

鉛直振動を受ける円筒容器内の二層液体界面に発生する 内部波とその発生限界

SLOSHING OF TWO IMMISCIBLE LIQUIDS CONTAINED IN CIRCULAR TANKS SUFFERING FROM VERTICAL VIBRATION

池田 駿介*・山坂 昌成**・武藤 聡***・平井 克明****

By Syunsuke IKEDA, Masashige YAMASAKA, Satoshi MUTOH and Katsuaki HIRAI

Instability of interface between two immiscible fluids was studied theoretically and experimentally. The instability was found to be governed by the Mathieu equation with a damping term, and the third order solution for ϵ was obtained, in which ϵ is the ratio of periodically varying vertical acceleration to gravitational acceleration. The theory indicates that 1/2-subharmonic motion of the interface is the only possible response to the external vibration, since the unstable regions of the higher harmonic response becomes quite limited if the effect of viscous damping is considered. Several modes of interfacial two-dimensional waves were found in the laboratory tests, of which unstable regions were predicted well by the present theory.

Keywords: circular tank, internal wave, vertical vibration

1. 序 論

鉛直振動を受ける場で発生する重力波は復元力が時間の関数となるためにパラメータ振動となることが知られている。一番簡単な例は Fig.1 のように上下に振動する U 字管内の液面振動にみられ、Mathieu 方程式によって液面振動の安定・不安定を論ずることができる。

容器内の液体が鉛直振動外力を受けた場合については自由表面が外力振動の 1/2-subharmonic 応答することを Faraday が 1831 年に発見して以来、液面動揺についてさまざまな研究がなされている。たとえば、Benjamin・Ursell¹⁾ は境界条件を線型化し速度ポテンシャルを用いて解析を行い、液面が不安定となる領域およびそのモードを明らかにしている。波高の応答曲線を求めるには境界条件の非線型性を考慮した解析が必要となるが、Dodge ら²⁾、池田ら³⁾ は三次のオーダーまでの非線型解析を行い、波形や動水圧の分布についても調べている。以上のような研究は流体力学的興味のほか、地震

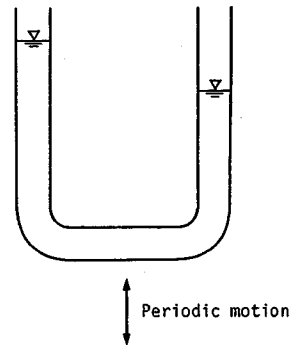


Fig.1 An example of parametric oscillation.

時の石油タンクの液面動揺や液体燃料ロケットのタンク内の液面動揺などを明らかにする目的で行われたものであり、したがって表面波についての取り扱いとなっている。

一方、貯液方式が複雑化（たとえば海底貯液タンク）したり、新しい構造物（たとえば FBR）が構築されるにつれて用いられる液体も均質なのではなく、成層液体や二層液体としての取り扱いが必要とされることが多くなってきている。上に述べたタンク型 FBR（高速増殖炉）では、地震のような原因で停止した場合、炉心から排出される液体ナトリウムが急激に冷却され、それが

* 正会員 工博 埼玉大学助教授 工学部建設基礎工学科
(〒338 浦和市下大久保 255)

** 正会員 工博 埼玉大学助手 工学部建設基礎工学科
(同上)

*** 建設省関東地方建設局

**** 越谷市役所

原子炉容器中の高温液体ナトリウム中に流出すると顕著な成層化現象が発生する。このような場合、界面の動揺により炉容器には大きな熱衝撃が加わることが予想されている⁴⁾。このような内部波については水平振動を受ける場合について Thorpe⁵⁾、石川・椎貝⁶⁾、沢本・加藤⁷⁾が線形あるいは非線形解析を行っているが、鉛直振動を受ける場合については取り扱いがなされていない。大気と接する表面波に比べて内部波は粘性の影響を受けやすく、特に前述のような高粘度の液体については粘性の効果を十分に把握しておく必要がある。パラメータ振動では安定・不安定境界を表わす中立曲線の位置が抵抗（液体の場合には粘性による）によって変化するので、本論文ではこれらの解析を行うとともに実験により理論の妥当性を確かめる。

2. 基礎方程式の誘導

Fig. 2 に示すような半径 R の円筒タンク内に密度 ρ_a および ρ_b をもつ二層液体が密閉されているとする。ただし、 $\rho_a < \rho_b$ であり、以後添字 a, b はそれぞれ上層、下層液体に関する量を表わすこととする。このような系に鉛直交番変位 $A \cos N\omega t$ を加える。ただし、 A は振幅、 $N\omega$ は角周波数、 ω は液面動揺の角周波数、 N は正の数である。このとき流体系を支配する運動方程式は液体の非圧縮、非回転を仮定すれば、次の Laplace の式となる。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 Φ は速度ポテンシャルである。境界条件は壁および上下底で

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

である。ここに、 n は境界に対し外向き法線方向の位置を表わす。内部境界面では上下層の液体の圧力が等しいこと（力学的条件）と、内部境界面の移動速度と鉛直流速成分が等しいこと（運動学的条件）が要求される。すなわち、

$$P_a = P_b \dots\dots\dots (3)$$

$$-\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \Phi_a}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_b}{\partial z} \dots\dots\dots (4)$$

である。ここに P は圧力、 η は内部境界面の変位である。各独立変数ごとに変数分離

$$\Phi = R(r)Z(z)\Theta(\theta)T(t) \dots\dots\dots (5)$$

を行い、式 (1) を式 (2) の境界条件のみを考慮して解くと、上下層液体の速度ポテンシャルが次のように求まる。

$$\Phi_a = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) \frac{\cosh[\lambda_{mn}(z-H_a)]}{\cosh(\lambda_{mn}H_a)} \times (C_1 \sin m\theta + C_2 \cos m\theta) \cdot T_a(t) \dots\dots\dots (6)$$

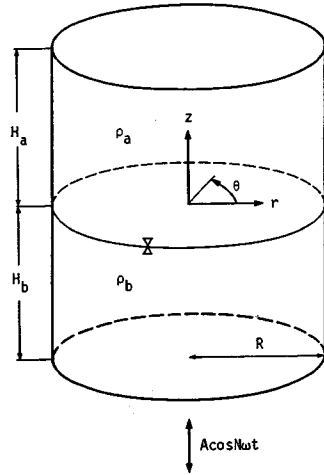


Fig. 2 Definition sketch.

$$\Phi_b = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) \frac{\cosh[\lambda_{mn}(z+H_b)]}{\cosh(\lambda_{mn}H_b)} \times (B_1 \sin m\theta + B_2 \cos m\theta) \cdot T_b(t) \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 C_1, C_2, B_1, B_2 は係数、 J_m は第一種 m 階 Bessel 関数であり、 λ_{mn} は方程式

$$\frac{dJ_m(\lambda_{mn} r)}{dr} \Big|_{r=R} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

の根であり、これを満たす零点は円周方向の波数 m に対して無限に存在し、その固有値の順序を $n (1, 2, 3, \dots)$ としている。式 (6), (7) では時間に関する関数 T_a, T_b が決定していない。境界面では同一の波動運動を行うので、 T_a, T_b は等しく、以後 T として取り扱う。

液体中の圧力は一般化された Bernoulli の定理

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - (g - AN^2\omega^2 \cos N\omega t)z - \frac{v^2}{2} \dots\dots\dots (9)$$

から求まる。ここに g は重力の加速度、 v^2 は流体の速度ベクトルの二乗であるが、 v^2 は境界面の振幅が十分小さい場合には無視し得る。本論文では内部境界面の動揺の安定・不安定境界を求めるので、この条件は厳密に満足される。したがって、式 (3) の境界条件は以下のようなになる。

$$\rho_a \left[\frac{\partial \Phi_a}{\partial t} - (g - AN^2\omega^2 \cos N\omega t)\eta \right] = \rho_b \left[\frac{\partial \Phi_b}{\partial t} - (g - AN^2\omega^2 \cos N\omega t)\eta \right] \dots\dots\dots (10)$$

同様に、運動学的条件において η が十分小さいとすれば、式 (4) は以下のようなになる。

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_a}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_b}{\partial z} \dots\dots\dots (11)$$

式 (10) の両辺を t で偏微分し、式 (11) を代入して再び $\eta=0$ とおけば、

$$\rho_a \frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial t^2} - \rho_b \frac{\partial^2 \Phi_b}{\partial t^2} + (\rho_a - \rho_b)(g - AN^2 \omega^2 \cos N\omega t) \frac{\partial \Phi_a}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(12)$$

となる。式 (11) に式 (6), (7) を代入し, $z = \eta = 0$ とすれば

$$B_1 \sin m\theta + B_2 \cos m\theta = -\frac{\tanh(\lambda_{mn}H_a)}{\tanh(\lambda_{mn}H_b)} \cdot (C_1 \sin m\theta + C_2 \cos m\theta) \dots\dots\dots(13)$$

が成り立つ。式 (12) に式 (6), (7) を代入し, 式 (13) を用いて整理すれば, T に関する微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + (1-G)(g - AN^2 \omega^2 \cos N\omega t) \times \frac{\lambda_{mn} \tanh(\lambda_{mn}H_a) \tanh(\lambda_{mn}H_b)}{\tanh(\lambda_{mn}H_a) + G \tanh(\lambda_{mn}H_b)} T = 0 \dots\dots\dots(14)$$

ここに, $G = \rho_a / \rho_b$ である。

式 (14) は Mathieu 方程式であって, 鉛直振動を受ける二層液体の境界面に発生する内部波はパラメーター振動を起こすことが知られる。一般に外力の角周波数が $N\omega$ で与えられる場合, $0 < N < 1$ のとき内部波は外力に対して superharmonic, $N = 1$ のとき harmonic, $N > 1$ のとき subharmonic 応答をすることとなる。 $A = 0$ とすると式 (14) は自由振動の方程式となり, この場合の固有角周波数 Ω は次のようになる。

$$\Omega = \left[\frac{(1-G)g\lambda_{mn} \tanh(\lambda_{mn}H_a) \tanh(\lambda_{mn}H_b)}{\tanh(\lambda_{mn}H_a) + G \tanh(\lambda_{mn}H_b)} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(15)$$

式 (15) を用いて式 (14) を書き直せば,

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \Omega^2 \left(1 - \frac{AN^2 \omega^2}{g} \cos N\omega t \right) T = 0 \dots\dots\dots(16)$$

次に減衰効果について考える。実在液体には粘性があるために減衰を考慮する必要がある。このような波動運動によって生ずる振動流れでは, 渦度を有する領域はタンク境界面および内部液体境界面のごく近傍に限られる (渦度の source は固体境界壁および密度界面であり, 渦度の存在する厚さは $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ の程度であることによる, ここに ν は動粘性係数) ので, 液体の大部分の領域では無渦運動として取り扱ってよい。また, 前にも述べたように現在取り扱いの対象としているのは内部境界面の安定・不安定の中立曲線を定めることであるので, 微小振幅波として取り扱うことができる。以上から Stokes 層厚さ δ を基準とした Reynolds 数は非常に小さく, したがって抵抗項は dT/dt に比例するとおこなうことができる。以上から粘性を考慮した場合の支配方程式は, 式 (16) に減衰項を付加し,

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + 2h\Omega \frac{dT}{dt} + \Omega^2 \left(1 - \frac{AN^2 \omega^2}{g} \cos N\omega t \right) T = 0 \dots\dots\dots(17)$$

となる。ここに, h は無次元の減衰率である。方程式を完全に無次元化するために, $\tau = N\omega t$ と置き, 式 (17) を変形すれば,

$$\frac{d^2 T}{d\tau^2} + 2\mu \frac{dT}{d\tau} + (q^2 - \varepsilon \cos \tau) T = 0 \dots\dots\dots(18)$$

となる。ここに

$$\mu = \frac{h\Omega}{N\omega}, \quad q^2 = \frac{\Omega^2}{N^2 \omega^2}, \quad \varepsilon = \frac{A\Omega^2}{g} \dots\dots\dots(19)$$

である。式 (18) が, 液体の粘性を考慮した場合の界面の安定・不安定を決定する基礎方程式である。

3. Mathieu 方程式の高次解

式 (18) は構造工学の分野においてもよく現われる。たとえば, Bolotin⁸⁾ は弾性構造物の動的安定・不安定問題に関連するパラメーター振動について詳述している。Bolotin の解法は $T(t)$ を Fourier 級数で展開し, 各調和および分数調和波ごとに $\varepsilon \ll 1$ の場合の解を求めるものである。また, 構造工学の分野では多自由度振動を伴うことが多いので数値解法が行われている^{9)~11)}。

一方, 本論文で取り扱われているような振動系では, ε (重力の加速度に対する鉛直加速度の比に比例する量) が十分小さいとは限らないので, ε に関する高次解を求める必要がある。Mathieu 方程式, 式 (18), に含まれるパラメーターは μ, q^2, ε であるので, この3個で定まる面上のどこで安定な解, 不安定な解が存在するかを調べればよい。すなわち, 安定な解と不安定な解が存在する領域の境界では T が周期解をもつことを仮定して, 3個のパラメーターの間の関係を調べればよい。式 (18) において, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき, もし μ が正の有限な値であれば, 方程式は完全な周期解をもつことはなく減衰する解, すなわち安定な解をもつことになる。したがって, 完全な周期解をもつためには $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき, $\mu \rightarrow 0$ でなければならない。したがって, μ は次のように展開される。

$$\mu = \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \varepsilon^3\beta_3 + \dots \dots\dots(20)$$

このとき (すなわち, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき), 式 (18) は $d^2 T/dt^2 + q^2 T = 0$ となり, 周期解 $e^{iq\tau}$ をもつ。 $\varepsilon \rightarrow 0$ において, この調和解に一致しなければならないので, q^2 を以下のように ε のべきで展開する。

$$q^2 = \frac{1}{N^2} + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \varepsilon^3\alpha_3 + \dots \dots\dots(21)$$

式 (19) を参照して, 式 (21) は $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で $\omega = \Omega$, すなわち内部波の角周波数は固有角周波数に等しく外力の角周波数の $1/N$ になることを表わしている。以上の展開に対応して $T(\tau)$ を次のように置く。

$$T(\tau) = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \varepsilon^3 T_3 + \dots \dots\dots(22)$$

式 (20), (21), (22) を式 (18) に代入し, ε の各オーダーごとにまとめると

ε^0 のオーダー:

$$\frac{d^2 T_0}{d\tau^2} + \frac{1}{N^2} T_0 = 0 \dots\dots\dots (23)$$

ε^1 のオーダー:

$$\frac{d^2 T_1}{d\tau^2} + 2\beta_1 \frac{dT_0}{d\tau} + (\alpha_1 - \cos \tau) T_0 + \frac{1}{N^2} T_1 = 0 \dots\dots (24)$$

ε^2 のオーダー:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_2}{d\tau^2} + 2\beta_2 \frac{dT_0}{d\tau} + 2\beta_1 \frac{dT_1}{d\tau} + \alpha_2 T_0 \\ + (\alpha_1 - \cos \tau) T_1 + \frac{1}{N^2} T_2 = 0 \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ε^3 のオーダー:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_3}{d\tau^2} + 2\beta_3 \frac{dT_0}{d\tau} + 2\beta_2 \frac{dT_1}{d\tau} + 2\beta_1 \frac{dT_2}{d\tau} + \alpha_3 T_0 \\ + \alpha_2 T_1 + (\alpha_1 - \cos \tau) T_2 + \frac{1}{N^2} T_3 = 0 \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

となる。

前述のように、内部波は外力に対しては 1/2-subharmonic 応答 ($N=2$) することが予想されるので、まず $N=2$ の場合について解を求める。式 (23) より T_0 は

$$T_0 = a \cos\left(\frac{1}{2}\tau + \phi\right) \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 a は T_0 に関する振幅で波高に比例する量、 ϕ は位相差である。式 (27) を式 (24) に代入し、整理すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1}{d\tau^2} + \frac{1}{4} T_1 = a \left[(\beta_1 \cos \phi + \alpha_1 \sin \phi \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sin \phi) \sin \frac{1}{2}\tau + (\beta_1 \sin \phi - \alpha_1 \cos \phi \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos \phi) \cos \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{2} \sin \phi \sin \frac{3}{2}\tau \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos \phi \cos \frac{3}{2}\tau \right] \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

T_1 が周期解をもつには、 $\sin \tau/2$, $\cos \tau/2$ の係数 (永年項) が 0 でなければならない。すなわち、

$$\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\right) \sin \phi + \beta_1 \cos \phi = 0 \dots\dots\dots (29)$$

$$\beta_1 \sin \phi - \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right) \cos \phi = 0 \dots\dots\dots (30)$$

式 (29), (30) から α_1, β_1 の関係として

$$\alpha_1 = \pm \left(\frac{1}{4} - \beta_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (31)$$

を得る。まず、以上の ε^1 のオーダーまでの項から安定・不安定境界を求める。式 (20), (21) から

$$\mu = \varepsilon \beta_1 \dots\dots\dots (32)$$

$$q^2 = \frac{1}{4} + \varepsilon \alpha_1 \dots\dots\dots (33)$$

である。また、式 (19) から

$$\mu = qh \dots\dots\dots (34)$$

となる。よって、式 (32), (34) から

$$\beta_1 = \frac{qh}{\varepsilon} \dots\dots\dots (35)$$

また、 α_1 は式 (31) から

$$\alpha_1 = \pm \left(\frac{1}{4} - \frac{q^2 h^2}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (36)$$

となる。式 (33), (36) から、 q^2 について解き

$$q^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{h^2}{2}\right) \pm \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} h^2\right)^2 - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} \varepsilon^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots (37)$$

を得る。式 (37) が ε^1 のオーダーを考慮した場合 (第 1 近似解) の 1/2-subharmonic 応答の安定・不安定領域の境界を示し、 $T(t)$ を Fourier 展開して求めた Bolojin の解と一致する。

ε^2 のオーダーの解 (第 2 近似解) を求めるには次のように行う。式 (28) から永年項は 0 であることに注意して、 T_1 の解は

$$T_1 = a \left(\frac{1}{4} \sin \phi \sin \frac{3}{2}\tau - \frac{1}{4} \cos \phi\right) \dots\dots\dots (38)$$

である。式 (27), (38) を式 (25) に代入し、 T_2 を求め、再び $\sin \tau/2$, $\cos \tau/2$ の係数を 0 とおくと、 α_2, β_2 が求まり、

$$\alpha_2 = -\frac{1}{8}, \quad \beta_2 = 0 \dots\dots\dots (39)$$

となる。式 (20), (21) の ε^2 までのオーダーの項に式 (31), (39) を代入し、式 (34) を用いて q^2 について解けば、

$$\begin{aligned} q^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{8} \varepsilon^2\right) \pm \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{8} \varepsilon^2\right)^2 \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{16} - \frac{5}{16} \varepsilon^2 + \frac{1}{64} \varepsilon^4\right)\right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

となる。 ε^3 のオーダーの解 (第 3 近似解) は同様の操作を行えば

$$\alpha_3 = -\frac{1}{16} \alpha_1, \quad \beta_3 = -\frac{3}{16} \beta_1 \dots\dots\dots (41)$$

となる。第 3 近似解では β_1 は式 (35) ではなく、式 (20), (34), (39), (41) より

$$\beta_1 = qh / \left(\varepsilon - \frac{3}{16} \varepsilon^3\right) \dots\dots\dots (42)$$

となる。これを式 (31), (41) に代入して得られる α_1, α_3 および式 (39) を式 (21) に代入して、安定・不安定境界を表わす式として

$$\begin{aligned} \left(q^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \varepsilon^2\right)^2 = \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{16}\right)^2 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{qh}{\varepsilon - \frac{3}{16} \varepsilon^3}\right)^2\right] \\ \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

を得る。安定・不安定境界上では、 $T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \varepsilon^3 T_3 + \dots$ の振動を行う。

以上求められた解を用いて、Fig. 3 に減衰がない場合 ($h=0$) について、1/2-subharmonic 応答の各オーダーごとの安定・不安定境界を示す。第 1 近似解は ε が大

きくなると高次解とのずれが大きいが、第2近似解は第3近似解とほとんど一致しており、第2近似解までとれば精度上問題はないことが知られる。 h が0でない場合についても第2近似解と第3近似解はほとんど一致した。

Fig. 4は第3近似解について無次元減衰率 h を変化させ、安定・不安定領域を描いたものである。 h が増大するにつれて、不安定領域が縮小することが示されている。

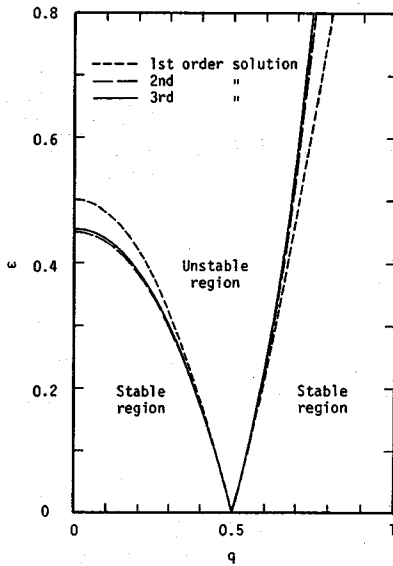


Fig. 3 Comparison of each order of approximation for 1/2-subharmonic response at $h=0$.

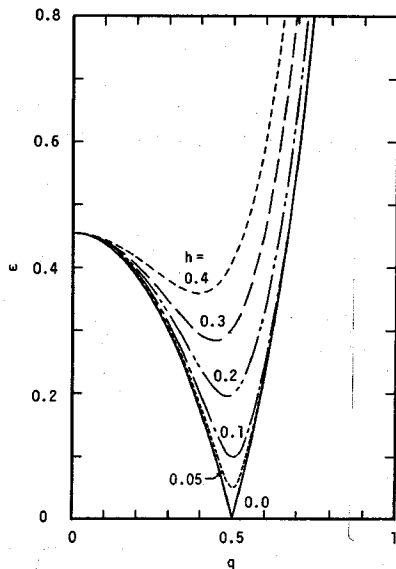


Fig. 4 Stable-unstable boundaries of 1/2-subharmonic response for various values of h .

たとえば、 $h=0.1$ であれば $\varepsilon=0.1$ 程度まで鉛直振動による内部波の発生はない。

次に harmonic 応答 ($N=1$) の場合について述べる。解法は $N=2$ の場合と全く同様であり、結果のみを示す。

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0 \dots \dots \dots (44 \cdot a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{6} \pm \left(\frac{9}{144} - 4\beta_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_2 = \frac{qh}{\varepsilon^2} \dots \dots \dots (44 \cdot b)$$

この ε^2 のオーダーまでの結果を用いて、安定・不安定境界は

$$q^2 = \left(1 - 2h^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^2 \right) \pm \left[\frac{9}{144}\varepsilon^4 + \left(4h^2 - 4 - \frac{2}{3}\varepsilon^2 \right) h^2 \right]^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (45)$$

となる。

同様に 3/2-superharmonic ($N=2/3$) の場合は

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0 \dots \dots \dots (46 \cdot a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{16}, \quad \beta_2 = 0 \dots \dots \dots (46 \cdot b)$$

$$\alpha_3 = \pm \frac{1}{32^2} - 9\beta_3^2, \quad \beta_3 = \frac{qh}{\varepsilon^3} \dots \dots \dots (46 \cdot c)$$

となる。この場合には ε^3 のオーダーにおいて始めて減衰の効果が現われる。 ε^3 のオーダーまでの結果を用いた安定・不安定境界は以下のようなのである。

$$q^2 = \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}h^2 + \frac{1}{16}\varepsilon^2 \right) \pm \left[\frac{81}{4}h^2(h^2-1) - \frac{9}{16}\varepsilon^2h^2 + \frac{1}{32^2}\varepsilon^6 \right]^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (47)$$

以上のように N の値を変えて計算を進めていけばよい。

結果は Fig. 5 に示されているが、3/2-superharmonic においてすでに不安定領域は非常に狭く、これ以上小さい N の値について求める必要はほとんどない。また、同図中で $h=0.05$ ととり、減衰の効果が不安定領域を

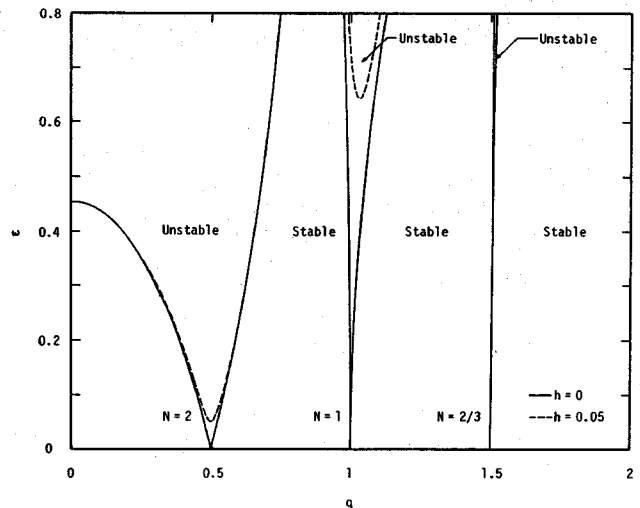


Fig. 5 Stable-unstable regions of Mathieu equation.

どの程度縮小させるかについて検討している。 N の値が小さくなるにつれて不安定領域が急激に小さくなり、 $N=1$ の harmonic 応答では $\varepsilon=0.65$ 程度の鉛直加速度を与えなければ不安定とならず、 $N=2/3$ の $3/2$ -superharmonic では図中にはもはや不安定領域は現れない。以上から粘性による減衰を考慮した場合には、実際上 $1/2$ -subharmonic しかあり得ないことが知られる。

4. 実験

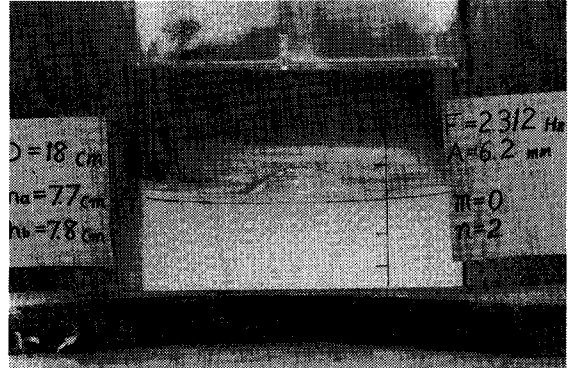
実験に用いた振動台は埼玉大学工学部建設系所属の島津サーボパルサー EHV 05105 であり、鉛直振動を加える場合の最大投載量は 50 kg である。鉛直振動の制御は Mathieu 方程式の安定・不安定領域が ε によって決定されることから鉛直加速度を変化させる必要があるが、ここでは一定の振幅 A に対し外力の角周波数 $N\omega$ を変化させて実験を行い、さらに A を変えて再び $N\omega$ を変化させる方法を用いた。用いた円筒タンクは透明アクリル樹脂製で、内径 18 cm、高さ 50 cm、壁厚 1 cm であり、振動台に固定されている。下層の液体は水、上層の液体はテレピン油である。上、下層の深さはそれぞれ $H_a=$

7.7 cm, $H_b=7.8$ cm であり、上層の表面はアクリル樹脂製の蓋で密閉した。テレピン油の密度は温度によって若干変化するが、ここでは測定の実験値 $G=0.864$ を用いる。

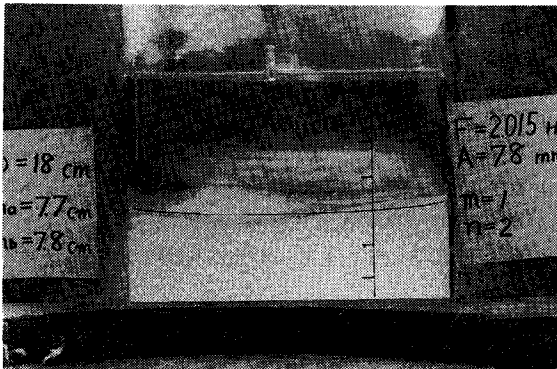
実験の測定項目は

- (1) 振動台の振動数および振幅
- (2) 内部波のモード、振動数および振幅
- (3) 内部波の減衰定数

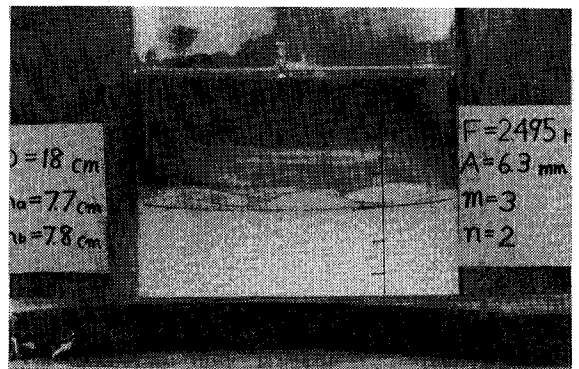
である。測定項目 (2) についてはテレピン油を用いて



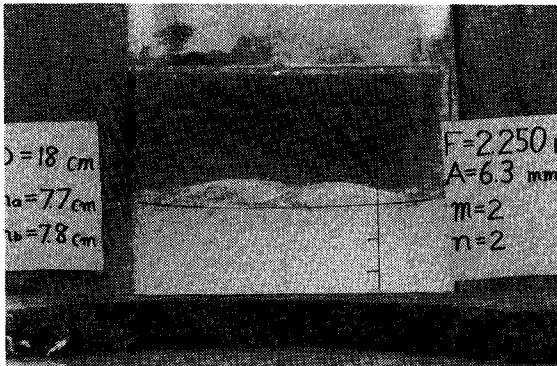
(c) $N\omega/2\pi=2.312$ Hz, $m=0$, $n=2$



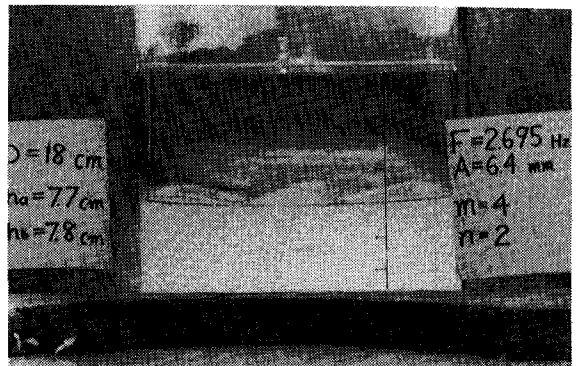
(a) $N\omega/2\pi=2.015$ Hz, $m=1$, $n=2$



(d) $N\omega/2\pi=2.495$ Hz, $m=3$, $n=2$



(b) $N\omega/2\pi=2.250$ Hz, $m=2$, $n=2$



(e) $N\omega/2\pi=2.695$ Hz, $m=4$, $n=2$

Fig. 6 Modes of internal waves.

いること、および上面が密閉されていることから波高計を用いることが困難であるので、ビデオテープレコーダーを用いて拡大した画面からモードを観察し、波高を読み取った。また、内部波の振動数はストップウォッチで測定した。

本実験において観察された内部波の様子を Fig. 6 に示す。発生した内部波はすべて予想どおり、1/2-subharmonic ($N=2$) 応答であった。また、そのモードは $n=2$ ($m=0, 1, 2, 3, 4$) および $n=3$ ($m=1$) のものが観察された。発生した内部波はすべて重複波であり、円周方向等への進行波成分はみられなかった。Fig. 6 の内部波の形状について説明する。2. において述べたように m は円周方向の波数であり、この値によって Bessel 関数の階数も決定される。内部波の形状がわかりやすい Fig. 6 中の (a) $m=1, n=2$, (c) $m=0, n=2$ の場合を取り上げる。 $m=0, m=1$ にそれぞれ対応する $J_0(x)$, $J_1(x)$ の x に対する関数関係は Fig. 7 に示されているようになる。同図中の矢印と n の値は、円周における境界条件、式 (8)、を満足する位置およびその固有値の順序を表わしている。 $m=0$ (すなわち J_0 の場合) に対しては、 $n=1$ であれば内部波が中心で盛り上がっている場合には円周では平均水面よりも下がっているはずであるが、Fig. 6(c) では逆に円周付近で盛り上がっている。したがって、2 番目の固有値 $n=2$ を取ることが判断される。 $m=1$ (J_1) の場合についても同様に Fig. 6(a) と Fig. 7 を比較し、2 番目の固有値 $n=2$ をとっていることが知られる。同様にして、他のモードに対応する波形も決定される。

一層の単一液体で自由表面が存在し、鉛直振動を受け

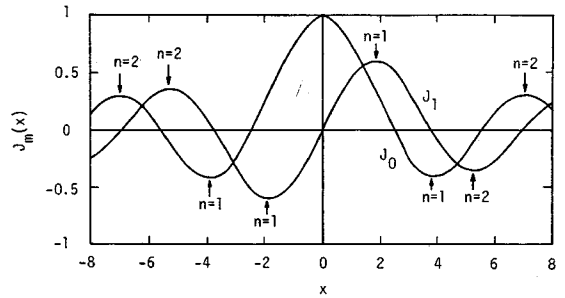


Fig. 7 Bessel functions which express lateral profiles of interfacial waves. Arrows indicate the positions where Eq. 8 are satisfied, for which n is specified.

る場合には $n=1$ のモードが顕著に現われたが (文献 3)), 本実験では $n=1$ のモードは観察されなかった。この点については以上のような条件の相違に対して、それぞれのモードの時間的な発達率を Mathieu 方程式から調べる必要があると考えられる。本論文では発達率が 0 の場合について理論解析を行っているが、発達率を論ずる場合にはより複雑な取り扱いが必要とされるので、現段階では実験で現われたモードについて説明を加えるにとどめる。

各モードの固有角周波数 Ω は式 (15) から求まるが、この値を用いて $h=0$ の場合 (すなわち減衰のない場合) の安定・不安定領域を実軸上に描けば Fig. 8 のようになり、振動外力の振幅 A が非常に小さくならない限り、ほとんどの不安定領域は互いに重なり合っている。観察されたそれぞれのモードの液面動揺はすべて予測された領域内に収まっているが、互いに重なり合った部分では

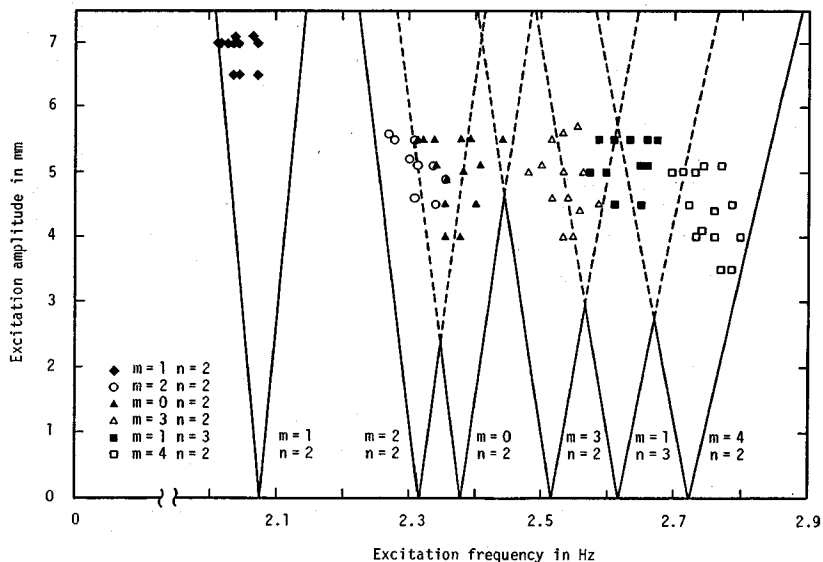


Fig. 8 Modes appeared in the present test.

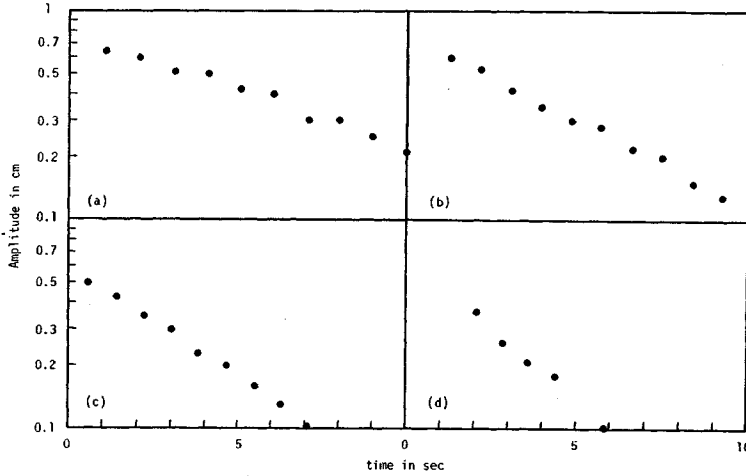


Table 1 Measured h for each mode.

Mode	$h\Omega(\text{s}^{-1})$	h
$m=1$ $n=2$	0.121	0.019
$m=2$ $n=2$	0.167	0.023
$m=3$ $n=2$	0.214	0.027
$m=4$ $n=2$	0.246	0.029

Fig.9 Damping of amplitude with time for (a) $m=1, n=2$, (b) $m=2, n=2$, (c) $m=3, n=2$ and (d) $m=4, n=2$.

主たる領域に近いモードの液面動揺が現われ、領域を分割し合っていることが知られる。Fig. 8にプロットされているのは液面動揺が現われた場合であり、現われなかった場合についてはプロットされていない。本実験では振幅が3 mm程度では内部境界面は全く安定であり、動揺はみられなかった。これは前にも述べたように、粘性による減衰項の効果であると考えられ、以下でこの点について考察を行う。

減衰定数 h は振動台を突然止め (このときを $t=0$ とする), 自由減衰振動をしている内部波の波高減衰を0.01秒刻みのタイマーを入れたビデオテープレコーダーから読み取り, この波高減衰を式 (17) において

$A=0$ として得られる自由減衰振動の方程式から得られる解と比較することにより得た。減衰定数は各モード ($n=2, m=1, 2, 3, 4$) についてそれぞれ4~6回測定した。 $m=0, n=2$ のモードについては壁面での液面動揺が小さく, h の値を正確に測定することが困難であったので省いている。測定のばらつきは $\pm 15\%$ 程度であった。たとえば, 後述される $m=3, n=2$ のモードではTable 1に示されているように h の平均値は0.027であるが, 6回の測定のうち, 最小値は0.021, 最大値は0.030であった。タンク側壁における波の振幅の減衰の状況を Fig.9に示す。図中, 縦軸が対数スケールになっていることに注意して, 振幅はほぼ指数関数的に減衰し

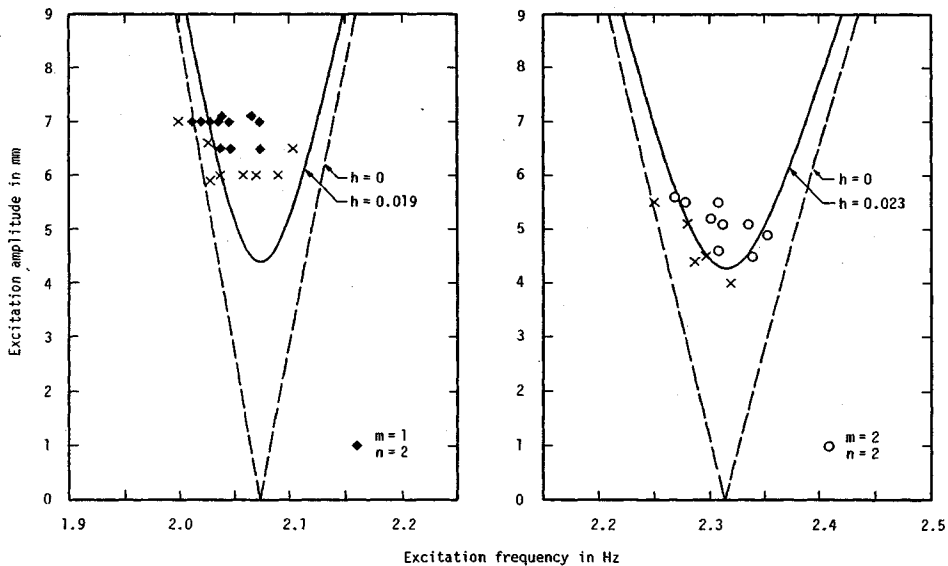


Fig.10 Unstable regions of modes, $m=1, n=2$ and $m=2, n=2$.

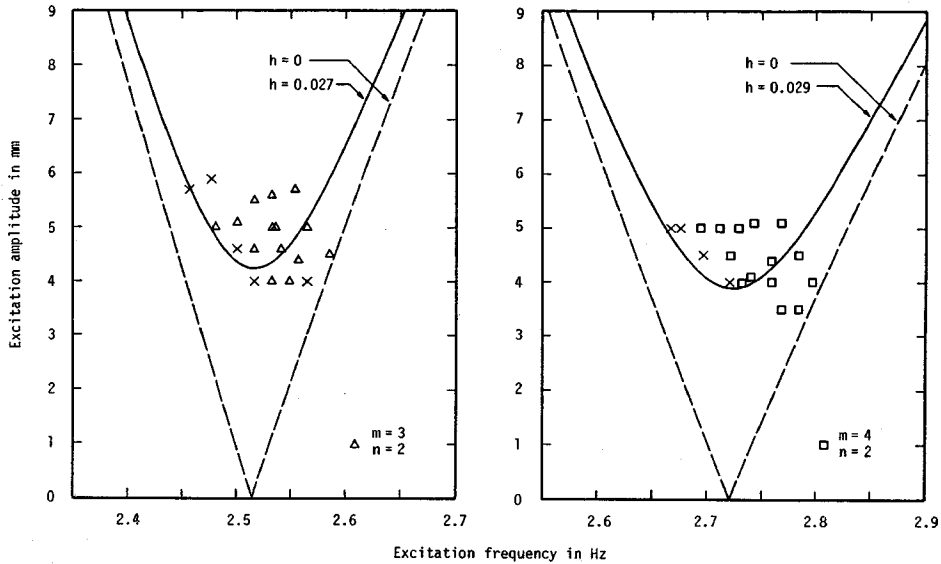


Fig. 11 Unstable regions of modes, $m=3, n=2$ and $m=4, n=2$.

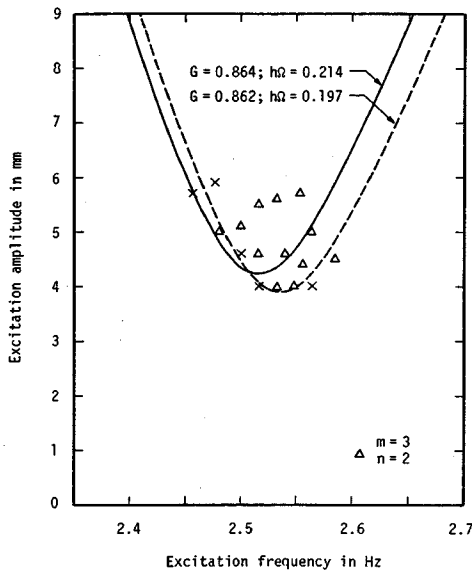


Fig. 12 Effects of G and h on unstable region for the case of mode, $m=3, n=2$.

ていることがわかる。減衰率は Table 1 あるいは Fig. 9 に示されているように波数が大きいほど増加しており、一般に知られている傾向と一致している。

以上のように、 h を測定した 4 個のモードについて、それぞれのモードごとに取り出して不安定領域をより詳細に検討した結果を Fig. 10, 11 に示す。図中、×印は液面動揺が発生しなかった点である。×印よりも振幅が小さい場合にはもちろん液面動揺は現われなかった。ま

た、振幅が大きい点については振動台の性能上実験を行うことができなかった（振動台の振幅は約 8 mm 程度まで可能である）。モードによっては若干のずれがあるものの、測定された h の値を用いて式 (40) から計算された安定・不安定境界（実線）は実測による安定・不安定境界を比較的良好に表わしている。

次にこのずれの原因について若干の考察を行う。前にも述べたようにテレピン油の比重は測定値の平均として $G=0.864$ を用いたが、測定の誤差や温度によって変化する。内部波は両液体の密度差によって決定されるので、テレピン油の比重の僅かな変化によってもかなりの影響を受ける。一方、 h の値もかなりの測定誤差を含んでいる。ここでは、 $n=2, m=3$ のモードを例にとりて G と h の効果について調べてみる。Fig. 12 は G の値を 0.002 減少させ、また h の値を 8% 減少させて $h=0.025$ として計算した安定・不安定境界（破線）を示すものである。 G も h も測定の誤差の範囲内、あるいは温度による変化の範囲内で変えているが、この程度の調節で実測値と非常によく一致するようになることが知られる。以上のように、安定・不安定境界は G や h の変化に対して比較的鋭敏に変わることがわかる。

5. 結 論

本研究は鉛直振動を受ける円筒容器内に密閉された二層液体界面に発生する内部波について、理論的・実験的研究を行ったものであって、その結果以下の諸点が明らかとなった。

(1) 内部波の安定・不安定を支配する方程式は

Mathieu 方程式であって、このとき液体の粘性による減衰項を考慮する必要がある。

(2) 減衰項を考慮した Mathieu 方程式を ε (鉛直振動加速度/重力加速度に比例する量) についての高次解を求めた。その結果、解は少なくとも ε^2 のオーダーまでとる必要があり、減衰項は不安定領域を縮小させ、この不安定領域は実際上 1/2-subharmonic 領域においてのみ現われることが知られた。

(3) 二層液体としてテレピン油と水を用いて実験を行ったところ、自由表面をもつ一層液体の場合にみられた $n=1$ のモードは発生せず、 $n=2$ 以上のモードが現われた。現われたモードの発生領域は理論によってよく説明することができた。また、このとき、粘性減衰の効果によって外力の振動振幅が小さい場合には内部波は発生しなかったが、この安定・不安定境界についても理論は実測値をよく説明した。

(4) この安定・不安定境界は内部液体の密度差や減衰定数の影響を比較的鋭敏に反映する。

謝 辞：実験に際しては埼玉大学工学部建設基礎工学科 中村広昭助手から援助を頂いた。また、堀川清司 埼玉大学客員教授から用語、文献について助言を頂いた。記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Benjamin, T.B. and Ursell, F. : The Stability of a Plane Free Surface of a Liquid in Vertical Periodic

- Motion, Proc. Roy. Soc., A 225, pp. 505~515, 1954.
- 2) Dodge, F.T., Kana, D.D. and Abramson, H.N. : Liquid Surface Oscillations in Longitudinally Excited Rigid Cylindrical Containers, AIAA J., Vol. 3, No. 4, pp. 685~695, 1965.
- 3) 池田駿介・秋山成興・中村広昭・白井伸一：円筒タンク内の液体動揺に関する研究, 土木学会論文報告集, 290号, pp. 53~65, 1979.
- 4) 和田 明：原子力水理研究の現状と展望, 土木学会論文集, No. 345/II-1, pp. 31~40, 1984.
- 5) Thorpe, S. A. : On Standing Internal Gravity Waves of Finite Amplitude, JFM, Vol. 32, Part 2, pp. 489~528, 1968.
- 6) 石川忠晴・椎貝博美：円形水槽内 2 層流体における内部波について, 土木学会論文報告集, 219号, pp. 45~53, 1973.
- 7) 沢本正樹・加藤一正：有限振幅内部重複波に関する研究, 土木学会論文報告集, 232号, pp. 37~47, 1974.
- 8) Bolotin, V. V. : The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day Inc., San Francisco, 1964.
- 9) Hsu, C. S. : On the Parametric Excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom, J. Appl. Mech., ASME, Vol. 30, pp. 363~372, 1963.
- 10) Lee, T. C. : A Study of Coupled Mathieu Equations by Use of Infinite Determinants, J. Appl. Mech., ASME, Vol. 43, pp. 349~352, 1976.
- 11) Takahashi, K. : An Approach to Investigate the Instability of the Multiple-Degree-of-Freedom Parametric Dynamic Systems, J. Sound and Vibration, Vol. 78, pp. 519~529, 1981.

(1986. 6. 11・受付)