法を用い、材料特性はひずみ硬化のない完全弾塑性とし、弾性係数E=2.1×10⁶ kgf/cm²(206 GPa)、ポアソン比ν=0.3とし、降伏判定はミゼスの降伏条件を用いた。各荷重増分における収束判定は、降伏した要素の相当応力が降伏曲面の1%以内に近づくまで繰り返し計算を続ける。応力載荷の場合、繰り返し回数が40回を越えても収束しない場合を塑性崩壊とした。また変形載荷の場合、後述するように、周辺の節点に与えた一様せん断変位によって生ずる節点反力から計算する周辺せん断力がほとんど増加しなくなった状態を塑性崩壊とした。座屈計算の場合、降伏した要素の面外曲げ剛性は零とした。

3. 解析結果および考察

(1) 孔縁および周辺の弾性応力

一様せん断変形載荷の場合、周辺境界で強制変位を与えるため境界上節点に反力が生じる。この節点反力はFig.5(a)に示すような接線方向力と、Fig.5(b)のような法線方向力になる。接線方向力による合力はFig.5(d)に示すようにせん断力Q_τとする。法線方向力は、たとえば、Fig.5(b)に示す有孔板の上辺では合モーメントMを生ずる分布であり、Fig.5(e)に示すようにこの合モーメントMを上辺の角に作用する偶力Q_σ/2(=M/l)に置換する。他の辺でも同様な置換を行えば各辺と平行な偶力の合力はQ_σとなり、その方向はQ_τと逆である。一様せん断変形載荷の外力はこれらのせん断力Qとして次式で定義する。

$$Q = Q_{\tau} - Q_{\sigma} \dots \dots \dots (11)$$

平均せん断応力τ₀を次のように定義する。

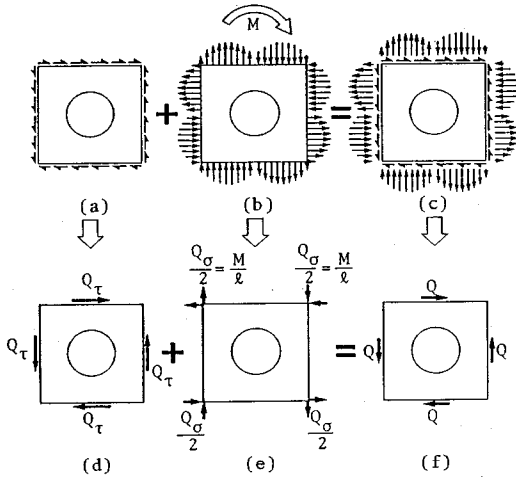


Fig. 5 Shear force at boundary under uniform shear deformation.

$$\tau_0 = \frac{Q}{tl} \dots \dots \dots (12)$$

上式から、平均せん断応力 τ_0 は無孔板にせん断力 Q が作用するとき生ずるせん断応力に等しい。せん断力 Q とせん断ひずみ γ の関係 (Fig. 12) については後述する。変形载荷と応力载荷の座屈強度を比較するために、変形载荷の座屈荷重や座屈応力は式 (11) のせん断力 Q や式 (12) の平均せん断応力 τ_0 で表わす。また、応力は平均せん断応力 τ_0 で除し、無次元応力で表示する。

孔縁は応力集中によって最大応力が生ずる部分である。孔縁の応力は極座標で表わすと、孔縁は自由端であるから、半径方向垂直応力 σ_r とせん断応力 $\tau_{r\theta}$ は零である。周方向垂直応力 σ_θ は、孔縁の隣接節点の周方向変位から周方向ひずみを計算し、そのひずみに弾性係数を乗じて求めた。その結果を応力载荷は Fig. 6 に、変形载荷は Fig. 7 に示す。これらの図を比較すると、円孔が小さい場合、あまり差はみられない。円孔が大きくなると、応力载荷の応力集中は著しく大きくなる。 $d/l = 0.85$ の場合、最大値の生ずる位置が対角線方向からはずれ 8 か所となる。これは応力载荷の場合、円孔が大きいと面内で曲げを受けるような変形となるためである。

応力载荷と変形载荷における孔縁の最大応力を平均せん断応力 τ_0 で除し応力集中係数として Fig. 8 に示す。無限板の場合、すなわち円孔径が非常に小さい場合、弾性論による解析値は $\sigma_\theta/\tau_0 = 4.0$ である。Wang²⁴⁾ は応力载荷について $d/l = 0.5$ まで弾性論によって解いているので同図に実線で示すとともに比較的粗い要素分割による結果¹⁹⁾を白抜き記号で示している。本解析の結果は Wang の値よりわずかに小さいが、よい近似を示しているので応力解析に対する要素分割は妥当と思われる。ま

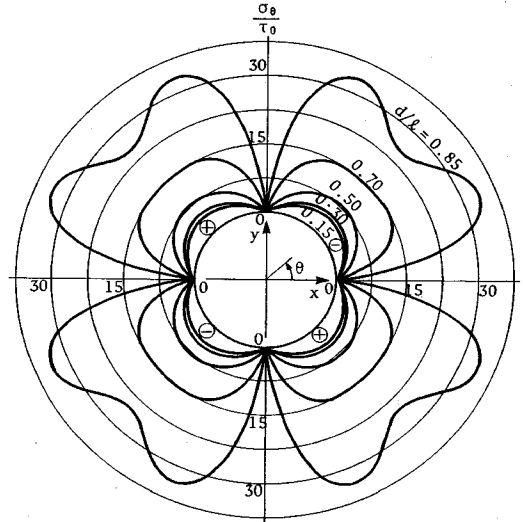


Fig. 6 Circumferential stresses at hole edge under uniform shear stress.

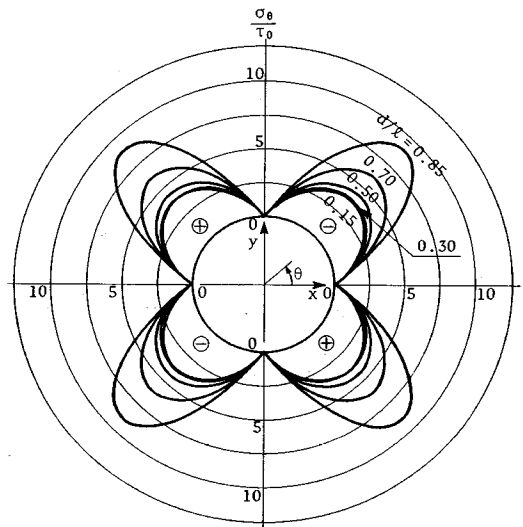


Fig. 7 Circumferential stresses at hole edge under uniform shear deformation.

た、この近似の度合から $d/l > 0.5$ における応力集中係数として本解析の結果を適用してもよいと思われる。応力载荷は変形载荷に比べて円孔が大きくなると応力集中が著しく、 $d/l = 0.85$ の場合、応力载荷は変形载荷の 3.57 倍もの応力集中を生ずる。なお、応力载荷で円孔が大きくなると要素の大きさによる差異が顕著になる。

孔縁の応力集中は周辺に向けて減衰し、孔が小さい場合、せん断応力は周辺上で等分布に近いが、孔が大きくなると減衰が不十分となり周辺上の応力は一定ではなくなる。 $u = l/2$ の周辺境界における応力分布を応力载荷と変形载荷に対して Fig. 9 と Fig. 10 に示す。応力载荷

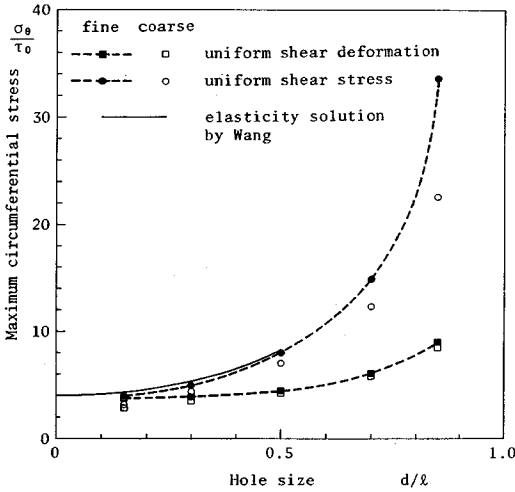


Fig. 8 Maximum circumferential stresses σ_θ/τ_0 at hole edge.

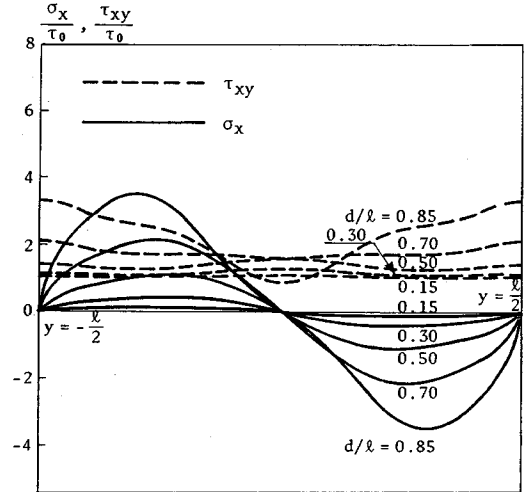


Fig. 10 Stress distribution at boundary under uniform shear deformation.

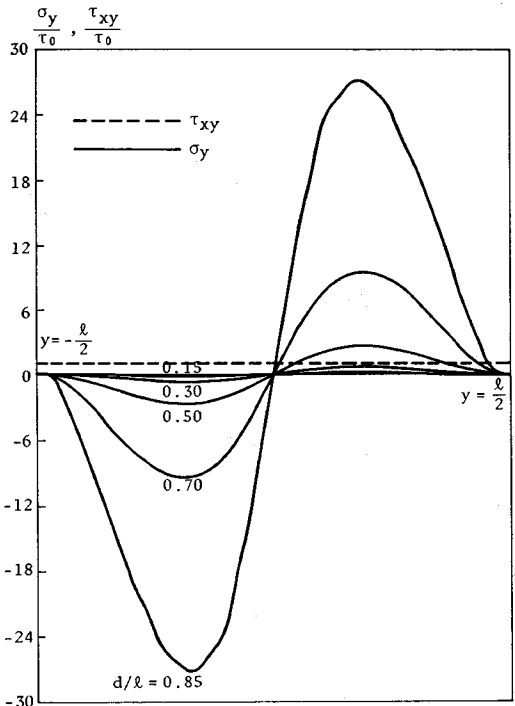


Fig. 9 Stress distribution at boundary under uniform shear stress.

の場合、周辺上では荷重条件から $\tau_{xy} = \tau_0$, $\sigma_x = 0$ であるが、孔が大きくなると、周辺の面内曲げ変形によって垂直応力 σ_y が生ずる。変形荷重では周辺が直線を保つように拘束されるので垂直応力 σ_x とせん断応力 τ_{xy} が生ずる。また、周辺がその長さを一定に保つ変形であることから

$$\epsilon_y = 0 \dots\dots\dots (13)$$

となる条件より、

$$\sigma_y = \nu \sigma_x \dots\dots\dots (14)$$

となる。これらの図より応力荷重の場合、円孔が大きくなると孔縁の応力集中に劣らぬ垂直応力 σ_y が生じ、 $d/l = 0.85$ のとき $\sigma_y/\tau_0 = 27.1$ となるが、孔縁の応力集中より大きくなることはない。変形荷重の場合は小さくて、 $d/l = 0.85$ のとき $\sigma_x/\tau_0 = 3.5$ である。せん断応力分布は孔が小さいとき辺中央がわずかに大きくなるが、孔が大きくなると、逆に辺中央は小さくなり辺の両端で最大となる分布を示す。

(2) 弾性座屈強度

一様せん断応力を受ける板の座屈応力は座屈係数 k を用いて次式で表わす。

$$\tau_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \dots\dots\dots (15)$$

無孔板の古典解による座屈係数は、単純支持および固定に対して、それぞれ $k_s = 9.34$ と $k_c = 14.71$ である。変形荷重を受ける有孔板の座屈強度は応力荷重の場合と比較するため、式 (12) によって定義した平均せん断応力で表わし式 (15) を適用する。これによって、座屈強度は座屈係数 k によって比較することができる。

Fig. 11 に弾性座屈係数と孔の大きさの関係を示す。同図において、面外境界条件は単純支持と固定に分け、面内境界条件は変形荷重に関するものを黒丸の実線で、応力荷重を黒丸の破線で示してある。全体的に円孔による座屈強度の低下は著しく、特に単純支持は固定より顕著である。

面内境界条件すなわち荷重条件の違いが座屈強度に与える影響を検討するため変形荷重と応力荷重の結果を比較する。単純支持の場合、座屈強度は荷重条件の違いに

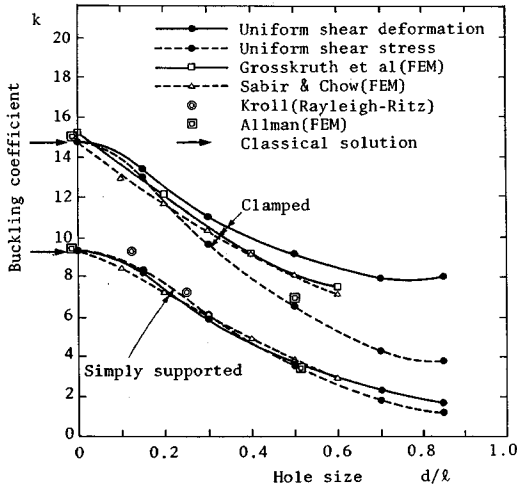


Fig. 11 Variation of elastic buckling coefficients with hole size.

よる差がほとんどみられない。ところが固定の場合、変形載荷の座屈強度は、円孔が大きくなるほど応力載荷より大きく、 $d/l=0.7\sim 0.85$ のとき応力載荷の 1.85～2.14 倍になる。

次に一様せん断変形の荷重条件で、有限要素法を用いて解いた Grosskruth ら¹⁷⁾と Sabir・Chow¹⁸⁾の結果と比較する。単純支持は有限要素法による結果とよい近似を示す。固定の場合円孔が大きくなると本解析は有限要素法による結果よりやや大きくなり $d/l=0.6$ のとき 12% 大きい値を示す。

(3) 弾塑性挙動および塑性域の広がり

Fig. 12 に弾塑性応力解析における荷重とせん断変形の関係を示す。縦軸は式 (16) で定義する塑性せん断力 Q_p で除した無次元せん断力である。

$$Q_p = \frac{\sigma_y t l}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots (16)$$

横軸のせん断ひずみは、応力載荷の場合、周辺境界が直線でないので図中に示すように境界辺の両端を結んだ直線が載荷前の境界辺となす角度を平均せん断ひずみとする。この図において曲線の傾きは有孔板の面内剛性を表わすことになる。円孔が大きくなると、載荷条件の違いによる差異が顕著となり、変形載荷は応力載荷より強度が著しく大きいことがわかる。すなわち変形載荷は面内剛性および塑性域の発生する荷重や塑性崩壊荷重がそれぞれ応力載荷より大きい。塑性崩壊強度は、円孔の大きい場合、変形載荷が応力載荷の 2～3 倍になる。

塑性域は対角線軸と座標軸に関して対称となるので、板の 1/8 について変形載荷と応力載荷の塑性域を Fig. 13 に示す。図中の番号は降伏したときの荷重段階を表わし、番号順に塑性域が広がる。最初の降伏は対角

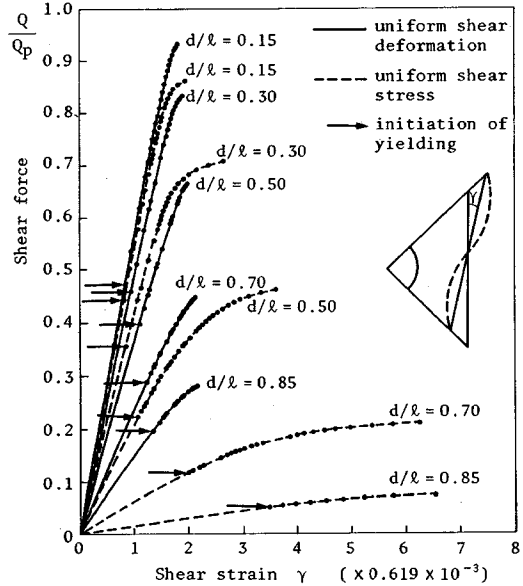


Fig. 12 Load-displacement curves.

線上の孔縁で始まり、徐々に周辺に向けて塑性域が広がる。円孔の小さい場合この広がりは最小断面に沿って進展する。応力載荷は塑性域が周辺断面に到達した荷重で崩壊するが、変形載荷はまだ耐荷強度があり、塑性域が周辺断面全域を貫通したときに崩壊する。この相違が崩壊強度の差異となる。また、円孔が大きくなると塑性域の広がり方にも差異が現われ、応力載荷は面内の曲げ変形の影響を強く受けて塑性域が最小断面と対角線断面の中間を貫通する。ところが、変形載荷は塑性域が対角線断面を貫通し、塑性崩壊強度に大きな差が生ずる原因になる。

(4) 弾塑性座屈強度

単純支持および固定に対する円孔板の弾塑性座屈強度をそれぞれ Fig. 14 と Fig. 15 に示す。横軸は次式で定義する幅厚比 l/t に関するパラメーター R である。

$$R = \frac{l}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y \cdot 12(1-\nu^2)}{E \pi^2 k}} \dots\dots\dots (17)$$

幅厚比の大きい場合、有孔板は弾性応力状態で座屈する。ところが、図中の矢印より小さい幅厚比では弾塑性座屈となる。図中の黒点は弾塑性応力解析の荷重段階を示している。したがって曲線の最上位の点が塑性崩壊荷重に相当する。

これらの図からわかるように、弾塑性座屈強度は円孔が大きくなるほど、また幅厚比が小さくなるほど弾性座屈以上に荷重の影響を強く受ける。 $d/l=0.15\sim 0.85$ において、変形載荷の弾性座屈強度は単純支持の場合応力載荷の 0.98～1.43 倍であり、固定の場合応力載荷の 1.03～2.14 倍である。塑性崩壊強度は単純支持、固定

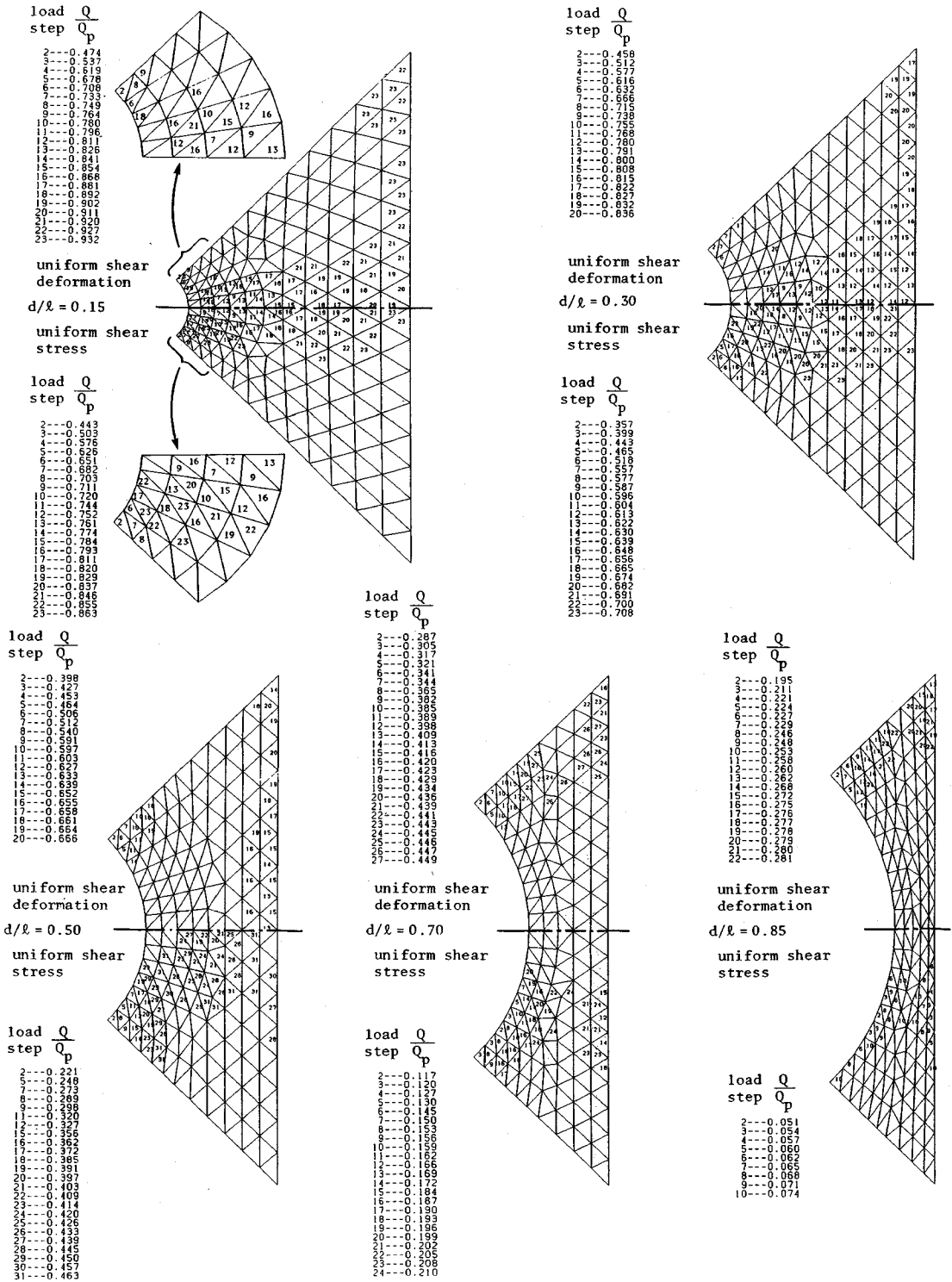


Fig. 13 Spread of plasticity under uniform shear deformation and uniform shear stress.

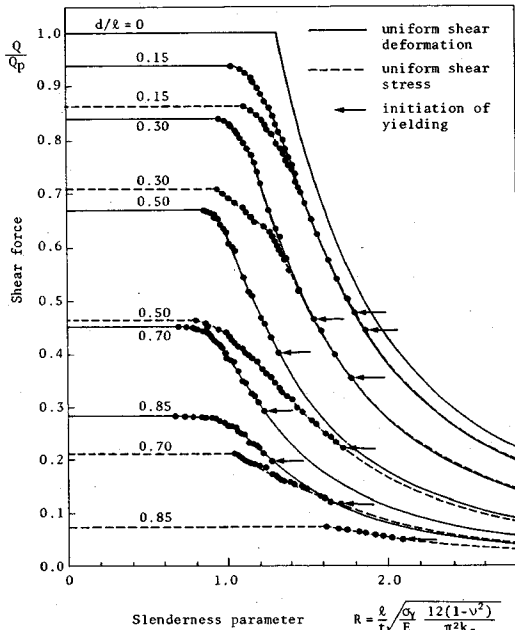


Fig. 14 Elasto-plastic buckling of simply supported square plates.

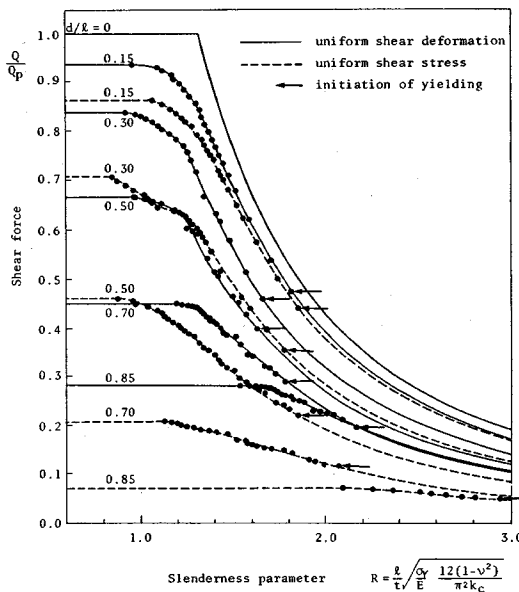


Fig. 15 Elasto-plastic buckling of clamped square plates.

ともに応力載荷の1.08~3.80倍となり、塑性崩壊強度の増加の割合は単純支持が固定より大きく、弾性座屈とは逆の傾向を示す。

実際の構造物では本解析のような荷重状態はまれで、ほとんどの場合周辺境界はフランジのような補剛材で支持されている。このような場合、周辺の境界条件は本解

析の境界条件である応力載荷と変形載荷の中間的なものと予想される。したがって今後フランジなどで支持されている有孔板を直接解いてフランジの剛性と座屈強度の関係を実験的に把握する研究が必要と思われる。

4. まとめ

中央に円孔を有する正方形板が一様せん断変形を受けるときの弾塑性座屈解析を Rayleigh-Ritz 法で行った。円孔の大きさは $d/l=0.15\sim 0.85$ の範囲で変化させ、荷重条件は一様せん断変形荷重あるいは一様せん断応力荷重とした。応力分布や座屈強度は、円孔の大きさと荷重条件によって大きく変化することが明らかになった。これらの点を列挙すれば次のようになる。

- (1) 一様せん断変形荷重による弾塑性座屈強度および塑性崩壊強度は一様せん断応力荷重の場合より大きく、その差は円孔が大きくなるほど著しい。この傾向は面外境界条件が固定より単純支持の場合に顕著となる。
- (2) 弾性座屈強度は弾塑性座屈強度と同様に荷重条件による影響を受けるが、弾塑性座屈強度の場合ほど著しい差は生じない。しかし、この傾向は面外境界条件が単純支持より固定の場合に顕著となり、弾塑性座屈の場合と異なる傾向を示す。

(3) 塑性崩壊時の塑性域は、円孔が大きくなると、荷重条件による差異が顕著となる。一様せん断応力荷重の場合最小断面と対角線断面の中間を塑性域が貫通するが、一様せん断変形荷重の場合対角線断面を塑性域が貫通する。

(4) 孔縁の応力集中は、円孔が大きくなると、一様せん断応力荷重の場合著しく高くなるが、一様せん断変形荷重の場合はそれほど高くない。

(5) 本解析による弾性座屈強度は、面外支持条件が固定の場合、円孔が大きくなると、他の著者らによる有限要素法の結果よりやや大きくなる傾向がある。

なお、本解析に用いたたわみ関数の弾塑性座屈に対する妥当性は直接比較できる他の解析結果や実験結果がないので検討することができなかったが、現在、著者が行った弾塑性せん断座屈実験の結果と比較検討中である。また、本報告は有孔板の弾塑性せん断座屈の基礎的研究として円孔を有する正方形板を解析の対象に選んだ。しかし実際の設計では矩形孔や強度低下を防ぐ補強方法に関する資料が重要と思われるのでこれらの問題に対する解析と実験も継続中である。以上の課題に対する検討結果は別の機会に報告する予定である。

参考文献

- 1) 西田正孝：応力集中，森北出版，1969.
- 2) Levy, S., Wooley, R. M. and Kroll, W. D. :

- Instability of simply supported square plate with reinforced circular hole in edge compression, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 39, Dec., 1947.
- 3) Kumai, T. : Elastic stability of the square plate with a central circular hole under edge thrust, *Proc. of the 1st Japan National Congress for App. Mech.*, pp. 81~86, 1951.
 - 4) Schlack, A.L. : Elastic stability of pierced square plates, *Experimental Mechanics*, Vol. 4, No. 6, pp. 167~172, June, 1964.
 - 5) Schlack, A.L. : Experimental critical loads for perforated square plates, *Experimental Mechanics*, Vol. 8, No. 2, pp. 69~74, Feb., 1968.
 - 6) Kawai, T. and Ohtsubo, H. : A method of solution for the complicated buckling problems of elastic plates with combined use of Rayleigh-Ritz's procedure in the finite element method, *Proc. of the Second Conference on Matrix Method in Structural Mechanics*, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, pp. 967~994, Oct., 1968.
 - 7) Pennington Vann, W. : Compressive buckling of perforated plate elements, *Proc. of the 1st Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, University of Missouri-Rolla, April, 1971.
 - 8) Ritchie, D. and Rhodes, J. : Buckling and postbuckling behaviour of plates with holes, *Aeronautical Quarterly*, Vol. 26, No. 4, pp. 281~296, 1975.
 - 9) 須見尚文・関谷 壯 : 一樣変位により圧縮を受ける有孔長方形板の応力および座屈, *日本機械学会論文集*, Vol. 42, No. 354, pp. 389~395, 1976.
 - 10) 長野 健・熊崎伸二 : 有孔板の座屈強度 I 圧縮座屈, *石川島播磨技報*, Vol. 17, No. 4, pp. 381~385, 1977.
 - 11) 竹内洋一郎・須見尚文・中 隆文 : 直交異方性有孔長方形板の応力および座屈解析, *日本機械学会論文集*, Vol. 43, No. 370, pp. 2055~2063, 1977.
 - 12) Kroll, W.D. : Instability in shear of simply supported square plates with reinforced hole, *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, Vol. 43, pp. 465~472, Nov., 1949.
 - 13) Rockey, K. C., Anderson, R. G. and Cheung, Y. K. : The behaviour of square shear webs having a circular hole, *Symp. on Thin Walled Steel Structures*, University College of Swansea, Sept., 1967.
 - 14) Allman, D. L. : Calculation of the elastic buckling loads of thin flat reinforced plates using triangular finite elements, *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. 9, pp. 415~432, 1975.
 - 15) Uenoya, M. and Redwood, R. G. : Elasto-plastic shear buckling of square plates with circular holes, *Computers and Structures*, Vol. 8, No. 2, pp. 291~300, Jan., 1978.
 - 16) Rockey, K. C. : The buckling and post-buckling behaviour of shear panels which have a central circular cutout, *International Conference on Thin-Walled Structures*, Institution of Structural Engineers, University of Strathclyde, pp. 658~672, 1979.
 - 17) Grosskurth, Jr, J. F., White, R. N. and Gallagher, R. H. : Shear buckling of square perforated plates, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 102, No. EM 6, pp. 1025~1040, Dec., 1976.
 - 18) Sabir, A. B. and Chow, F. Y. : Elastic buckling of flat panels containing circular and square holes, *Proc. of the International Conference on Instability and Plastic Collapse of Structures*, Manchester, pp. 311~321, 1983.
 - 19) 上野谷実・大村 裕 : 円孔を有する固定正方形板の弾性せん断座屈, *構造工学論文集*, Vol. 32 A, 1986.
 - 20) 藤田 譲・吉田宏一郎・荒井宏範 : 有孔板の座屈強度について (その2), *日本造船学会論文集*, 第126号, pp. 285~294, 1969.
 - 21) 藤田 譲・吉田宏一郎・荒井宏範 : 有孔板の座屈強度について (その3), *日本造船学会論文集*, 第127号, pp. 161~169, 1970.
 - 22) Azizian, Z. G. and Roberts, T. M. : Buckling and elasto-plastic collapse of perforated plates, *The Michael R. Horne Conference*, Manchester, Sept., 1983.
 - 23) Roberts, T. M. and Azizian, Z. G. : Strength of perforated plates subjected to in-plane loading, *Thin-Walled Structures*, Vol. 2, pp. 153~164, 1984.
 - 24) Wang, C. K. : Theoretical analysis of perforated shear webs, *J. appl. Mech.*, *Trans A. S. M. E.*, Vol. 13, No. 2, pp. A-77~A-84, June, 1946.

(1986. 10. 7・受付)