
研究展望

Review

研究展望

曲げを受けるコンクリート部材のひびわれと たわみに関する研究の現状

ON CRACKING AND DEFORMATION OF FLEXURAL CONCRETE MEMBERS

角田与史雄*

By Yoshio KAKUTA

1. ま え が き

コンクリート構造物の設計において考慮すべき限界状態には種々あるが、使用限界状態の中軸をなすのがひびわれとたわみである。

ひびわれは、構造物の美観や水密性、気密性、ならびに鋼材の腐食に関する耐久性などから制限を受けるものであるが、ひびわれ幅を制御するという複合体固有の考え方が設計に用いられている。

構造物のたわみは、使用性や機能性を確保する目的からその大きさに制限を受けるが、適切な上げ越し量を決定するための施工上の目的からも、その合理的算定法が必要となる。

曲げを受けるコンクリート部材の設計に用いる応力理論は、ひびわれが生じていない状態を想定し全断面を有効とする理論（以下では理論Ⅰとよぶ）と、ひびわれの生じた状態を想定しコンクリートの引張抵抗を無視する理論（以下では理論Ⅱとよぶ）とがあり、各国とも共通して用いられている。

また、曲げを受けるコンクリート部材の終局強度理論は、設計に用いる材料の応力-ひずみ関係や終局ひずみ値などで、国による差はみられるが、理論の基本はほぼ共通したものとなっている。

それに対してコンクリート部材のひびわれ幅およびたわみの算定法に関しては、これまで数多くの研究が行われているにもかかわらず、相異なるさまざまな提案が行われており、統一された理論がないのが実状である。そ

れは、ひびわれ現象の複雑さと、ひびわれ発生後の部材の変形状の複雑さに原因があるが、最近の研究の進展により、提案されている各種の方法にも共通性が多くみられるようになってきた。

一方、従来の鉄筋コンクリート（RC）およびプレストレストコンクリート（PC）との中間領域が近年注目を集め、PRCまたはパーシャルPCとして実用化が図られている。その特徴はひびわれ幅およびたわみをプレストレスによって制御する点にあり、最近数多くの研究が行われている。

本文は、曲げを受けるRC部材およびPRC（パーシャルPC）部材のひびわれ幅およびたわみの実用算定法に関する研究の現状と今後の課題について述べたものである。

2. RC部材のひびわれ幅

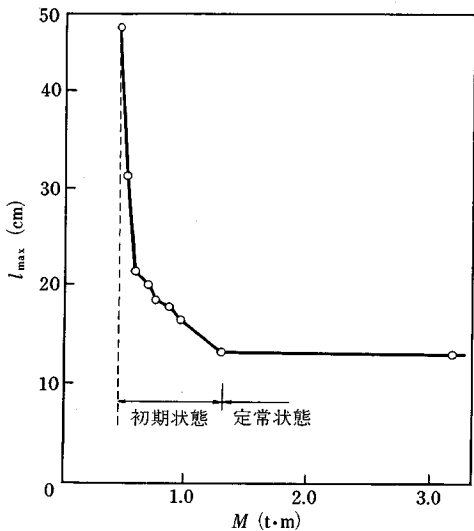
(1) ひびわれ幅算定式の概要

RC部材に曲げモーメント M が作用するとき、 M がある値 M_{cr} に達すれば曲げひびわれが生ずる。その後さらに M を増加させていけば次々にひびわれが生じ、ひびわれ間隔が減じていくが、図-1にみられるように、 M がある程度以上大きくなれば新たなひびわれは生じなくなり、ひびわれ間隔は定常状態を示す。したがって、ひびわれ幅の問題を取り扱う場合、初期状態と定常状態とを区別すべきところであるが、初期状態におけるひびわれ幅は一般に小さく、部材の設計上問題になることがほとんどないため、実際には定常状態のひびわれ幅の算定を中心に研究が行われており、必要ならばそれを初期状態にも準用する方法が用いられている。

曲げを受けるRC部材のひびわれ幅 w の算定に関す

* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科
(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

Keywords: cracking, deflection



図一 曲げモーメントと最大ひびわれ間隔の関係

る研究は数多く行われ、これまでにさまざまな算定式が提案されているが、その中から以下に3つの例を示す。

土木学会コンクリート標準示方書¹⁾

$$w = k_1 (4c + 0.7e) \left(\frac{\sigma_s}{E_s} + \epsilon'_{cs} \right) \dots\dots\dots (1)$$

ここに k_1 は鋼材の付着性状の影響を考慮するための係数で、異形鉄筋では1.0、普通丸鋼では1.3とする。 c および e は鉄筋棒鋼のかぶりおよびあき、 σ_s は鉄筋応力(理論Ⅱ)、 E_s は鉄筋のヤング係数、 ϵ'_{cs} はコンクリートの乾燥収縮やクリープの影響を考慮するためのひずみで、一般に 150×10^{-6} としてよい。

ACI 318-83²⁾

$$w = 76 \beta \sigma_s \sqrt[3]{c_0 A_e} \times 10^{-6} \dots\dots\dots (2)$$

ここに c_0 は鉄筋棒鋼の中心までのかぶり、 A_e は有効コンクリート断面積で、鉄筋の重心とその重心が一致するようにとった引張部のコンクリートの断面積を棒鋼の数で除した値、 β は中立軸(理論Ⅱ)から引張縁までの距離と鉄筋中心までの距離の比を表す。なお、 σ_s は ksi 単位を用いる。

CEB・FIP モデルコード³⁾

$$w = 1.7 l \epsilon_{sm} \dots\dots\dots (3)$$

$$l = 2(c + 0.1 e_0) + k_2 k_3 \frac{\phi}{p_e} \dots\dots\dots (4)$$

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{scr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] < 0.4 \frac{\sigma_s}{E_s} \dots\dots\dots (5)$$

ここに l はひびわれ間隔、 ϵ_{sm} は鉄筋の平均ひずみ、 e_0 は棒鋼の中心間隔、 ϕ は鉄筋径、 $p_e = A_s / A_{ce}$ は有効鉄筋比、 A_s は鉄筋の断面積、 A_{ce} は有効コンクリート断面積で、各棒鋼の中心から距離 7.5ϕ 以内のコンクリートの断面積、 k_2 は鉄筋の付着性状の影響を考慮するた

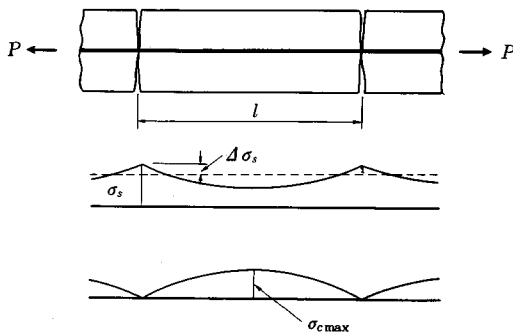
めの係数で、異形鉄筋では0.4、普通丸鋼では0.8、 k_3 は曲げと軸力の組合せによる応力状態の相違を考慮するための係数で、曲げのみの場合は0.125をとる。 $\beta_1 = 1/2.5 k_2$ 、 β_2 は荷重の性質を考慮するための係数で、1回目の载荷に対して1.0、持続荷重および多数回の繰返し荷重に対して0.5をとる。

ひびわれ幅は、鉄筋のひずみにコンクリートが追従できないためのひずみ差がひびわれ位置に集中して現われるものであるので、一般的にひびわれ間隔に相当する項と、ひずみに関する項との積の形で表わすことができる。なお、上述のACI式は外見上そのような形になっていないが、実際上はひびわれ間隔 $76 \beta \sqrt[3]{c_0 A_e} \times 10^{-6} \times E_s$ と、ひずみ σ_s / E_s の積とみなすことができる。

したがって、ひびわれ幅の研究における要点は、まずひびわれ間隔の定式化の問題になるが、ひびわれ間隔を支配する因子については過去に多くの議論が行われている。しかし最近では、上述の3本の式にみられるように、ひびわれ間隔に影響する第1の因子はかぶりであると考えられるようになった。しかし、第2、第3の因子については現在なお種々の意見が混在しているのが実状である。それは、ひびわれ間隔の定まる現象が非常に複雑であり、かつ実験データのばらつきが大きいことも原因ではあるが、理論的検討が不足していることもその要因に挙げることができよう。そこで次に、ひびわれ間隔の理論について考察してみよう。

(2) ひびわれ間隔の理論

曲げを受けるRC部材の最初のひびわれはコンクリートの曲げ応力によって生ずるが、ひびわれ間隔がある程度以上狭くなれば、引張部のコンクリートの応力は、曲げ変形の影響よりもひびわれ間の鉄筋との付着作用に支配されると考えられる。そのときの引張部の応力性状は、RC引張部材の性状と類似するので、従来ひびわれ幅を理論的に検討するときは、引張部材にモデル化する方法が多く用いられている。



図二 RC引張部材のモデル

いま、図—2に示すように、RC引張部材が引張力 P を受け、ひびわれ間隔が l になった状態を考える。そこで、ひびわれ間の平均付着応力を τ 、ひびわれ間の中央断面のコンクリートの平均引張応力を σ_c とおくと、力のつり合い条件より次式が成り立つ。

$$\sigma_c = \frac{u\tau l}{2A_c} \dots\dots\dots (6)$$

ここに A_c はコンクリート断面積、 $u = \pi\phi$ は鉄筋の周長を表わす。上式より次のようなひびわれ性状を説明することができる。

- 1) コンクリートの応力はコンクリートの引張強度 f_{ct} を越えることができないので、 σ_c には上限値が存在する。したがって P の増加によって τ が増加すれば、 σ_c が増加し、新たなひびわれが生じ、 l が減少する。これはひびわれの初期状態に相当する。
- 2) 付着応力は付着強度 f_b を越えることができないので、 τ には上限値が存在する。したがって τ が上限値に達した後は σ_c の増加が起こらないので、新たなひびわれが生じなくなる。これはひびわれの定常状態に相当する。

上記の考え方が正しいとすれば、定常状態におけるひびわれ間隔は次式の形で表わすことができる。

$$l = k_4 \frac{A_c f_{ct}}{u f_b} \dots\dots\dots (7)$$

そこで、付着強度 f_b がコンクリート引張強度 f_{ct} に比例すると仮定すれば、

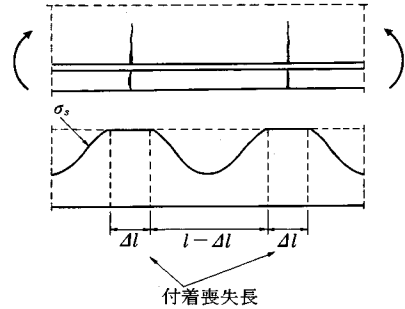
$$l = k_5 \frac{A_c}{u} \quad \text{または} \quad l = k_6 \frac{\phi}{p} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $p = A_s/A_c$ は鉄筋比を表わす。この式が Saliger⁴⁾ や Watstein ら⁵⁾ によって導かれたひびわれ間隔の理論式である。上式はまた、 A_c のとり方を工夫すれば、曲げひびわれにも適用することができる。

ところが、RC部材の実験、特に異形鉄筋を用いた実験からは、コンクリート強度がひびわれ間隔やひびわれ幅にほとんど影響しない点では上式を裏づける結果が得られているが、ひびわれ間隔やひびわれ幅が A_c/u や ϕ/p に比例するほどの強い影響は示されず、むしろかぶりが大きな影響をもつことが見出された。そのため

- 1) 式(8)の一部を修正した実験式を求める⁶⁾⁻⁸⁾
- 2) 式(8)に関係なく、実験式を求める⁹⁾⁻¹³⁾
- 3) 上述の理論を修正する^{14), 15)}
- 4) 新たな理論を考案する^{16), 17)}

などの研究が行われている。著者¹⁴⁾の研究は3)に属するもので、異形鉄筋の付着強度 f_b がコンクリートの引張強度 f_{ct} に影響されるだけでなく、かぶり c 、鉄筋径 ϕ および有効コンクリート断面積 A_e にも関係することから、式(8)を次のように一般化した。



図—3 付着喪失長¹⁵⁾

$$l = k_7 A_e^{1-\alpha} c^\beta \phi^\gamma \dots\dots\dots (9)$$

ここに α, β および γ は実験より定まる係数である。また、Leonhardt¹⁵⁾ は図—3に示すようにひびわれ近傍の鉄筋に付着喪失長 Δl を導入した。このとき式(7)は

$$l - \Delta l = k_4' \frac{A_c f_{ct}}{u f_b} \dots\dots\dots (9)'$$

となり、もしも Δl がかぶりやあきの関数であると仮定すれば、CEB・FIP 式のような形の式が得られる。

一方、4)に属する新理論としては、ひびわれ間のコンクリートの応力分布特性を簡単な二次元モデルにより求め、コンクリート表面に引張応力が生じない限界のひびわれ間隔として、定常状態のひびわれ間隔を定めた Broms 理論¹⁶⁾、三次元応力分布に基づく池田の理論¹⁷⁾ などがある。

以上の修正理論や新理論は、それらを単独で考えるときは説得力になお不足するところがあるようにも思えるが、いずれも実際のひびわれ性状の特徴の一端をとらえているように思われる。

たとえば、新たなひびわれの発生や伸縮がかぶりコンクリートの応力分布特性に影響を受けることは、乾燥収縮や温度変化に対する拘束応力によるひびわれで経験していることである。また、異形鉄筋の付着強度を定式化する試みが最近いくつか行われている¹⁸⁾⁻²⁰⁾、付着強度がコンクリート引張強度のほか、かぶり/鉄筋径や定着長/鉄筋径などに影響されることが明らかにされている。ひびわれ間の付着作用が定着付着作用と同等とは考えにくいことではあるが、多くの因子の影響を受けるといふ点では共通しているように思われる。

これまで、RC部材のひびわれ幅の算定式としてさまざまな提案が行われているが、その大多数はひびわれ間隔やひびわれ幅に関する実験データのみに基づいている。しかし、多くの研究者を納得させる理論を確立するには、かぶりコンクリートの応力特性やひびわれ間付着作用など、より多くの基礎的研究が必要であるように思われる。

(3) 鉄筋の平均ひずみ

ひびわれ間隔と並び、ひびわれ幅を決定するもう1つの要因は、鉄筋とコンクリートの間のひずみ差である。その際、コンクリートの表面におけるひびわれ幅に関する限り、コンクリートの弾性ひずみは微小で無視できるので¹⁴⁾、ひびわれ幅の定式化において重要なのは、理論Ⅱによる鉄筋応力と実際の平均応力の差 $\Delta\sigma_s$ (前述の図一2参照) と、コンクリートの乾燥収縮やクリープの影響である。

まず $\Delta\sigma_s$ については、ひびわれ初期状態ではひびわれの進展状況と、定常状態ではひびわれ間の付着性状と関係している。その値は実験により鉄筋の平均ひずみを測定すれば得られるが、その特徴の1つとして図一4および図一5にみられるように、持続荷重や繰返し荷重が作用するとき、時間とともに $\Delta\sigma_s$ の値が減少する性質をもっている。前述の3本のひびわれ幅算定式の中ではCEB・FIP式のみがこのような性質を係数 β_2 によって考慮している。そこでは持続荷重および繰返し荷重に対する $\Delta\sigma_s$ は、1回目の載荷に対する値の1/2とされている。しかし図一5は、大きな変動荷重を受ける部材では、永久荷重(図中の繰返し下限荷重)における $\Delta\sigma_s$ は負の値になり得ることを示しており、CEB・FIP式は、

適用する荷重レベルによっては必ずしも安全側ではないことを示している。一般にひびわれ幅に関するデータを評価する際に $\Delta\sigma_s$ を無視すれば、ひびわれ間隔を過小評価するおそれがあるが、土木学会式やACI式のように、設計段階では $\Delta\sigma_s$ を無視することは現実的方法であると思われる。

コンクリートの乾燥収縮がひびわれ幅の増大をもたらすことは周知の事実であるが、従来海外の設計基準では一般にその影響が考慮されていなかったのに対し、土木学会式では ϵ'_{cs} の項によりそれを考慮した点で大きな特徴がある。コンクリートの乾燥収縮やクリープは鉄筋とコンクリートとの間のひずみ差を生じさせるとともに、ひびわれ間隔にも影響を与えるが、前者の影響はひびわれ幅算定式中のひずみ項に ϵ'_{cs} に相当する項を導入することによりほぼ合理的に評価することができることは著者の研究により明らかにされていたが¹⁴⁾、設計に用いるべき ϵ'_{cs} の値については従来不明確であった。前述の土木学会式は実構造物におけるひびわれ幅の観測値をほぼ安全側に包含するよう ϵ'_{cs} の値が定められている。したがって、コンクリートの乾燥収縮やクリープによるひずみを直接測定した結果に基づいているのではない。

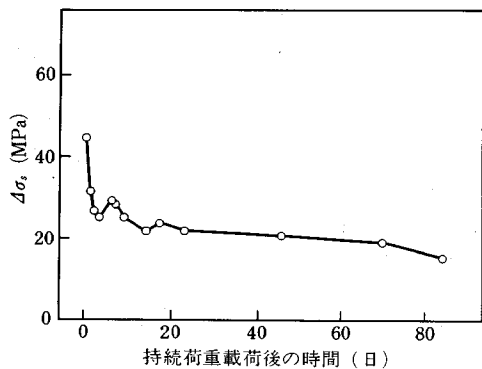
最近、谷内田ら²²⁾は多数の実橋におけるひびわれ幅と鉄筋腐食に関する貴重な調査結果を公表しているが、死荷重時の鉄筋のひずみから計算されるひびわれ幅は実測値の約30%に過ぎず、コンクリートの乾燥収縮などの影響がかなり大きかったと推定している。また、石橋ら²³⁾はPRC桁橋の鉄筋応力の測定結果より、コンクリートの乾燥収縮およびクリープ係数の値を推定し、それぞれ 800×10^{-6} および3.0を得ている。一般に構造物の設計に用いられているコンクリートの乾燥収縮の値は、部材としての値であるが、ひびわれ幅に影響するのは乾燥しやすい部材表面付近の乾燥収縮である。最近ではコンクリートの乾燥収縮のひびわれ性状への影響についての研究も行われるようになったが²⁴⁾、今後さらに調査、研究が積み重ねられることを期待したい。

(4) コンクリート標準示方書によるひびわれ幅制限設計

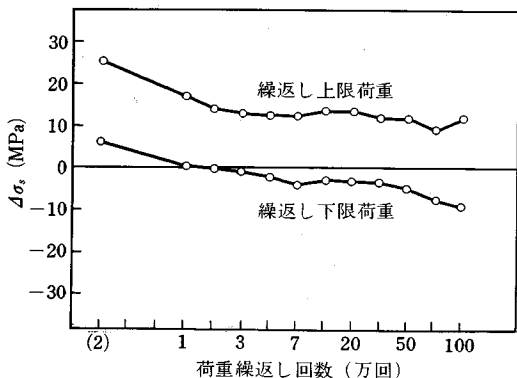
土木学会コンクリート標準示方書によるひびわれ幅の算定式は、著者の提案式¹⁴⁾を参考として独自に作られたものであるが、許容ひびわれ幅 w_a に対する規定もまた独自のものとなっている。そこでは w_a を環境条件のみでなく、鉄筋に対するかぶり c の関数としており、次のようである。

$$w_a = k_n c \dots\dots\dots (10)$$

ここに k_n は、RC部材の場合、一般の環境に対して0.005、腐食性環境に対して0.004、特に厳しい腐食性環境に対して0.0035となっている。



図一4 持続荷重による $\Delta\sigma_s$ の変化



図一5 繰返し荷重による $\Delta\sigma_s$ の変化

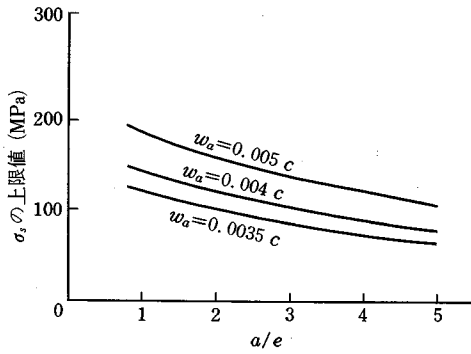


図-6 σ_s の上限値

このとき、 $w \leq w_a$ の条件より次の関係が得られる。

$$\sigma_s \leq E_s \left(\frac{k_2}{k_1} \frac{1}{4 + 0.7 e/c} - \epsilon'_{cs} \right) \dots \dots \dots (11)$$

上式の右辺の値は図-6に示すようであり、環境条件および鉄筋のあきとかぶりの比 e/c に応じて、使用状態における鉄筋応力の上限値が定められたことになる。かぶりを小さくすればひびわれ幅は小さくなるが、鉄筋の腐食の観点からは逆効果になるおそれがあり、上式のように鉄筋のあきを制御因子とすることは、合理的な考え方であると考えられる。

3. PRC 部材のひびわれ幅

PRC は 1960 年代の前半に横道英雄博士によって提案された従来の RC と PC との中間領域に属する構造体であり²⁵⁾、1965 年には中央径間 48 m、全長 80 m の PRC π 型ラーメン橋が架設された²⁶⁾。一方、海外では 1970 年の CEB・FIP の国際指針²⁷⁾に使用状態におけるひびわれの発生を許す III 種 PC の規定が設けられ、わが国でも 1978 年の PC 示方書²⁸⁾に導入された。現在は III 種 PC の呼称は廃止されて PC の一種として取り扱われており^{1), 3)}、一般には PRC またはパーシャル PC とよばれている。

わが国における PRC は、一般にひびわれ間隔の制御を付着性状の良好な異形鉄筋の適切な配置によって行うことを基本的な考え方としている。したがって RC 部材に対するひびわれ幅の算定式を PRC 部材に適用することが可能であり、実験によってもその妥当性が確かめられている^{29), 30)}。ただし、PRC 部材では PC 鋼材とコンクリートとの間には初めからひずみ差が生じているが、ひびわれ幅に関係するのは両者のひずみ差であるので、ひびわれ幅の算定式中で用いる鋼材応力（たとえば式(1)中の σ_s に相当）は、同じ位置のコンクリートの応力が 0 となるときからの応力増加量が用いられる。

それに対して、ひびわれの発生を許さない従来の PC 部材の設計法を拡張し、ひびわれ発生後についても理論

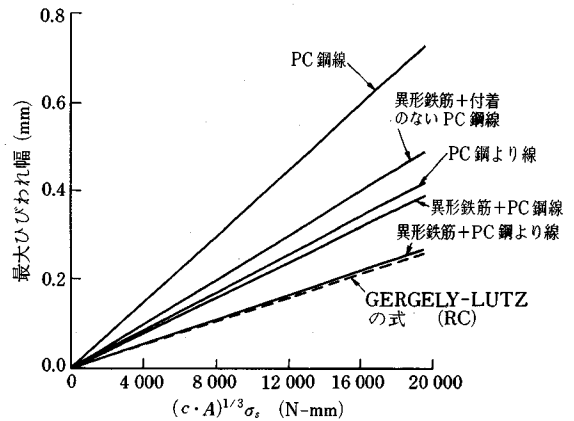


図-7 鋼材の種類によるひびわれ幅の差異³⁴⁾

I によるコンクリートの引張応力を計算し、その値を所定の値以下とすることにより間接的にひびわれ幅の制御を行う近似設計法も提案されている^{31), 32)}。このような近似法は RC 部材においても初期の研究にみられたもので³³⁾、ひびわれ幅の制御法としては粗雑な感を免れないが、プレストレスレベルの高い（ひびわれの発生を許さない PC に近い）部材に限定すれば、有用性があると考えられる。

ところで、わが国では前述のようにひびわれ間隔の制御を異形鉄筋のひびわれ分散効果により行う考え方が一般的であるが、海外では PC 鋼材のひびわれ分散効果に依存する場合の研究も行われている。Suri ら³⁴⁾はそのような場合の実験データを集め、RC 部材に対する ACI 式 (Gergely と Lutz の式¹¹⁾) のひびわれ幅制御因子 $(c_0 A_e)^{1/3} \sigma_s$ との関係調べている。図-7はその結果を示したものであるが、ひびわれ幅は使用する鋼材の種類によって大きく異なり、PC 鋼より線または異形鉄筋と PC 鋼線併用の場合では RC 部材の約 1.6 倍、PC 鋼線のみの場合には約 2.8 倍になることが示されている。このように PC 鋼材によるひびわれ分散効果が悪いのは、その付着性状に起因することは明らかであろう。

そのため、RC 部材に対するひびわれ幅算定式とは別な形のひびわれ幅算定式もいくつか提案されているが、たとえば Nawy の式³⁵⁾では、RC 部材に対しては過去のものとなった前述の式(8)の形が用いられている。このことは、異形鉄筋と PC 鋼材とではその付着強度に影響する因子の種類からすでに相違があることを示唆するものであろう。ここでも、鋼材の付着性状にさかのぼる基礎的な研究の必要性が示されていると考えることができる。

いずれにせよ、コンクリート標準示方書による PRC 部材の設計は、異形鉄筋によるひびわれ分散効果を前提にしていることは銘記すべきであろう。

4. RC 部材の曲げモーメント-曲率関係

図-8は純曲げを受けるRC部材の曲げモーメント M とたわみ y の関係を短期載荷試験より求めた例を示したものであるが、 M がひびわれ発生曲げモーメント M_{cr} よりも低い範囲では、実測たわみは理論Ⅰの計算値によく一致している。しかし M が M_{cr} を越えれば実測たわみは理論Ⅰによる計算値より大きくなり、 M の増加に伴って理論Ⅱの計算値に近づく傾向を示している。

理論Ⅱがひびわれの存在を前提とした理論でありながら、実際のたわみはひびわれ発生後も理論Ⅱの計算値に一致しないのは、前述のように引張部のコンクリートが鉄筋との付着作用などにより、なお引張応力を受け持つからである。したがって、ひびわれの生じた後の部材のたわみを算定しようとするれば、引張部のコンクリートの寄与を何らかの方法で考慮に入れる必要がある。そのための方法としてこれまで提案されている主な種類とその例を挙げれば次のようである。

A. 曲げモーメント-曲率関係の定式化

Beeby³⁶⁾ は曲げモーメント-曲率 ($M-\phi$) 関係を、 M_{cr} の点を境に勾配が変わる2本の直線に近似している。この種の方法は最も単純であるが、軸力が作用する場合などへの一般化が難しい。

B. 有効断面二次モーメント

Yu³⁷⁾ や Branson³⁸⁾ は、 $M-\phi$ 曲線に対する割線剛性を与えるための有効断面二次モーメント I_e の定式化を行っている。Bransonの提案式はACI 318²⁾ やわが国のコンクリート標準示方書¹⁾ に採用されているもので、基本式は次のようである。

$$I_e = I_1 \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^m + I_2 \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^m \right] \leq I_1 \dots\dots\dots (12)$$

ここに I_1 および I_2 はそれぞれ理論Ⅰおよび理論Ⅱによ

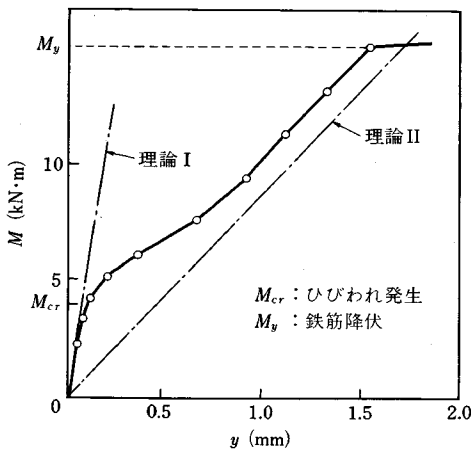


図-8 曲げモーメントとたわみの関係

る断面二次モーメントを表わす。また、係数 m は曲率の計算では4の値を用いる。

C. 鉄筋の平均ひずみの定式化

Rao³⁹⁾ および Rostasy⁴⁰⁾ は、引張部のコンクリートの寄与により鉄筋の平均ひずみ ϵ_{sm} が理論Ⅱによる計算値 σ_s/E_s を下回ることから、 ϵ_{sm} と σ_s/E_s の関係を定式化した。前述のCEB・FIPによる式(5)はこれらの研究に基づくものである。ただしたわみの計算においては式(5)中の不等号以下の部分は削除し、次式を用いる。

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{scr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (13)$$

D. 有効鉄筋断面積

鉄筋の断面積を仮想上割増して理論Ⅱを適用すれば、理論Ⅱよりも剛性が高く計算される。DIN 1045⁴¹⁾ にみられる。

E. 引張部のコンクリート応力のモデル化

Grelat⁴²⁾ は、RC部材にひびわれが生じた後も引張部のコンクリートの応力分布を三角形に仮定し、その最大応力が M の増加とともに減少していくようなモデル化を行っている。

F. 付着作用のモデル化

鉄筋の付着応力-すべり関係を定式化し、部材引張部に適用すれば、引張部のコンクリートの寄与を解析的に知ることができる。六車⁴³⁾、佐藤・青柳⁴⁴⁾、上田⁴⁵⁾の研究などがある。

以上の各方法のうち、Fは部材引張部の平均的な変形性状のみでなく、ひびわれ間の鉄筋の引張応力や付着応力の分布を計算することができるなど、大きな特徴があるが、それだけ取扱いは複雑となり、実用設計法の観点からは不利である。しかし今後の発展性に富む分野である。

一方、A~Eの主な方法については過去に著者らが比較研究を行っているが⁴⁶⁾、個々の提案モデルの中には実験結果との適合性が悪いものもあったが、モデルの修正により改善することが可能であり、結局いずれの方法を用いても引張部コンクリートの寄与を適切に評価することができることが示された。

ところで Branson の方法は取扱いが最も簡単であり、かつひびわれの発生の前後での連続性が保たれているのに対し、CEB・FIPの方法では、ひびわれ発生後の変形がひびわれ発生前の変形に無関係に定められるため、場合によっては不連続な関係が生ずる欠点があった。しかし最近刊行されたCEBマニュアル⁴⁷⁾では、この点を改善し、次式を採用している。

$$\epsilon_{sm} = \frac{\sigma_{s1}}{E_s} (1 - \zeta') + \frac{\sigma_s}{E_s} \zeta' \dots\dots\dots (14)$$

$$\zeta' = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{scr}}{\sigma_s} \right)^m \dots\dots\dots (15)$$

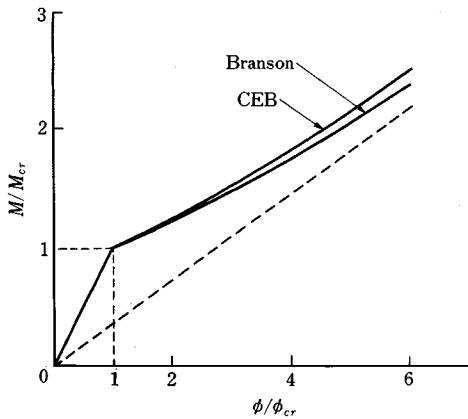


図-9 BransonとCEBのM-φ曲線の比較

ここに σ_{s1} および σ_s は、理論Ⅰおよび理論Ⅱによる鉄筋応力を表わし、 m' は、曲率計算では2を用いる。

また、上式を曲率 ϕ の関係に拡大適用し

$$\phi = \phi_1(1-\zeta) + \phi_2\zeta \dots\dots\dots(16)$$

ここに ϕ_1 および ϕ_2 は理論Ⅰおよび理論Ⅱによる曲率を表わす。

一方、Branson式において

$$\zeta = 1 - \left(\frac{M_{cr}}{M}\right)^m \dots\dots\dots(17)$$

とおけば

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi_1}(1-\zeta) + \frac{1}{\phi_2}\zeta \dots\dots\dots(18)$$

となり、Bransonの方法と改良されたCEBマニュアルの方法では、理論Ⅰから理論Ⅱへの過渡状態を表現するときに、曲率で按分するか、それとも曲率半径で按分するかの相違しかないことになる。いま、 $\beta_1\beta_2=1$ とおくときの両者によるM-φ関係を比較した例を図-9に示すが、実用上ほとんど差はないといえるであろう。

5. 短期たわみの近似計算

構造物の荷重による曲げモーメントを M 、たわみを y 、曲げ剛性を EI とおくと、 y は次式より計算することができる。

$$y = \int \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \int \phi\bar{M} dx \dots\dots\dots(19)$$

ここに \bar{M} は、静定基本系において y の算定位置に単位荷重を作用させたときの曲げモーメント、 x は部材軸に沿う座標を表わす。

RC部材の場合、ひびわれ発生前は EI がほぼ一定とみなせる場合でも、ひびわれ発生後は断面二次モーメント I の値が変化するため、一般には数値積分によらなければ y が求まらないが、Branson³⁸⁾ は1つの近似法として一定の有効断面二次モーメント I_e を用いて次式よ

り単純ばりのたわみを計算する方法を提案している。

$$y = \frac{1}{E_c I_e} \int M\bar{M} dx \dots\dots\dots(20)$$

ここに E_c はコンクリートのヤング係数、また I_e は

$$I_e = I_1 \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^m + I_2 \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^m\right] \dots\dots\dots(21)$$

ここに M_a は部材の最大曲げモーメント、また、この近似法では $m=3$ を用いる。

この方法は面倒な数値積分を避けることができるので、実用上非常に便利なものであるが、 $m=3$ という数値は必ずしも一般性をもつものでない点に注意が必要である。図-10は、一定断面の単純ばりが集中荷重、等分布荷重またはそれらの組合せを受ける種々の場合について、式(12)の有効断面二次モーメントを用いて数値積分により計算した最大たわみが、式(20)、(21)より直接計算した値と等しくなるための式(21)の m の値を求めた結果を示すものである。これによれば、 m の値は曲げモーメント図の面積比 ζ にほぼ関係づけることができ、Bransonの提案値 $m=3$ は等分布荷重の場合 ($\zeta=2/3$) に対応しており、集中荷重の場合 ($\zeta=1/2$) には $m=2$ 、純曲げ ($\zeta=1$) に近い場合は当然ながら $m=4$ とするのがよいことがわかる。

一方、連続ばりの場合には、両端連続のほうでは両側の支点到に各15%、支間中央点に70%、一端ヒンジ、他端連続のほうでは連続支点到で15%、支間中央点に85%のそれぞれ重みをつけて有効断面二次モーメントを平均化する方法を提案しており、ACI 318³²⁾ に採用されている。

以上の近似法に対応するものとして、CEB マニユア

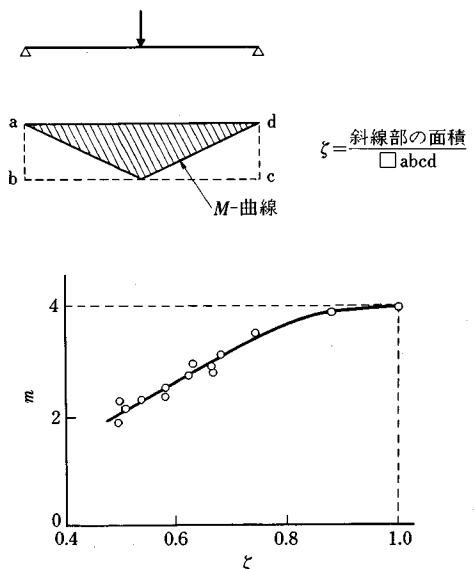


図-10 Bransonの近似法におけるm値の検証

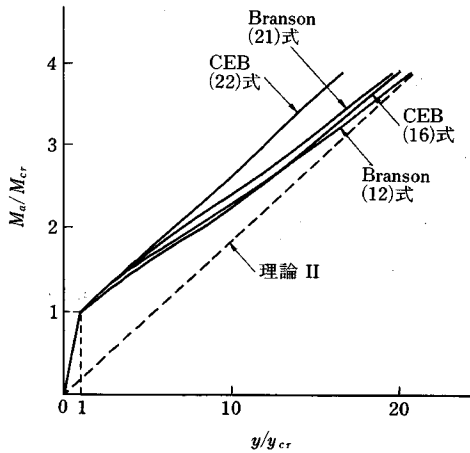


図-11 Branson と CEB の厳密法と近似法の比較

ル⁴⁷⁾でも類似した次の近似法を採用している。

$$y = y_1(1 - \zeta') + y_2 \zeta' \dots\dots\dots(22)$$

ここに y_1 および y_2 は I_1 および I_2 を用いるときのたわみの計算値であり、また ζ' は次式で与えられる。

$$\zeta' = 1 - \beta_1 \beta_2 \frac{M_{cr}}{M_a} \dots\dots\dots(23)$$

図-11 は、一定断面の単純ばりが等分布荷重を受けるときの中央点のたわみを、式 (12) および式 (16) を用いて数値積分より計算した値と、式 (21) および式 (22) を用いて計算した近似値とを比較したものである。この計算例にみられるように、CEB の近似法は他の3つの計算法に比べ、多少はずれる値を与える傾向にあるようである。

6. 軸力を伴う部材の曲げモーメント-曲率関係

曲げモーメントのみを受ける RC 部材の曲率は、Branson の有効断面二次モーメントを用いることにより容易に計算することができる。しかし、曲げモーメントと同時に軸力も作用する場合には、いくつかの工夫が必要である。いま、その状況を図-12 に示す単鉄筋長方形断面を例に挙げ、説明しよう。軸力が伴う場合は曲げモーメントのみの場合と異なり、断面の重心軸の位置 c と中立軸の位置 x とが一致しない点に特徴があるが、まず、理論 I を用いるときの中立軸位置および断面二次モーメントは、周知のように次式より求められる。

$$c_1 = \frac{\frac{1}{2}bh^2 + (n-1)A_s d}{bh + (n-1)A_s}$$

$$I_1 = \frac{1}{3}b\{c_1^3 + (h-c_1)^3\} + (n-1)A_s(d-c_1)^2 \dots\dots\dots(24)$$

ここに $n = E_s/E_c$ は鉄筋とコンクリートのヤング係数の比を表わす。

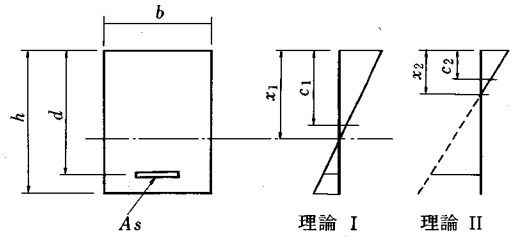


図-12 断面諸元

一方、理論 II を用いるときは、中立軸位置は周知のように

$$x_2^3 + 3e'x_2^2 + \frac{6nA_s(d+e')}{b}x_2 - \frac{6nA_s d(d+e')}{b} = 0 \dots\dots\dots(25)$$

なる三次式の解として求められ、重心軸の位置および断面二次モーメントは、次式より計算することができる。

$$c_2 = \frac{\frac{1}{2}bx_2^2 + nA_s d}{bx_2 + nA_s}$$

$$I_2 = \frac{1}{3}b\{c_2^3 + (x_2 - c_2)^3\} + nA_s(d - c_2)^2 \dots\dots\dots(26)$$

このように式 (1) 中の I_1 および I_2 は、上式のように求められるが、理論 I から理論 II への過渡状態は部材の引張部の性質によるのに対し、 M_{cr}/M は軸力を伴う場合、必ずしも引張部の応力状態を代表するものとはいえない。したがって Branson の有効断面二次モーメントにおいても CEB・FIP の方法にならって σ_{scr}/σ_s を用いて過渡状態を表わす方が一般性があるといえる。

$$I_e = I_1 \left(\frac{\sigma_{scr}}{\sigma_s} \right)^m + I_2 \left\{ 1 - \left(\frac{\sigma_{scr}}{\sigma_s} \right)^m \right\} \leq I_1 \dots\dots\dots(27)$$

σ_s および σ_{scr} は軸力の有無に関係なく理論 II により計算することができ、また、軸力がない場合には $\sigma_{scr}/\sigma_s = M_{cr}/M$ が成り立つので、式 (1) と等価である。

ところで、上式の I_e を用いて曲率を計算する際に用いる曲げモーメントは、断面の重心軸まわりの値でなければならない。しかし、理論 I および理論 II における重心軸の位置は定まっているが、過渡状態にある有効断面の重心位置 c_e は、Branson の方法では未知量である。そこで新たに c_e の算定法を見出す必要がある。そのため、次のような方法が用いられた⁴⁸⁾。まず、前述の方法 C および E を用いるときは c_e の値が計算できることに着目し、それぞれ次のように c_e の性質を調べた。

- 1) 方法 C による場合：いま式 (2) の関係を $\epsilon_{sm} = \sigma_s/E_{se}$ とおくと、理論 II における鉄筋のヤング係数として E_{se} を用い、 $n_s = E_{se}/E_c$ の値を種々に変化させて c_e と I_e を計算する。
- 2) 方法 E による場合：図-13 に示すように引張部

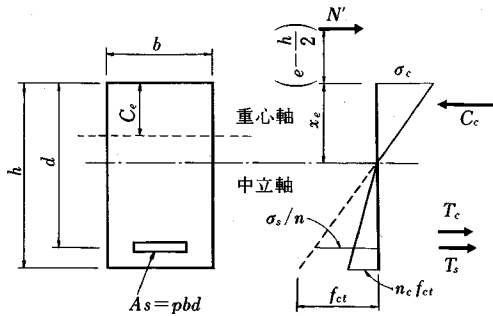


図-13 応力分布の仮定

のコンクリートの応力分布を仮定し、縁応力のコンクリート引張強度 f_{ct} に対する比 n_c の値を種々に変化させて c_e と I_e を計算する。

ただし、ここでは実験結果に合わせて $m=3$ を用いた。以上の方法で計算した結果が図-14 であり、横軸は $\beta_e = I_e/bd^3$ 、縦軸は $\alpha_e = c_e/d$ を表す。また、 α_1 および β_1 は理論 I、 α_2 および β_2 は理論 II に対する値を意味する。この図より、 I_e が I_1 から I_2 へ向かって移行するのとはほぼ同じ比率で α_e が α_1 から α_2 へ移行することがわかる。したがって、 c_e についても式 (27) と同様な形で

$$c_e = c_1 \left(\frac{\sigma_{scr}}{\sigma_s} \right)^{\bar{m}} + c_2 \left\{ 1 - \left(\frac{\sigma_{scr}}{\sigma_s} \right)^{\bar{m}} \right\} \dots \dots \dots (28)$$

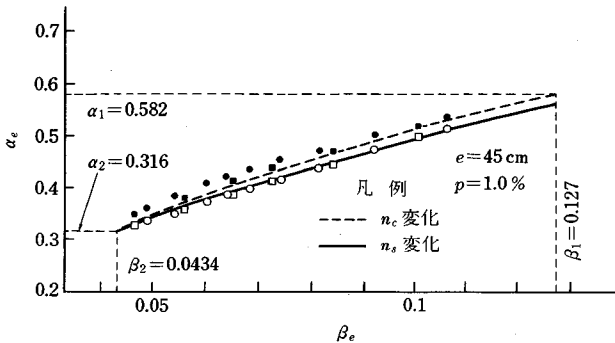


図-14 有効断面二次モーメントと重心位置の関係

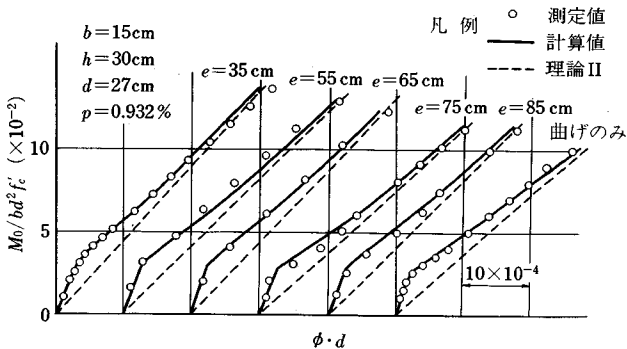


図-15 偏心軸力に対する $M-\phi$ 曲線の比較

によって表わすことができる。ここに、 \bar{m} は、 m よりはいく分小さい値に対応しているが、実用上は $\bar{m}=m$ とおくことができることがわかった。

図-15 は、RC 部材に偏心軸力を載荷したときの実験結果と、上記の方法による計算値とを比較した例を示すもので、両者のよい一致がみられる。

7. PRC 部材の短期たわみ

PRC 部材においても軸力が作用する RC 部材と同様な方法で理論 I および理論 II による断面諸定数の計算を行うことができるので、それぞれによる曲率 ϕ_1 および ϕ_2 を求めることができる。したがって過渡状態に対する曲率 ϕ は、Branson の方法によるときは式 (18) (ただし σ_{scr} の計算式中の M_{cr}/M は σ_{scr}/σ_s に置き換える)、CEB の方法によるときは式 (16) により、計算することができる。ただし、いずれの場合も σ_s および σ_{scr} は、ひびわれ幅の算定におけると同様に、鋼材と同じ位置のコンクリートの応力が 0 となるときからの応力増加量を用いる。

Branson ら⁴⁹⁾ は上記の方法に代わる簡易計算法として、次の方法を提案した。いま、部材の最大曲げモーメントの位置の永久荷重および変動荷重による曲げモーメントを M_p および M_r 、ひびわれ発生曲げモーメントを M_{cr} とおくと

- 1) 永久荷重によるたわみは理論 I より計算する。
- 2) 変動荷重によるたわみは、PC 鋼材も鉄筋の一種であるとみなす仮想 RC 断面が曲げモーメント M_r を受けるものとして計算する。その際に用いる有効断面二次モーメントは次式より求める。

$$I_e = I_1 \left(\frac{M_{cr} - M_p}{M_r} \right)^m + I_2 \left\{ 1 - \left(\frac{M_{cr} - M_p}{M_r} \right)^m \right\} \dots \dots \dots (29)$$

それに対して Bennett⁵⁰⁾ および Tadros⁵¹⁾ は、仮想 RC 断面の始点を永久荷重時ではなく、decompression 時 (M_d) とすることを提案している。Branson ら^{52), 53)} はその後、部材としてのたわみが 0 になるときを仮想 RC 断面の始点とする方法を提案している。

以上の近似法は、図-16 に示すように PRC 断面の理論 II の $M-\phi$ 曲線が、正確には曲線状であるが、ある程度以上 M が大きくなればほとんど直線になり、かつその直線の勾配が仮想 RC 断面としての曲げ剛性に一致するという性質に着目したものである。なお、上記の漸近直線と理論 I の直線との交点 (図中の $M_0-\phi_0$ の

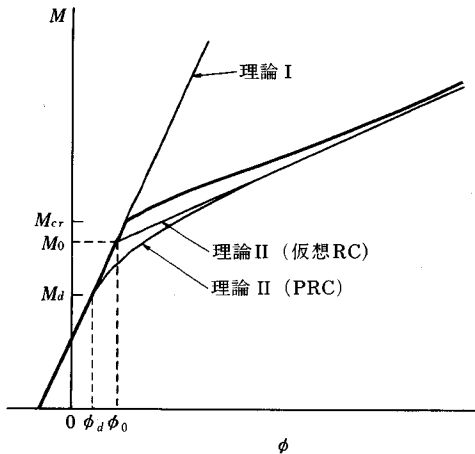


図-16 PRC 部材の M-φ 関係

点)を仮想 RC 断面の始点とすれば⁽⁷⁾最も近似性がよいが、計算はいく分面倒になる。そのことから、わが国では decompression 時の曲げモーメント M_d を越える曲げモーメントに対して仮想 RC 断面とする方法の使用を認めている^{1), 54)}。

8. 長期たわみ

コンクリート部材は、短期たわみのほかに、かなり大きな長期たわみが付加される。その原因としては

- 1) コンクリートのクリープ——この場合、鋼材は自由な変形を拘束し、たわみの増加を低減する働きをする。
- 2) コンクリートの乾燥収縮——鋼材の重心とコンクリートの重心が一致しない場合は、鋼材の拘束により曲率が生ずる。
- 3) ひびわれが生じている部材では、時間とともにひびわれが発展したり、ひびわれ間の鉄筋とコンクリートとの間の付着応力の緩和 (2. (3) に述べた $\Delta\sigma_s$ の減少) により、曲率が増加する。

いま、部材が永久荷重を受けたときの短期変形による曲率を ϕ_e 、クリープ終了後の全曲率を ϕ_1 とおけば、コンクリートのクリープ係数 ψ 、乾燥収縮ひずみ ϵ'_{cs} との関係は、一般的に書いて

$$\phi_1 = \phi_e(1 + k_c\psi) + k_s \frac{\epsilon'_{cs}}{d} \dots\dots\dots(30)$$

ここに d は部材の有効高さを表わす。また、 k_c および k_s は鋼材の拘束度を表わす係数である。また、短期たわみを y_e 、全たわみを y_1 とおくとともに同様に

$$y_1 = y_e(1 + k'_c\psi) + k'_s k_t \epsilon'_{cs} \frac{l^2}{d} \dots\dots\dots(31)$$

ここに k'_c および k'_s は k_c および k_s と同様の係数であ

り、 l は部材の支間、 k_t は部材の支持条件の影響を考慮するための係数である。

以上において、無筋コンクリートの場合には $k_c = k'_c = 1$ 、 $k_s = k'_s = 0$ であるので、RC、PC および PRC 部材に対しても近似的にこれらの値を用いることも少なくないが、場合によってかなり大きな誤差を伴う。そのため、長期たわみを合理的に算定するための実験的および解析的研究が多数行われている。

たとえば ACI 318²⁾による近似法は、Branson⁵⁵⁾の提案による実験式であり、次式となっている。

$$y_1 = y_e \frac{T}{1 + 50 p'} \dots\dots\dots(32)$$

ここに p' は圧縮鉄筋比、 T はコンクリートのクリープおよび乾燥収縮特性や永久荷重作用後の時間の影響を考える係数 (通常は 2.5) である。

しかし、実験式には断面形状、配筋状態、ひびわれの状態などにより、おのずから適用範囲が限定されるため、解析的な方法も古くから種々考案されている。それらのうち比較的簡便な方法を挙げれば、次のようである。

A. Dischinger 法

この方法は、任意の時点におけるコンクリートの応力を σ'_c 、ひずみを ϵ'_c 、時間を t とおくと

$$\frac{d\epsilon'_c}{dt} = \frac{1}{E_c} \frac{d\sigma'_c}{dt} + \frac{\sigma'_c}{E_c} \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\epsilon'_{cs}}{dt} \dots\dots\dots(33)$$

の関係を用いるもので、 ψ および ϵ'_{cs} の時間関数が相似であると仮定すれば、通常、一階の線形微分方程式 (拘束度 2 以上の場合は連立微分方程式) を解く問題となる。

B. 有効ヤング係数法

いま、クリープ終了後のコンクリートの応力を σ'_c 、ひずみを ϵ'_c とおくと

$$\epsilon'_c = \frac{\sigma'_c}{E_c} (1 + \psi) + \epsilon'_{cs} \dots\dots\dots(34)$$

と仮定する方法である。このとき、コンクリートのヤング係数として次式の値を用いれば、短期変形におけると同様な取扱いができ、便利である。

$$E_{ce} = \frac{E_c}{1 + \psi} \dots\dots\dots(35)$$

C. 平均応力法

方法 B ではコンクリートの応力が時間とともに増加するときはクリープの影響を過大に、減少するときは過小に評価することから、クリープ開始前の応力 σ'_{c0} とクリープ終了後の応力 σ'_c の平均値に対してクリープを考慮するよう修正したのが平均応力法である。

$$\epsilon'_c = \frac{\sigma'_c + \frac{\sigma'_{c0} + \sigma'_c}{2}}{E_c} \psi + \epsilon'_{cs} \dots\dots\dots(36)$$

D. aging coefficient 法 (レラクセーション係数法)

これは Trost⁵⁶⁾によって提案された方法で、方法 C をさらに一般化したものである。

$$\epsilon'_c = \frac{\sigma'_{co}}{E_c} (1 + \phi) + \frac{\sigma'_c - \sigma'_{co}}{E_c} (1 + \rho\phi) + \epsilon'_{cs} \dots \dots \dots (37)$$

ここに ρ がレラクセーション係数または aging coefficient とよばれるもので、 σ'_c の時間的变化によって異なった値をとる。この方法は、 ρ の値が適切に選ぶことができれば、比較的簡便でありながら精度のよい計算結果が得られることから最近注目を受けている方法で、CEB マニュアル⁴⁷⁾もこの方法を採用している。しかし、この方法を有効に利用するには、電子計算機による逐次計算法など、より厳密な解析や実験などにより ρ の適切な値を見出しおかなければならない。 ρ は一般に 0.6~0.9 の値をとるといわれているが⁵⁷⁾、今後さらに多くのケーススタディが必要であろう。

以上のような各種の方法を全断面有効とする場合とコンクリートの引張抵抗を無視する場合とに適用すれば、短期変形における理論 I および理論 II に見合った長期曲率 ϕ_{1t} および ϕ_{2t} を得ることができる。このとき、過渡的な状態における曲率は、短期変形の場合と同様に式 (16) や式 (18) より計算することが可能である。

なお、ひびわれの生じている部材では、前述のように持続荷重や繰返し荷重によって $\Delta\sigma_s$ の減少が起こる。CEB の方法を用いる場合は、この影響は式 (15) 中の係数 β_2 を 1/2 に低減することによって考慮される。それに対して Branson の方法を用いる場合の取扱いは不明確なようである。しかし、CEB の方法と Branson の方法との類似性に着目すれば、Branson 式中の M_{cr}/M (または本文で置き換えをした σ_{scr}/σ_s) に低減係数を乗ずることにより、 $\Delta\sigma_s$ の減少を容易に考慮できることが理解できよう。低減係数の値は、持続荷重に対して 2/3 程度がよいようである。

9. あとがき

本文は、曲げを受ける RC 部材および PRC (パーシャル PC) 部材のひびわれとたわみに関する研究の現状について述べた。これらの分野はコンクリート構造の力学および設計の基本にかかわるものであるので、これまで数多くの研究が行われている。しかし、ひびわれ幅の算定法についてはなおさまざまな提案が共存しており、今後の発展にとっては確固たる理論の確立が必要なものと思われる。一方、たわみの簡易算定法については最近 Branson の方法と CEB の方法との類似性が多くなっており、両者の特徴が相互に生かされてきていることがわかる。また、長期たわみについて本文では簡易法を紹介したにとどめたが、より厳密な解析について最近多数の研究が行われている。今後その成果に大いに期待したい。

参 考 文 献

- 1) コンクリート標準示方書 (昭和 61 年制定), 土木学会, 1986.
- 2) Building Code Requirements for Reinforced Concrete, ACI 318-83, 1983.
- 3) CEB-FIP Model Code for Concrete Structures, 1978.
- 4) Saliger, R. : Die Neue Theorie des Stahlbetons, Franz Dentick, 1950.
- 5) Watstein, D. and Parsons, D. E. : Width and Spacing of Tensile Cracks in Axially Reinforced Concrete Cylinders, Journal of Research, NBS, 1943. 7.
- 6) Efsen, A. and Krenchel, H. : Prognosis of the Crack Problems in Reinforced Concrete Based on Statistical Investigation, RILEM Symposium, 1957.
- 7) Borges, J.F. : Cracking and Deformability of Reinforced Concrete Beams, Publication of IABSE, 1966.
- 8) Rehm, G. und Martin, H. : Zur Frage der Rissbegrenzung im Stahlbetonbau, Beton und Stahlbetonbau, 1968. 8.
- 9) Kaar, P.H. and Mattock, A.H. : Control of Cracking, Journal of PCA Research and Development Laboratories, 1963. 1.
- 10) 六車 熙・森田司郎・角 徹三: 異形鉄筋によるひびわれの分散について, コンクリートライブラリー, 第 14 号, 1965.
- 11) Gergely, P. and Lutz, L.A. : Maximum Crack Width in Reinforced Concrete Flexural Members, ACI SP-20, 1968.
- 12) Janjua, M.A. and Welch, G.B. : Magnitude and Distribution of Concrete Cracks in Reinforced Concrete Flexural Members, Univ. of New South Wales, Uniciv Report R 78, 1972. 7.
- 13) Holmberg, A. and Lindgren, S. : Crack Spacing and Crack Widths due to Normal Force or Bending Moment, National Swedish Building Research, 1970.
- 14) 角田与史雄: 鉄筋コンクリートの最大ひびわれ幅, コンクリートジャーナル, 1970. 9.
- 15) Leonhardt, F. : Rissebeschränkung, Beton und Stahlbetonbau, 1976. 1.
- 16) Broms, B.B. : Crack Width and Crack Spacing in Reinforced Concrete Members, ACI Journal, 1965. 10.
- 17) 池田尚治: 鉄筋コンクリート部材における鉄筋とコンクリートとの応力伝達に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 307 号, 1981.
- 18) Orangun, C.O., Jirsa, J.O. and Breen, J.E. : A Reevaluation of Test Data on Development Length and Splices, ACI Journal, 1977. 3.
- 19) Jimenez, R., White, R.N. and Gergely, P. : Bond and Dowel Capacities of Reinforced Concrete, ACI Journal, 1979. 1.
- 20) 三浦 尚・鈴木知洋: 鉄筋の重ね継手強度における横方向鉄筋の効果について, 土木学会論文集, 第 378 号, 1987.
- 21) コンクリート標準示方書 (昭和 61 年制定) 改訂資料, コンクリートライブラリー第 61 号, 1986. 10.

- 22) 谷内田昌熙・石橋忠良・佐藤 勉：鉄筋コンクリート橋梁のひびわれと鉄筋腐食に関する調査・研究，土木学会論文集，第378号，1987.2.
- 23) 石橋忠良・浦野哲司：PRC 桁の実橋測定とその考察，プレストレストコンクリート，1987.3.
- 24) 尾坂芳夫・大塚浩司・松本英信：乾燥の影響を受ける引張 RC 供試体のひびわれ性状，コンクリート工学，1985.3.
- 25) 横道英雄：鉄筋コンクリートの新発展と PRC 工法，土木学会北海道支部，1964.2.
- 26) 横道英雄・外崎 忍：上姫川橋（PRC 工法）の設計および施工について，プレストレストコンクリート，1965.12.
- 27) International Recommendations for the Design and Construction of Concrete Structures, CEB・FIP, 1970.
- 28) プレストレストコンクリート標準示方書，土木学会，1978.
- 29) 角田与史雄：PRC 桁の曲げ特性に関する実験，プレストレストコンクリート，1973.6.
- 30) 鈴木計夫・大野義照：PRC 部材の曲げひびわれ幅算定法，プレストレストコンクリート，1982.1.
- 31) Stevens, R. F. : Tests on Prestressed Reinforced Concrete Beams, Concrete, 1969.11.
- 32) Bennett, E. W. and Chandrasekhar, C. S. : Calculation of the Width of Cracks in Class 3 Prestressed Beams, Proceeding of ICE, 1971.7.
- 33) Brice, L. P. : Theorie de la Fissuration des Pieces en Beton Arme, Annales de ITBTP, 1952.6.
- 34) Suri, K. M. and Dilger, W. H. : Crack Width of Partially Prestressed Concrete Members, ACI Journal, 1986.9/10.
- 35) Nawy, E. G. : Flexural Cracking Behavior of Pretensioned and Posttensioned Beams, The State of the Art, ACI Journal, 1985.11/12.
- 36) Beeby, A. W. and Miles, J. R. : Proposals for the Control of Deflection in the United Code, Concrete, 1969.3.
- 37) Yu, W. W. and Winter, G. : Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams under Working Loads, ACI Journal, 1960.7.
- 38) Branson, D. E. : Deflections of Concrete Structures, McGraw-Hill Inc. Co., 1977.
- 39) Rao, P. S. : Die Grundlagen zur Berechnung der bei Statisch Unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im Plastischen Bereich Auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H. 177, 1966.
- 40) Rostasy, F. S., Koch, R. und Leonhardt, F. : Zur Mindestbewehrung für Zwang von Aussenwänder aus Stahlleichtbeton, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, H. 267, 1976.
- 41) Beton-und Stahlbetonbau, Bemessung und Ausführung, DIN 1045, 1972.
- 42) Grelat, A. : Compartement Non Lineaire et Stabilité des Ossatures en Beton Arme, Annales de ITBTP, No. 336, 1978.
- 43) 六車 熙・森田司郎・富田幸次郎：曲げひびわれを生じた鉄筋コンクリートはり材の応力状態と変形に関する研究，日本建築学会論文集，第200号，1972.
- 44) Sato, R. and Aoyagi, Y. : Studies on Deformation and Crack of Reinforced Concrete Flexural Members under Low Temperature, 土木学会論文報告集，第329号，1983.
- 45) 上田正生・土橋由造：補強材の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリートはり部材の曲げ変形解析，土木学会論文集，第372号，1986.
- 46) Sakai, K., Kakuta, Y. and Nomachi, S. : Methods for Estimating the Contribution of Tensile Concrete to Flexural Rigidity of Reinforced Concrete Members, Transactions of JCI, Vol. 2, 1980.
- 47) CEB Manual on Cracking and Deformation, Bulletin D'Information No. 158, 1985.
- 48) Sakai, K. and Kakuta, Y. : Moment-Curvature Relationships of Reinforced Concrete Members Subjected to Combined Bending and Axial Force, ACI Journal, 1980.5/6.
- 48) Shaikh, A. F. and Branson, D. E. : Nontensioned Steel in Prestressed Concrete Beams, PCI Journal, 1978.2.
- 50) Bennett, E. W. : Discussion of Design of Partially Prestressed Concrete Flexural Members, PCI Journal, 1978.5/6.
- 51) Tadros, M. K. : Expedient Service Load Analysis of Cracked Prestressed Concrete Sections, PCI Journal, 1982.11/12.
- 52) Branson, D. E. and Trost, H. : Unified Procedures for Predicting the Deflection and Centroidal Axis Location of Partially Cracked Nonprestressed and Prestressed Concrete Members, ACI Journal, 1982.3/4.
- 53) Branson, D. E. and Shaikh, A. F. : Deflection of Partially Prestressed Members, ACI SP-86, 1985.
- 54) コンクリート構造の限界状態設計法指針（案），土木学会，1983.
- 55) Branson, D. E. : Compression Steel Effect on Long-Time Deflections, ACI Journal, 1971.8.
- 56) Trost, H. : Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech-und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton, Beton und Stahlbetonbau, 1967.10/11.
- 57) Chali, A. and Favre, R. : Concrete Structures ; Stresses and Deformations, Chapman and Hall, 1986.