投稿論文

Paper
(In Japanese)

【土木学会論文集 第386号／I-8 1987年10月】

Voigt型粘弾性体固定矩形板の過渡曲げ振動解析

TRANSIENT FLEXURAL VIBRATION ANALYSIS FOR CLAMPED VOIGT-VISCOELASTIC RECTANGULAR PLATES

石川清志*・夏目正太郎**

By Kiyoshi ISHIKAWA and Shotaro NATSUME

A method is presented for the transient flexural vibration analysis of clamped thin Voigt-viscoelastic rectangular plates. The analysis is done by making use of a series of characteristic beam-functions which identically satisfy the boundary conditions and the Stokes method to solve the governing differential system having viscous damping. An approximate expansion formula is developed and applied to the transient flexural vibration problem of the clamped Voigt-viscoelastic rectangular plate subjected to a concentrated transverse arbitrary exciting load.

Keywords **:** ***transient vibration, viscoelastic, clamped plate, eigenfunction***

1. まえがき

板の曲げ振動において，対向2縁が単純支持された矩形板の場合には Fourier 級数を導入すれば，すべて Lévy 解[1]の式形で展開され，他の対向2縁に固定，自由等の境界条件が与えられても比較的簡単に運動方程式から固有振動方程式が厳密に誘導され，これから固有振動数を決定することができる[2]．これに対して，周辺がすべて固定された矩形板には，運動方程式と境界条件に適合する解が簡単に得られないことから，固定の境界条件が満足されるはり関数（自由振動の固有関数）を導入し，エネルギー変分による Rayleigh-Ritz 法[3),4)]や Bolotin 法[5),6)]の近似解析が主流になっている観がある．固定矩形板の強制振動について，Laura ら[7)]は多項式近似による Galerkin の方法，Warburton[8)] ははり関数を用いた Rayleigh-Ritz 法によって調和型荷重に対する定常解を求めた．しかしながら，われわれが知る限りにおいて，板に衝撃荷重等が負荷された後に誘発される自由振動の介在による過渡応答の研究は意外に少ないように思われる．渋谷ら[9)]は集中衝撃荷重が作用した固定無限帯板に対して Fourier-Laplace 変換を導入して解析した．また，われわれ[10)]は先に対向2縁が単純支持された矩形板に対し Fourier 級数と固有関数による解法を試みた．これらは厳密解析であって，いずれも荷重の影響は運動方程式の一般解に，荷重に依存した特解を加えた式形で表わされている．また近似解析として，Forsyth ら[11)]は時間に任意な集中衝撃荷重を受ける片持板の過渡曲げ振動問題について，Rayleigh-Ritz 法を導入して解析した．

本報告は時間に任意な集中荷重が作用した Voigt 型粘弾性体固定矩形板の過渡曲げ振動問題に対する一解析法を提示するものである．これは，Giencke[12),13)]が固定矩形板の静的曲げ問題に用いたはり関数を導入し，この関数の直交性を利用して運動方程式を直接展開して表わし，さらにこれを Stokes が熱伝導解析に用いた方法[14),15)]を適用して解くもので，はり関数を導入することによって近似解析ではあるが，単純支持板の Lévy 解とほとんど同様に処理し得る容易さをもつこと，そして Stokes 法が Voigt 体の過渡振動解析にきわめて有用性をもつことを示す．集中荷重の扱いは，2重級数展開による Navier の解[1)]や特解を導入した Lévy 解と異なり，便宜荷重は線荷重と仮定し，矩形板は線荷重の載荷線上を仮想境界とした同じ力学定数からなる2つの帯板から構成されるものとみなし，仮想境界の連続性[1)]を満足す

* 正会員 信州大学技官 工学部土木工学科
（〒380 長野市若里 500）
** 正会員 信州大学助教授 工学部土木工学科（同上）

るように誘導する．そして線荷重の分布域の極限をとれば集中荷重に対応するものとなる．一般的に，集中荷重が作用した場合は分布荷重の場合と比較して解の収束性が劣り[1),13)]，高次展開を必要とし，数値計算では扱いにくい系である．この場合でも本解析法はある程度の展開次数で解が収束する有用性を示す．

2. 基礎方程式

Voigt の定義に従えば，粘弾性体の応力とひずみの関係は弾性体の Hooke 法則における λ,μ をそれぞれ次の演算子 $(\lambda+\lambda'\partial/\partial t)$，$(\mu+\mu'\partial/\partial t)$ で置き換えたものに相当する[16)]．ここで，λ,μ は Lamé 定数，λ',μ' は粘性係数，t は時間である．粘弾性論において，λ,μ と λ',μ' の間にはいかなる関係が存在するかはこれらの性質を知るうえで１つの課題であるが，理論的研究で採用されているものとしては便宜的に $\lambda'/\mu'=\lambda/\mu$ を用いている場合が多い[15)]．この関係を採用し，曲げ振動に対する Voigt 体薄板の運動方程式は Young 率 E および Poisson 比 ν を用いて表わせば次式となる．

$$\left(1+\zeta\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2\nabla^2 w+\frac{\rho}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \cdots\cdots(1)$$

ここで，$\zeta=\lambda'/\lambda=\mu'/\mu$，$D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$，$\nabla^2$ は直交座標 (x,y) に対する Laplace 演算子，w は曲げたわみ，ρ は質量密度，h は板厚である．

矩形板の寸法は $2a\times 2b$ とし，座標原点は矩形板の中央の中立面にとる．そして，この対向２縁は固定（$x=\pm a$：$w=\partial w/\partial x=0$）とする．次の無次元量：

$$\left.\begin{aligned}&\xi=\frac{x}{a}\,(|\xi|<1),\quad \eta=\frac{y}{b}\,(|\eta|<1),\quad \kappa=\frac{b}{a}\\&\tau=\frac{t}{b^2}\sqrt{D/\rho}\,(0<\tau),\quad \varepsilon=\frac{\zeta}{b^2}\sqrt{D/\rho}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

を導入し，**Fig. 1** に示すような線荷重 $p(\xi,\tau)$ が $\eta=\bar{\eta}$ 線上に分布するものと仮定する．すると矩形板は $\eta=\bar{\eta}$ を仮想境界とした同じ力学定数からなる２つの帯板から構成されるものとみることができ，各帯板に対して次の運動方程式が成立する．

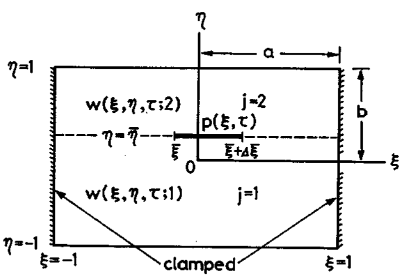

Fig. 1 Clamped Rectangular Plate under a Line Load.

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\bar{\nabla}^2\bar{\nabla}^2 w+\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}=0,\ j=1,2 \cdots\cdots(3)$$

ただし，$\bar{\nabla}^2=\partial^2/\partial\xi^2+\partial^2/\partial\eta^2$，$w$ は各帯板に対して $w=w(\xi,\eta,\tau;j)$ と定義して表わす．また，j は帯板番号で次の領域を表わすものである．

$$\left.\begin{aligned}&j=1：-1<\eta<\bar{\eta}\\&j=2：\quad\bar{\eta}<\eta<1\end{aligned}\right\},\ |\xi|<1 \cdots\cdots(4)$$

$p(\xi,\tau)$ が作用したことによる $\eta=\bar{\eta}$ の連続条件[1)]は次式で表わされる．

$$\eta=\bar{\eta}：\begin{bmatrix} w\\ \dfrac{\partial w}{\partial\eta}\\ \left(1+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}+\nu\kappa^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right)\\ \left(1+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\dfrac{\partial}{\partial\eta}\bar{\nabla}^2 w\end{bmatrix}_{j=2}$$

$$=\begin{bmatrix} w\\ \dfrac{\partial w}{\partial\eta}\\ \left(1+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}+\nu\kappa^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right)\\ \left(1+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\dfrac{\partial}{\partial\eta}\bar{\nabla}^2 w\end{bmatrix}_{j=1}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \dfrac{b^3}{D}p(\xi,\tau)\end{bmatrix} \cdots\cdots(5)$$

上式の第１，２行は η 方向に注目した，たわみ，たわみ角の変位適合，第３，４行は曲げモーメント，せん断力の力平衡を表わしたものである．

矩形板の境界条件は

$$\xi=\pm 1：w=\frac{\partial w}{\partial\xi}=0,\ j=1,2, \cdots\cdots(6)$$

$\eta=\pm 1$ では固定，自由等が与えられるものとする．そして，各帯板の初期変位，初期速度を f,g とすれば，初期条件は

$$\tau=0：w=f(\xi,\eta;j),\ \frac{\partial w}{\partial\tau}=g(\xi,\eta;j),\ j=1,2 \cdots\cdots(7)$$

3. はり関数による展開

単純支持縁板以外の静的曲げ問題に，Giencke[12)]は２種類の関数，すなわちはりの自由振動および長柱の座屈に現われる固有関数を導入して解析した．これは近似解析ではあるが，自由縁を除く[13),17)]大部分の境界条件に対応できるもので，関数の直交性を利用して偏微分方程式（板の平衡方程式）を常微分方程式に帰着させることができる．板の運動方程式に，はり関数を導入すれば１項のみが厳密に展開できないのに対し，長柱の関数を用いれば慣性項をも含めた２項にわたって厳密に展開できないという特徴があって近似精度がはり関数より劣る．

式（３）の w は次の級数で表わされると仮定する．

$$w(\xi,\eta,\tau;j)=\sum_{m=1}^{\infty}w_m^*(\eta,\tau;j)\varphi_m(\xi),\quad j=1,2\cdots(8)$$

ただし，関数 φ_m は次の微分方程式および境界条件（式（6）に対応して）を満足するものである．

$$\varphi_m''''-\mu_m^4\varphi_m=0\cdots\cdots(9)$$

$$\xi=\pm1:\varphi_m=\varphi_m'=0\cdots\cdots(10)$$

ここで，μ_m は任意定数，プライム′は ξ について微分を意味する．式（9）の φ_m は式（10）に対して次の直交条件

$$\int_{-1}^{1}\varphi_m\varphi_k d\xi=0,\quad \mu_m\neq\mu_k\cdots\cdots(11)$$

を満足するが，しかし

$$\int_{-1}^{1}\varphi_m'\varphi_k' d\xi=0,\quad \mu_m\neq\mu_k\cdots\cdots(12)$$

を満足しない不都合な性質がある．

式（8）にちなんで，$w=\sum_k w_k^*\varphi_k$ とおき，これを式（3）に代入し，これに φ_m を掛けて $\xi=-1$ から $\xi=1$ まで積分すれば式（11）から次式が得られる．

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left\{\frac{\partial^4 w_m^*}{\partial\eta^4}-2\kappa^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^2 w_k^*}{\partial\eta^2}\frac{\int_{-1}^{1}\varphi_k'\varphi_m' d\xi}{\int_{-1}^{1}\varphi_m^2 d\xi}+\kappa^4\mu_m^4 w_m^*\right\}+\frac{\partial^2 w_m^*}{\partial\tau^2}=0,\quad j=1,2\cdots\cdots(13)$$

上式の k の級数において，$m\neq k$ の項の影響は式（13）の w_m^* に対する無限連立偏微分方程式全体からみてあまり大きくないと仮定して，主要項 $m=k$ のみを残して極力簡単化する[13]．すなわち

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left\{\frac{\partial^4 w_m^*}{\partial\eta^4}-2\kappa^2 H_m\frac{\partial^2 w_m^*}{\partial\eta^2}+\kappa^4\mu_m^4 w_m^*\right\}+\frac{\partial^2 w_m^*}{\partial\tau^2}=0,\quad j=1,2\cdots\cdots(14)$$

ここで，

$$H_m=\frac{1}{c_m}\int_{-1}^{1}(\varphi_m')^2 d\xi,\quad c_m=\int_{-1}^{1}\varphi_m^2 d\xi\cdots\cdots(15)$$

同様に，式（5），（7）は次式に書き換えられる．

$$\eta=\bar\eta:\left[\begin{array}{c} w_m^* \\ \dfrac{\partial w_m^*}{\partial\eta} \\ \left(1+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w_m^*}{\partial\eta^2}-\nu\kappa^2 H_m w_m^*\right) \\ \left(1+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\partial^2 w_m^*}{\partial\eta^2}-\kappa^2 H_m w_m^*\right)\end{array}\right]_{j=2}$$

$$=\left[\begin{array}{c} w_m^* \\ \dfrac{\partial w_m^*}{\partial\eta} \\ \left(1+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w_m^*}{\partial\eta^2}-\nu\kappa^2 H_m w_m^*\right) \\ \left(1+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{\partial^2 w_m^*}{\partial\eta^2}-\kappa^2 H_m w_m^*\right)\end{array}\right]_{j=1}$$

$$+\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{b^3}{D}p_m^*(\tau)\end{array}\right],\cdots\cdots(16)$$

$$\tau=0:w_m^*=f_m^*(\eta;j),\quad \frac{\partial w_m^*}{\partial\tau}=g_m^*(\eta;j),\quad j=1,2\cdots\cdots(17)$$

ここで，

$$\left.\begin{array}{l} p_m^*(\tau)=\dfrac{1}{c_m}\displaystyle\int_{-1}^{1}p(\xi,\tau)\varphi_m d\xi \\ f_m^*(\eta;j)=\dfrac{1}{c_m}\displaystyle\int_{-1}^{1}f(\xi,\eta;j)\varphi_m d\xi \\ g_m^*(\eta;j)=\dfrac{1}{c_m}\displaystyle\int_{-1}^{1}g(\xi,\eta;j)\varphi_m d\xi \end{array}\right\}\cdots\cdots(18)$$

式（9）を式（10）で解けば，φ_m の偶関数 ${}_e\varphi_m$ および奇関数 ${}_o\varphi_m$ は次式で表わされる．

$$\left.\begin{array}{l} {}_e\varphi_m=\dfrac{\cos\mu_m\xi}{\cos\mu_m}-\dfrac{\cosh\mu_m\xi}{\cosh\mu_m} \\ {}_o\varphi_m=\dfrac{\sin\mu_m\xi}{\sin\mu_m}-\dfrac{\sinh\mu_m\xi}{\sinh\mu_m} \end{array}\right\}\cdots\cdots(19)$$

ここで，μ_m は次式の根である．

$$\tan\mu_m\pm\tanh\mu_m=0\cdots\cdots(20)$$

ただし，＋の場合は ${}_e\varphi_m$，－は ${}_o\varphi_m$ に対するものである．

単純支持（$\xi=\pm1:\varphi_m=\varphi_m''=0$）の場合には Fourier 級数の式形となり，式（12）も満足されることにより，式（14）は厳密に展開された結果となる．この場合は φ_m および H_m を単に次式で置き換えればよい．

$${}_e\varphi_m=\cos\mu_m\xi,\quad {}_o\varphi_m=\sin\mu_m\xi,\quad H_m=\mu_m^2\cdots\cdots(21)$$

ただし，μ_m は ${}_e\varphi_m$ に対して $\cos\mu_m=0$，${}_o\varphi_m$ に対して $\sin\mu_m=0$ の根をとる．

集中荷重 $P(\tau)$ が $\xi=\bar\xi$ 点に作用した場合（**Fig. 1**），式（18）の p_m^* は次式となる．

$$p_m^*(\tau)=\lim_{\Delta\bar\xi\to0}\frac{P(\tau)}{\Delta\bar\xi}\frac{1}{c_m}\int_{\bar\xi}^{\bar\xi+\Delta\bar\xi}\varphi_m d\xi$$

$$=\frac{\varphi_m(\bar\xi)}{c_m}P(\tau)\cdots\cdots(22)$$

4.　$\eta=\pm1$ の境界条件

$\eta=\pm1$ の境界条件は任意に与えられる．すなわち，固定，単純支持および自由は $\eta=\pm1$：

(a)　固定：$w_m^*=\dfrac{\partial w_m^*}{\partial\eta}=0$

(b)　単純支持：$w_m^*=0$,

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial^2 w_m^*}{\partial\eta^2}-\nu\kappa^2 H_m w_m^*\right)=0$$

(c)　自由：

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial^2 w_m^*}{\partial\eta^2}-\nu\kappa^2 H_m w_m^*\right)=0,$$

$$\left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial^2 w_m^*}{\partial\eta^2}-(2-\nu)\kappa^2 H_m w_m^*\right]=0 \quad \cdots\cdots(23)$$

ただし，上式は $\eta=1$ のとき $j=2$，$\eta=-1$ のとき $j=1$ をとる．

w_m^* は Stokes 法[14),15)]によって求められる．w_m^* は次の級数で表わされると仮定する．

$$w_m^*(\eta,\tau\,;j)=\sum_{n=1}^{\infty}Z_n\phi_n(\eta\,;j),\quad j=1,2 \cdots\cdots(24)$$

ただし，Z_n は時間に依存する任意関数，関数 ϕ_n は次の微分方程式：

$$\phi_n^{\mathrm{IV}}-2\kappa^2H_m\phi_n^{\mathrm{II}}-(\omega_n^2-\kappa^4\mu_m^4)\phi_n=0,\quad j=1,2, \cdots\cdots(25)$$

連続条件：

$$\eta=\bar{\eta}:\begin{bmatrix}\phi_n\\ \phi_n^{\mathrm{I}}\\ \phi_n^{\mathrm{II}}\\ \phi_n^{\mathrm{III}}\end{bmatrix}_{j=2}=\begin{bmatrix}\phi_n\\ \phi_n^{\mathrm{I}}\\ \phi_n^{\mathrm{II}}\\ \phi_n^{\mathrm{III}}\end{bmatrix}_{j=1}, \cdots\cdots(26)$$

および境界条件（$\eta=\pm1$）：

$$\left.\begin{array}{ll}(\mathrm{a}) & \text{固定}：\phi_n=\phi_n^{\mathrm{I}}=0\\ (\mathrm{b}) & \text{単純支持}：\phi_n=\phi_n^{\mathrm{II}}=0\\ (\mathrm{c}) & \text{自由}：\phi_n^{\mathrm{II}}-\nu\kappa^2H_m\phi_n=0,\\ & \qquad \phi_n^{\mathrm{III}}-(2-\nu)\kappa^2H_m\phi_n^{\mathrm{I}}=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(27)$$

を満足するものである．ここで，ω_n は任意定数，肩文字 $^{\mathrm{I}}$ は η について微分を意味する．また，式 (27) では $\eta=1$ のとき $j=2$，$\eta=-1$ のとき $j=1$ をとる．

式 (14) では時間に対する1階微分演算子が存在し，時間関数を $e^{i\omega_n\tau}$ と仮定した変数分離では一般に ω_n が複素数[18)]となり，複素根を求める解析となり数値計算上の処理が煩雑となる．これを避けるために，式 (14) の位置 (η) に対する微分演算子が弾性板の運動方程式と同型であることに注目し，式 (25) の解を正規関数にとれば式 (14) を解くことが可能である．すなわち，式 (25) は $\varepsilon=0$ とした式 (14) に $w_m^*=\phi_ne^{i\omega_n\tau}$ を適用したものに相当し，ω_n は弾性板の固有振動数とみることもできる．

式 (25) の ϕ_n は式 (26)，(27) のもとで次の直交条件が成立する．

$$\int_{-1}^{\bar\eta}[\phi_n\phi_l]_{j=1}\,d\eta+\int_{\bar\eta}^{1}[\phi_n\phi_l]_{j=2}\,d\eta=0,\quad \omega_n\neq\omega_l \cdots(28)$$

この直交条件を用いれば，式 (24) の Z_n は次式で表わされることになる．

$$Z_n=\frac{1}{K_n}\left\{\int_{-1}^{\bar\eta}[w_m^*\phi_n]_{j=1}\,d\eta+\int_{\bar\eta}^{1}[w_m^*\phi_n]_{j=2}\,d\eta\right\}\cdots(29)$$

ここで，

$$K_n=\int_{-1}^{\bar\eta}[\phi_n^2]_{j=1}\,d\eta+\int_{\bar\eta}^{1}[\phi_n^2]_{j=2}\,d\eta \cdots\cdots(30)$$

式 (14) に注目して，次の2項は式 (24) から単に

$$\left.\begin{array}{l}\left(1+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)w_m^*=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(Z_n+\varepsilon\dot{Z}_n)\phi_n\\ \dfrac{\partial^2w_m^*}{\partial\tau^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ddot{Z}_n\phi_n\end{array}\right\},\quad j=1,2\cdots\cdots(31)$$

となる．ただし，ドット $\cdot$ は τ について微分を意味する．そして，次の2項は ϕ_n の級数で表わされるものとする．

$$\left.\begin{array}{l}\left(1+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\dfrac{\partial^2w_m^*}{\partial\eta^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\phi_n\\ \left(1+\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)\dfrac{\partial^4w_m^*}{\partial\eta^4}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}B_n\phi_n\end{array}\right\},\quad j=1,2\ \cdots\cdots(32)$$

すると，この A_n，B_n は式 (28) の直交条件を用いれば次式で得られることになる．

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{K_n}\left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left\{\int_{-1}^{\bar\eta}\left[\frac{\partial^2w_m^*}{\partial\eta^2}\phi_n\right]_{j=1}d\eta+\int_{\bar\eta}^{1}\left[\frac{\partial^2w_m^*}{\partial\eta^2}\phi_n\right]_{j=2}d\eta\right\},\\ B_n&=\frac{1}{K_n}\left(1+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left\{\int_{-1}^{\bar\eta}\left[\frac{\partial^4w_m^*}{\partial\eta^4}\phi_n\right]_{j=1}d\eta+\int_{\bar\eta}^{1}\left[\frac{\partial^4w_m^*}{\partial\eta^4}\phi_n\right]_{j=2}d\eta\right\}\end{aligned}\cdots\cdots(33)$$

式 (31)，(32) および式 (33) の積分結果から，式 (16)，(23) および式 (26)，(27) の連続条件，境界条件によって，式 (14) は次式に書き換えられる．

$$\omega_n^2(Z_n+\varepsilon\dot{Z}_n)+\ddot{Z}_n=E_n(\tau)\cdots\cdots(34)$$

ここで，

$$E_n(\tau)=\frac{b^3}{D}p_m^*(\tau)\frac{\phi_n(\bar\eta\,;1)}{K_n}\cdots\cdots(35)$$

ただし，この結果は，仮想境界 ($\eta=\bar\eta$) で $[w_m^*,\ \partial w_m^*/\partial\eta]_{j=2}=[w_m^*,\ \partial w_m^*/\partial\eta]_{j=1}$ となることから，これらの速度も連続 $\partial/\partial\tau\,[w_m^*,\ \partial w_m^*/\partial\eta]_{j=2}=\partial/\partial\tau\,[w_m^*,\ \partial w_m^*/\partial\eta]_{j=1}$ であるとした．また，固定あるいは単純支持縁で，境界条件 $\eta=\pm1:[w_m^*,\ \partial w_m^*/\partial\eta]=0$ が現われる場合はこれらの速度も $\eta=\pm1:\partial/\partial\tau\,[w_m^*,\ \partial w_m^*/\partial\eta]=0$ であるとした．

式 (34) に対する初期条件は式 (17) から次式で与えられる．

$$\tau=0:Z_n=I_n,\quad \dot{Z}_n=J_n\cdots\cdots(36)$$

ここで，

$$\left.\begin{array}{l}I_n=\dfrac{1}{K_n}\left\{\displaystyle\int_{-1}^{\bar\eta}[f_m^*\phi_n]_{j=1}\,d\eta+\int_{\bar\eta}^{1}[f_m^*\phi_n]_{j=2}\,d\eta\right\}\\ J_n=\dfrac{1}{K_n}\left\{\displaystyle\int_{-1}^{\bar\eta}[g_m^*\phi_n]_{j=1}\,d\eta+\int_{\bar\eta}^{1}[g_m^*\phi_n]_{j=2}\,d\eta\right\}\end{array}\right\}\cdots(37)$$

式 (34) を式 (36) で解けば Z_n は決定される[15)]．

式 (25)，(26) および式 (27) を満足する ϕ_n は次のようにして得られる．式 (25) の一般解は次式で表わされる．

$$\phi_n(\eta\,;j)=[\cos\alpha_n\eta\quad \sin\alpha_n\eta\quad \cosh\beta_n\eta\quad \sinh\beta_n\eta\,]N_{nj},\quad j=1,2\cdots\cdots(38)$$

ここで，α_n, β_n は

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n&=\sqrt{\sqrt{\kappa^4H_m^2+\omega_n^2-\kappa^4\mu_m^4}-\kappa^2H_m}\\ \beta_n&=\sqrt{\sqrt{\kappa^4H_m^2+\omega_n^2-\kappa^4\mu_m^4}+\kappa^2H_m}\end{aligned}\right\},\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

N_{nj} は各領域に対する 4×1 の積分定数である．式 (26) の連続条件から，N_{n1} と N_{n2} の関係は

$$N_{n2}=N_{n1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

となることが明らかである．この結果から ϕ_n は j に対して区別して定義する必要がなく，η の全領域 ($|\eta|<1$) に対する関数として扱ってよいことになる．式 (27) の境界条件で N_{nj} が求められ，ϕ_n が決定される．たとえば，式 (27) の (a) および (b) に対する ϕ_n は次式で表わされる．

（a） 固定 ($\eta=\pm1$)

$$\left.\begin{aligned}{}_e\phi_n(\eta)&=\frac{\cos\alpha_n\eta}{\cos\alpha_n}-\frac{\cosh\beta_n\eta}{\cosh\beta_n}\\ {}_o\phi_n(\eta)&=\frac{\sin\alpha_n\eta}{\sin\alpha_n}-\frac{\sinh\beta_n\eta}{\sinh\beta_n}\end{aligned}\right\},\quad|\eta|<1\ \cdots\cdots(41)$$

ただし，α_n, β_n を構成する ω_n は $\omega_n>\kappa^2\mu_m^2$ の範囲で次式の根をとる．

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_n\tan\alpha_n+\beta_n\tanh\beta_n=0\ (_e\phi_n\text{ に対して})\\ &\alpha_n\cot\alpha_n-\beta_n\coth\beta_n=0\ (_o\phi_n\text{ に対して})\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots(42)$$

（b） 単純支持 ($\eta=\pm1$)

$$\left.\begin{aligned}{}_e\phi_n(\eta)&=\cos\alpha_n\eta\\ {}_o\phi_n(\eta)&=\sin\alpha_n\eta\end{aligned}\right\},\quad|\eta|<1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

Table 1 Roots ω_n of $\alpha_n\tan\alpha_n+\beta_n\tanh\beta_n=0$ Corresponding to μ_m for All Four Edges Clamped Rectangular Plates Having the Aspect Ratio $\kappa=2/3$, 1, and 1.5.

m \ n	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
			κ = 2/3		
μ_1 = 2.3650	6.7691	31.4221	75.8786	140.0587	223.9685
μ_2 = 5.4978	16.6378	40.4375	84.8584	149.1122	233.0968
μ_3 = 8.6394	36.0538	58.7205	102.6355	166.7612	250.7455
μ_4 =11.7810	64.4357	86.3440	129.5764	193.3484	277.1877
μ_5 =14.9226	101.6523	123.0816	165.6967	229.0073	312.5746
			κ = 1		
μ_1 = 2.3650	9.0131	33.1183	77.5123	141.6882	225.6035
μ_2 = 5.4978	32.9776	55.1188	98.7015	162.6467	246.5224
μ_3 = 8.6394	77.2598	98.3689	140.7220	203.8767	287.3335
μ_4 =11.7810	141.3631	162.0151	203.5156	265.8075	348.6079
μ_5 =14.9226	225.2294	245.6444	286.6235	348.2340	430.3730
			κ = 1.5		
μ_1 = 2.3650	15.2022	37.5940	81.5010	145.5303	229.3936
μ_2 = 5.4978	70.4815	90.7547	132.3012	194.9292	278.0556
μ_3 = 8.6394	170.3990	190.2505	230.5123	291.5501	373.3044
μ_4 =11.7810	314.7409	334.4921	374.2805	434.4264	515.0845
μ_5 =14.9226	503.4975	523.2188	562.8193	622.5196	702.4946

Note: μ_m satisfy $\tan\mu_m+\tanh\mu_m=0$

ただし，α_n は次式の根をとる．

$$\left.\begin{aligned}&\cos\alpha_n=0\ (_e\phi_n\text{ に対して})\\ &\sin\alpha_n=0\ (_o\phi_n\text{ に対して})\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

式 (40) の結果から，式 (30) の K_n および式 (35) の E_n は次式となる．

$$K_n=\int_{-1}^{1}\phi_n^2d\eta,\quad E_n(\tau)=\frac{b^3}{D}p_m^*(\tau)\frac{\phi_n(\bar{\eta})}{K_n}\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

また，式 (7) に関して，矩形板全体 ($|\xi|<1$, $|\eta|<1$) に対する初期変位 $f(\xi,\eta)$，初期速度 $g(\xi,\eta)$ とすれば，式 (36) の I_n, J_n は次式となる．

$$\left.\begin{aligned}I_n&=\frac{1}{c_mK_n}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(\xi,\eta)\varphi_m\phi_nd\xi d\eta\\ J_n&=\frac{1}{c_mK_n}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}g(\xi,\eta)\varphi_m\phi_nd\xi d\eta\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

以上をまとめて，矩形板の任意点の w は次式で表わされる．

$$w(\xi,\eta,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Z_n\varphi_m(\xi)\phi_n(\eta),\quad(|\xi|<1,\ |\eta|<1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

また，曲げモーメント M_x, M_y およびせん断力 S_x, S_y は次式で得られることになる．

$$\left.\begin{aligned}M_x&=-\frac{D}{b^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(Z_n+\varepsilon\dot{Z}_n)(\kappa^2\varphi_m''\phi_n+\nu\varphi_m\phi_n^{\mathrm{II}})\\ M_y&=-\frac{D}{b^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(Z_n+\varepsilon\dot{Z}_n)(\varphi_m\phi_n^{\mathrm{II}}+\nu\kappa^2\varphi_m''\phi_n)\\ S_x&=-\kappa\frac{D}{b^3}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(Z_n+\varepsilon\dot{Z}_n)(\kappa^2\varphi_m'''\phi_n+\varphi_m'\phi_n^{\mathrm{II}})\\ S_y&=-\frac{D}{b^3}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(Z_n+\varepsilon\dot{Z}_n)(\varphi_m\phi_n^{\mathrm{III}}+\kappa^2\varphi_m''\phi_n^{\mathrm{I}})\end{aligned}\right\}$$
$$(|\xi|<1,\ |\eta|<1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

5. 数値計算結果

板は 4 縁固定の矩形板とし，静止 ($f=g=0$) している板に次の調和型集中荷重

$$P(\tau)=P_0\sin\delta\tau\quad(0<\tau)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

が板の中央点 ($\bar{\xi}=\bar{\eta}=0$) に作用した場合について数値計算する．ここで，P_0 は荷重の大きさ，δ は調和型荷重の円振動数である．境界条件および荷重状態が $\xi=\eta=0$ について対称であるから，式 (47) の φ_m, ϕ_n は偶関数 ($_e\varphi_m$, $_e\phi_n$) のみについて扱えばよい．

Table 1 は板の辺長比が $\kappa=2/3$, 1, 1.5 とした場合の式 (42)（第 1 式）の根 ω_n を表わしたものである．式 (20)（＋に対して）の根 μ_m は $\mu_1=2.365$, $\mu_2=5.498$, …と得られることから，この μ_m に依存する式 (42) の根 ω_n は **Table 1** のようにまとめられる．この ω_n は Leissa[2]の結

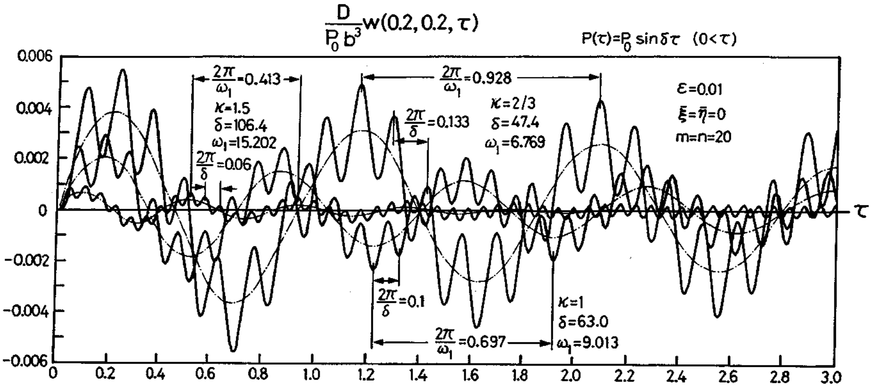

Fig. 2 Variation of Deflections with Time for All Four Edges Clamped Rectangular Plates Having the Aspect Ratio $\kappa=2/3$, 1, and 1.5 and Subjected to the Concentrated Harmonic Load at Its Center, respectability.

果とほぼ合致するもので，$\kappa=1$（正方形板）の場合，$m=n$ に対して縦軸対称の値となる．また，$\kappa=2/3$ と $\kappa=3/2=1.5$ の場合は，それぞれの ω_n を ω_1 $(m=1)$ で割った比でみれば，どちらか一方の m と n を入れ換えれば対応する値となる．なお，式（20）および式（42）の根は Newton 法によって求めた．また，式（20）の高次根 μ_m（約 $m\geqq 4$）は $\mu_m=(m-1/4)\pi$ で近似することになる．

Fig. 2 は $\kappa=2/3$，1，1.5 とした矩形板に対する w $(0.2,\ 0.2,\ \tau)$ の時間変化を表わしたものである．ただし，δ は $\kappa=2/3$，1，1.5 に対して，それぞれ $\delta=47.4$，$\delta=63.0$，$\delta=106.4$ を与えたもので，これらは最低次の固有振動数 ω_1 $(m=1)$ の約 7 倍に相当するものである．なお，粘性係数および固有関数の展開次数は共通に $\varepsilon=0.01$ および $m=n=20$ とした．

調和型荷重が作用した場合の過渡挙動は誘起された自由振動に，調和型荷重の円振動数に依存する定常振動が付加された形態で表わされる．自由振動は ω_1 $(m=1)$ が支配的となる約 $2\pi/\omega_1$ の固有周期で運動を誘発し，粘性の減衰作用によって，この振幅が時間経過に伴って順次減少し，消滅することによって過渡振動は調和型荷重の円振動数による周期 $2\pi/\delta$ の定常振動に移り変わる．また，$\varepsilon=0$ のとき，$\delta=\omega_n$ の場合には調和型荷重特有な共振現象が起こる．

Table 2 は正方形板（$\kappa=1$）とした場合の固有関数の展開次数に対するたわみおよび曲げモーメントの収束状態を示したものである．$\xi=\eta=0.2$ 点のたわみおよび曲げモーメントは約 $m=n=15$ 程度の展開次数で収束した数値結果が得られる．しかし，載荷点のたわみは，収束がみられるものの他の点のたわみより高次展開を必要とする．縁曲げモーメントは，展開次数の漸増に対して，いくらか不安定な収束状態を示すが，得られた数値結果には極端な変動が現われず収束する傾向にある．また，$M_x=M_y$ となるべきところいくらか数値結果が異なる．

式（13）において，$m\neq k$ 項を無視したことによる本解析法の妥当性を得るために，次の単純支持縁が現われる正方形板（$\kappa=1$）について数値計算を試みる．

$$\left.\begin{array}{l}\text{Case I：固定}\ (\xi=\pm1)-\text{単純支持}\ (\eta=\pm1)\\ \text{Case II：単純支持}\ (\xi=\pm1)-\text{固定}\ (\eta=\pm1)\end{array}\right\} \qquad (50)$$

ただし，荷重はともに式（49）の調和型集中荷重が板の中央に作用するものとする．これらは ξ，η の境界条件を入れ換えたもので，Case I ははり関数展開による近似解析，Case II は式（21）の Fourier 級数展開による

Table 2 Convergence of Eigenfunction Expansions for Deflections and Bending Moments of All Four Edges Clamped Square Plate Subjected to the Concentrated Harmonic Load at Its Center.

m=n	$\frac{D}{P_0b^3}w(0,0,0.2)$	$\frac{D}{P_0b^3}w(0.2,0.2,0.6)$	$\frac{1}{P_0b}M_x(0.2,0.2,0.8)$	$\frac{1}{P_0b}M_y(0.2,0.2,0.8)$	$\frac{1}{P_0b}M_x(0,1,0.9)$	$\frac{1}{P_0b}M_y(1,0,0.9)$
5	0.001104	-0.001517	-0.004527	-0.004522	-0.01225	-0.01054
10	0.001026	-0.001512	-0.004597	-0.004589	-0.01162	-0.00997
15	0.001011	-0.001512	-0.004596	-0.004591	-0.01199	-0.01031
20	0.001004	-0.001512	-0.004596	-0.004591	-0.01173	-0.01007
25	0.001003	-0.001512	-0.004596	-0.004591	-0.01193	-0.01026
30	0.001003	-0.001512	-0.004596	-0.004591	-0.01177	-0.01010

Note; Circular frequency of the concentrated harmonic load $\delta=63$, viscous damping coefficient $\varepsilon=0.01$, Poisson's ratio $\nu=0.3$, loading point $\xi=\eta=0$, and the aspect ratio $\kappa=1$.

Table 3 Roots ω_n of $\cos\alpha_n=0$ Corresponding to μ_m for Case I.

m \ n	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
μ_1= 2.3650	7.2492	25.7103	64.9290	124.0663	202.9889
μ_2= 5.4978	32.2755	50.0490	88.1426	146.6628	225.2575
μ_3= 8.6394	76.8293	94.8438	132.3570	190.1248	268.1343
μ_4=11.7810	141.0528	159.3647	196.8180	254.1501	331.6252
μ_5=14.9226	224.9868	243.5326	281.1123	338.2938	415.4242

Note; μ_m satisfy $\tan\mu_m+\tanh\mu_m=0$ and the aspect ratio $\kappa=1$.

Table 4 Roots ω_n of $\alpha_n\tan\alpha_n+\beta_n\tanh\beta_n=0$ Corresponding to μ_m for Case II.

m \ n	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
μ_1= $\pi/2$	7.2377	32.2739	76.8290	141.0527	224.9867
μ_2= $3\pi/2$	25.5540	49.9526	94.8171	159.3557	243.5290
μ_3= $5\pi/2$	64.6534	87.7784	132.1885	196.7447	281.0785
μ_4= $7\pi/2$	123.7172	146.0022	189.6904	253.9088	338.1630
μ_5= $9\pi/2$	202.5919	224.3438	267.3829	331.1219	415.1096

Note; μ_m satisfy $\cos\mu_m=0$ and the aspect ratio $\kappa=1$.

Table 5 Comparison of Deflections and Bending Moments between Case I and Case II Subjected to the Concentrated Harmonic Load and Convergence of Eigenfunction Expansions.

m=n	Case I	Case II	m=n	Case I	Case II
	$\frac{D}{P_0b^3}w(0,0,0.5)$			$\frac{1}{P_0b}M_x(0.2,0.2,1.0)$	$\frac{1}{P_0b}M_y(0.2,0.2,1.0)$
5	−0.002671	−0.002684	5	0.02982	0.02841
10	−0.002822	−0.002834	10	0.03069	0.02924
15	−0.002851	−0.002862	15	0.03070	0.02926
20	−0.002861	−0.002872	20	0.03070	0.02926
25	−0.002865	−0.002877	25	0.03070	0.02926
30	−0.002865	−0.002877	30	0.03070	0.02926
	$\frac{D}{P_0b^3}w(0.2,0.2,1.0)$			$\frac{1}{P_0b}M_x(1,0,1.5)$	$\frac{1}{P_0b}M_y(0,1,1.5)$
5	0.002716	0.002723	5	0.06033	0.06048
10	0.002718	0.002725	10	0.04782	0.04681
15	0.002718	0.002725	15	0.05490	0.05458
20	0.002718	0.002725	20	0.04990	0.04909
25	0.002718	0.002725	25	0.05377	0.05334
30	0.002718	0.002725	30	0.05061	0.04987

Note; Circular frequency of the concentrated harmonic load δ=49, viscous damping coefficient ε=0.01, Poisson's ratio ν=0.3, loading point $\bar{\xi}=\bar{\eta}$=0, and the aspect ratio κ=1.

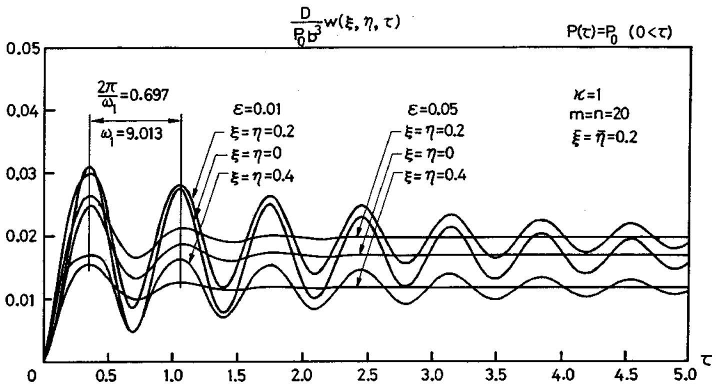

Fig. 3 Variation of Deflections with Time for an All Four Edges Clamped Square Plate Subjected to a Concentrated Step Load at $\bar{\xi}=\bar{\eta}=0.2$.

厳密解析となる.

Table 3 は Case I に対する固有振動数 ω_n, **Table 4** は Case II に対する ω_n である. これらはどちらか一方の m と n を入れ換えれば対応するもので比較することができる. なお, **Table 4** の値は Leissa[2)]の結果と完全に合致するものである.

Table 5 は $\delta=49$ とした場合, Case I と Case II の間で対応するたわみ, 曲げモーメントの値を m および n の展開次数に対して表わしたものである. m および n の展開次数に対して, Case I, II の両者ともほぼ同程度な収束状態を示し, 載荷点のたわみは高次展開を必要とするが, 少し離れた $\xi=\eta=0.2$ 点のたわみは約 $m=n=15$ 程度の展開次数で収束する. 曲げモーメントについても同様であるが, 固定縁の曲げモーメントはいくらか不安定な収束状態を示す. **Table 3, 4, 5** から近似解析による Case I の場合の結果は厳密解析による Case II と比較して, 曲げモーメントがいくらか異なるものの, 全体的にみて極端な差異が現われず, 妥当性を得ているとみてもよいであろう.

Fig. 3 は静止している 4 縁固定の正方形板に次のステップ型集中荷重

$$P(\tau)=P_0\ (0<\tau)\cdots\cdots(51)$$

が板の $\bar{\xi}=\bar{\eta}=0.2$ 点に作用した場合のたわみの過渡挙動を表わしたものである. 集中荷重が板の任意点に作用した場合, 式 (47) で表わされるたわみは一般性をもつ式形となり, φ_m に ${}_e\varphi_m$, ${}_o\varphi_m$, ϕ_n に ${}_e\phi_n$, ${}_o\phi_n$ をそれぞれ代入した組合せとなり, これら 4 個の組合せに対して μ_m に依存する ω_n および Z_n をそれぞれ定め, これらの総和で

表わされることになる．

ステップ型荷重が負荷されたたわみの過渡挙動は誘起された自由振動によって静的たわみを中心とした振動現象[9]を誘発し，粘性減衰作用によって自由振動の振幅が時間経過に伴って順次減衰し，消滅することによって定常状態を表わす静的たわみに移行する特徴をもつ．

Fig. 3 で現われた自由振動は固有振動数 $\omega_1=9.013$ $(m=1)$ が支配的となる約 $2\pi/\omega_1=0.697$ の固有周期で運動し，粘性係数 $\varepsilon=0.05$ の場合では時間約 $\tau=2.5$ 以後でほぼ消滅し，過渡たわみは静的たわみに移行する．

以上の数値計算において，m と n の展開次数に対する解の収束性は，κ あるいは δ（調和型荷重の場合）の値によってもいくらか異なるが，最も高次展開を必要とする場合は $\varepsilon\to 0$ とした弾性板振動のときである．この場合でも集中荷重の載荷点以外のたわみは約 $m=n=20$ 次程度で収束する．ε の値が大きいほどあるいは長時間経過するほど解の収束性がよくなる．これは粘性減衰作用により ω_n に依存する自由振動の高次項の影響を受けないことによる．また，ここでは荷重をすべて $\xi\eta$ 平面で点となる集中荷重を取り扱ったが，板の静的曲げ問題にも現われるように，集中荷重が作用した場合は，分布荷重の場合と比較して解の収束性が劣り，高次展開を必要とし数値計算上扱いにくい系である．特に，曲げモーメント，さらにせん断力に至っては顕著である．これは極端な不連続関数となる集中荷重を連続関数である φ_m および ϕ_n の重ね合せによって表示することに原因する．

6. あとがき

本研究は対向２縁が固定された Voigt 体矩形板の過渡曲げ振動問題に Giencke および Stokes の理論を応用しこの解析法の有用性を示した．解析の主な特徴を要約すると次のとおりである．

（１） はりの自由振動に現われるはり関数を導入して Voigt 体の運動方程式を展開して表わした．このはり関数は自由縁を除外した大部分の境界条件 $(\xi=\pm 1)$ に適用できるもので，近似解析ではあるが単純支持縁板の Lévy 解とほとんど同様に処理し得る容易さをもつ．

（２） 時間の１階微分演算子を含む式 (14) に対して，時間関数を $e^{i\omega_n\tau}$ と仮定した変数分離では一般に ω_n が複素数となり，μ_m に依存した超越方程式の複素根 ω_n を求める解析となり，数値計算処理がきわめて困難となる．これを避けるために，Stokes 法は式 (14) の位置に対する微分演算子が弾性板の運動方程式と同型であることに注目し，式 (25) の解を正規関数にとり，この直交性を利用して式 (14) を展開し，境界条件 $(\eta=\pm 1)$，集中荷重が負荷された仮想境界の連続条件および初期条件のもとで直接解かれる．したがって，実数解析の範囲で問題が解決される．

（３） 集中荷重は時間に任意な式形で与えられ，これが負荷されることにより，矩形板は載荷線上 $(\eta=\bar{\eta})$ を仮想境界とした２つの帯板に分割して表わし，この仮想境界の連続条件を満足するように Stokes 法の解析に合わせて処理した．

参　考　文　献

1) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company Inc., 2nd ed., pp. 108～124, 137, 141～143, 1959.

2) Leissa, A. W. : The free vibration of rectangular plates, Journal of Sound and Vibration, 31, pp. 257～293, 1973.

3) Ritz, W. : Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, Annalen der Physik, 28, 737～786, 1909.

4) Leissa, A. W. : Vibration of Plates, NASA SP-160, 1969.

5) Bolotin, V. V. et al. : Asymptotic method of investigating the natural frequency spectrum of elastic plates, Rascheti na Prochnost, 6, Mashgiz, Moscow, pp. 231～253, 1960, (in Russian).

6) Elishakoff, I. B. : Bolotin's dynamic edge effect method, The Shock and Vibration Digest, 8, pp. 95～104, 1976.

7) Laura, P. A. A. and Duran, R. : A note on forced vibrations of a clamped rectangular plate, Journal of Sound and Vibration, 42, pp. 129～135, 1975.

8) Warburton, G. B. : Comment on "A note on forced vibrations of a clamped rectangular plate", Journal of Sound and Vibration, 45, pp. 461～466, 1976.

9) Shibuya, T. et al. : Flexural stress waves in an infinitely long strip with clamped edges subjected stepwise to a concentrated transverse load, ZAMM, 54, 421～427, 1974.

10) 石川清志ほか：調和型集中外力を受ける矩形板の強制振動について，土木学会論文報告集，第 319 号，pp. 21～32, 1982.

11) Forsyth, E. M. and Warburton, G. B. : Transient vibration of rectangular plates, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 2, No. 4, pp. 325～330, 1960.

12) Giencke, E. : Reihenansätze zur Lösung von plattenproblemen, ZAMM, 41, T 86, 1961.

13) Marguerre, K. and Woernle, H. T. : Elastic Plates, Blaisdell Publishing Company, A Division of Ginn and Company, 1969（玉手統訳：弾性平板，固体力学シリーズ５，培風館，pp. 57, 109～124, 1974）.

14) Hidaka, K. : Randwertaufgabe in Beziehung zur Wärmeleitung bei nichtkonstanten Koeffizienten, Geophys, Mag., Vol. V, No. 4, S. 331.
Hidaka, K. : Anwendung der Stokes' schen Methode auf die Theorie der winderzengten Meeresströmungen, Mem. Imp. Marine Observ, Vol. V, pp. 51, 1932.

15) 西村源六郎：振動工学，誠文堂新光社，pp. 131～140, 309～311, 470, 475～479, 1969.

16) Ewing, W. M. et al. : Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill Book Company, Inc., pp. 272～278, 1957.
17) Beck, M. : Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes, Z. angew. Math. u. Phys., 3, 225～228, 1952.
18) 妹沢克惟：振動学，岩波書店，pp. 88～92, 1932.

(1986. 8. 12・受付)