

地下水位低下工事による地下塩水侵入の 注水井群による最適制御

OPTIMAL CONTROL OF SALT WATER INTRUSION BY GROUP OF RECHARGE WELLS UNDER WORK OF LOWERING GROUNDWATER LEVEL

上田年比古*・藤野和徳**・神野健二***・平野文昭****

By Toshihiko UEDA, Kazunori FUJINO, Kenji JINNO and Fumiaki HIRANO

It is necessary to avoid the salt water intrusion obstruction in pumping up the groundwater in the coastal aquifer. The present paper is described the formulation of the groundwater density flow, the analysis and the calculation method of an optimal recharge and discharge to avoid the salt water intrusion under the work of lowering groundwater level in the excavation area, and the applications of the optimal recharge and discharge. It is defined that the state where the total of absolute values of the recharge and discharge is minimum under the following constraints is optimal. (1) The groundwater level in the excavation area is less than the given groundwater level. (2) The tip of salt water wedge is not over the salt water intrusion limit line.

Keywords: groundwater density flow, salt water wedge, optimal control

1. ま え が き

海岸付近での地下水の過剰揚水や、構造物の基礎掘削時の地下水位の低下工事により、地下塩水の内陸部への侵入が問題となっていて、海岸帯水層における地下水取水では、塩水障害を防御した計画が必要となる。

これまで、井戸揚水により発生する地下水障害の最適制御に関する研究には、各井戸の所要取水量を満足させながら、各井戸の水位低下量の総和を最小にする算定手法¹⁾、各井戸の所要揚水量と最低井戸水位を満足させながら揚水量の総和を最大にする算定手法^{2),3)}、与えられた総揚水量のもとに地盤沈下量の総和を最小にする取水方法⁴⁾等がある。しかし地下密度流の場での淡水注入による塩水侵入制御に関する最適手法の研究については具体的な例は見受けられない。

本報は、Fig. 1のように、海岸近くの構造物の基礎掘削部内の地下水位を、周囲に設定された揚水井により所

定の水位に低下させるとともに、海岸線に沿って並べた淡水注入井により、塩水くさび先端が、あらかじめ設定された塩水侵入限界線位置 l を越えさせないという条件の下に、揚水量と注水量の絶対値の和を最小とするものを最適注揚水状態と定義し、この解析を行ったものである。まず単純化したモデル領域について、流量ポテンシャルを用い理論的解析を行い、次に実地の領域について、理論的解析結果を利用し、有限要素法と線形計画法によって数値解析する手法を提示し、適用結果を検討している。

2. 定常地下密度流の解³⁾

Fig. 2に示す海岸帯水層の淡水注入時の定常流について考える。ここでは淡水と塩水との混合・拡散は無視できるものとし、また垂直流速は小さいものとして無視し、準一様流の式を適用する。 x_w を井戸地点、 x_c を塩水くさび先端位置、 x_l を塩水侵入限界線位置の x 座標とし、 k を透水係数、 ρ_f 、 ρ_s を淡水、塩水密度、 h を淡水層の厚さ、 ϕ を地下水頭、 q_x 、 q_y を x 、 y 方向の単位幅当たりの流量とする。また塩水くさび先端位置を境にして、海側を領域Ⅰ、陸側を領域Ⅱとし、 h_c 、 ϕ_c を塩水くさび先端位置の h 、 ϕ とする。さて h は一般に、

$$h = a\phi + b \dots \dots \dots (1)$$

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科
(〒812 福岡県福岡市箱崎)

** 正会員 工修 八代工業高等専門学校講師 土木建築工学科
(〒866 熊本県八代市平山新町)

*** 正会員 工博 九州大学助教授 工学部水工土木学科
(〒812 福岡県福岡市箱崎)

**** 正会員 工博 清水建設(株)技術研究所
(〒135 江東区越中島3-4-17)

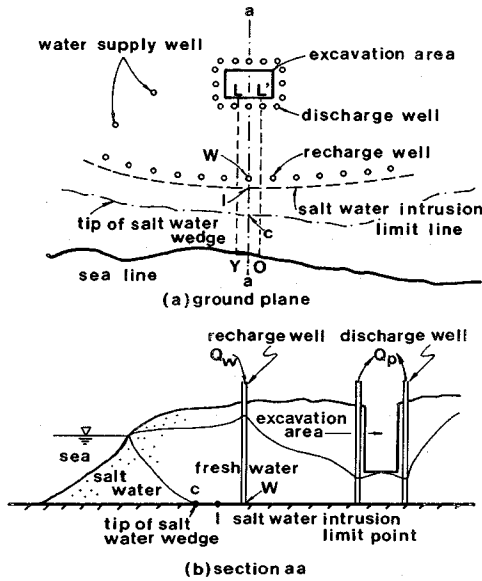


Fig. 1 Circumstances of groundwater flow by discharge and recharge wells.

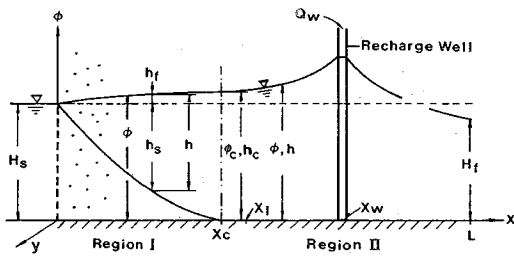


Fig. 2 Analytical region of unconfined groundwater.

で表わされる。

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \text{領域 I} \quad & a = \rho_s / (\rho_s - \rho_f), \\ & b = -\rho_s H_s / (\rho_s - \rho_f) \\ \text{領域 II} \quad & a = 1, b = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

次に、次式で示される Φ を考える。

$$\Phi = [1/(2a)](a\phi + b)^2 + C \dots\dots\dots (3)$$

Φ については、領域 I, II のいずれでも次式が得られる。

$$q_x = -k\partial\Phi/\partial x, \quad q_y = -k\partial\Phi/\partial y \dots\dots\dots (4)$$

したがって、連続の式から次の基礎方程式が得られる。

$$\partial(k\partial\Phi/\partial x)/\partial x + \partial(k\partial\Phi/\partial y)/\partial y + \sum Q_w \delta(x-x_w)\delta(y-y_w) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 x_w, y_w は井戸 W の x, y 座標、 Q_w は井戸 W の注水量または揚水量（注水量を正）、 $\delta(x), \delta(y)$ はデルタ関数である。ここでは Φ を流量ポテンシャル⁵⁾ とよぶことにする。

式 (5) は浸透流の基礎方程式であり、 Φ に関する境界条件を与えれば解くことができる。すなわち式 (3)

で定義した流量ポテンシャル Φ を用いることにより、塩水くさびの侵入域と非侵入域とを一括して解析でき、また、これによって以下に述べる最適の注揚水に関する理論解および数値解を可能にしたものとする。

次に、式 (3) の定数 C を、領域 I, II に対して、それぞれ C_I, C_{II} とする。まず $\phi = H_s$ で $\Phi = 0$ とすれば、 $C_I = 0$ が得られる。次に、 C_{II} は領域 I, II の境界で、領域 I, II の Φ が等しくなる条件から求められる。この結果、式 (3) における C は、

$$\left. \begin{aligned} \text{領域 I} \quad & C_I = 0 \\ \text{領域 II} \quad & C_{II} = -(1/2)H_s^2 \rho_s / \rho_f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

式 (6) の定数をもつ Φ は、領域 I の海水に接する境界 $\phi = H_s$ で、 $\Phi = 0$ とし、また領域 I と II との境界で Φ の値が連続するようにとった流量ポテンシャルである。

なお、塩水くさび先端位置での Φ_c は、式 (3) の ϕ に $\phi_c = H_s \rho_s / \rho_f$ を代入すれば、

$$\Phi_c = (1/2)H_s^2 \rho_s (\rho_s - \rho_f) / \rho_f^2 \dots\dots\dots (7)$$

本報は自由地下水について議論を進めるが、被圧地下水についても、これに応じた a, b を用いれば同様の取り扱いができる。なお流量ポテンシャルについての詳細は文献 3) を参照されたい。

3. モデル領域による最適注揚水の理論的解析

(1) 解析モデル

解析モデルを Fig. 3 に示す。これは、Fig. 1 に示すように、ある 1 つの注水井 W に着目して取り出した点線の長方形領域 OLL'Y であり、注水井間の中央で区切った流れ方向の直線、これに直角にとった直線に近似させた海岸線と掘削部の辺とで囲まれた領域である。注水井位置は $x_w, y_w (= Y/2)$ とし、境界条件としては、B1 の水位 H_s には海水位、境界 B2 の淡水位 H_f には掘削部周辺の水位（低下工事による掘削部内の水位）を与え、掘削部周辺に矢板を打つ場合は矢板の外周の水位を与える。また、B3, B4 は不透水壁とする。このような境界条件で得られる B2 への流出量が、すなわち揚水井の揚水量と考え、揚水井の存在は本理論解析には、特に取り入れないことにする。

(2) 注水井をもつ海岸地下水の流れの流量ポテンシャル

Fig. 3 のような海岸地下水領域において、境界 B1 と B2 間の平行流に井戸からの注水がかかる場合の流れの流量ポテンシャルを求める。まず、B1B2 間の平行流のみの流量ポテンシャルは、単位幅当たりの流量を q_0 (x の + 方向を+) とすれば、領域 I, II のいずれでも、 $q_0 = -k\partial\Phi/\partial x \dots\dots\dots (8)$

$$\therefore k\Phi = -q_0 x \dots\dots\dots (9)$$

ここでは、 $x=0$ で $\phi = H_s$ すなわち $\Phi = 0$ として、積分

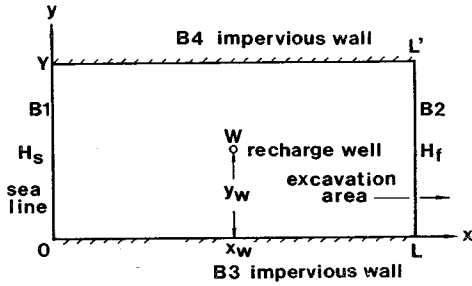


Fig. 3 Analytical model.

定数を0としている。このような Φ を用いることは、式(6)の定数を用いていることになる。ここに q_0 は境界 B2 で $\phi = H_f$ すなわち $\Phi = -(H_s^2 \cdot \rho_s / \rho_f - H_f^2) / 2$ を式(9)に用いて、

$$q_0 = k(H_s^2 \rho_s / \rho_f - H_f^2) / (2L) \dots \dots \dots (10)$$

次に、注水井が1個ある場合の流量ポテンシャルを求め、 Q_w を注水量(注水を正)とすれば、

$$Q_w = -2\pi r k d \Phi / dr \dots \dots \dots (11)$$

$$\therefore k \Phi = -(Q_w / 2\pi) \ln r + C \dots \dots \dots (12)$$

いま、Fig. 3で、B1, B3, B4の境界条件は図示になるように、またB2の水位は H_s すなわちB2で $\Phi = 0$ となるように、上記の井戸の重ね合せを行えば、井戸番号を i として、

$$\begin{aligned} k \Phi = & -(Q_w / 2\pi) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \ln r_i \\ & + (Q_w / 2\pi) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \ln r_i' \\ & + (x/L)(Q_w / 2\pi) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \ln (r_i)_B \\ & - (x/L)(Q_w / 2\pi) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \ln (r_i)_B \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

不透水壁の条件を満たすには、その不透水壁を中心として対称の位置に同じ注水井を配置すればよい。右辺第1項は境界 B3, B4 がともに不透水壁であり、これら両壁について対称の位置に注水井を配置する必要から、 y 軸の+, 一方向に無限数の配置となったものである。次に、右辺第2項は境界 B1 で、 $\Phi = H_s$ すなわち $\Phi = 0$ の一定値をもつ条件から、B1 に対して対称に上記の注水井と同じ流量の揚水井 i' を設けたものである。また右辺第3項と第4項は、境界 B2 で $\Phi = 0$ の一定値をもたせるためのもので、第3項は第1項のB2上での値を差引き、またこの影響がB1上に及ばないように x/L 倍した近似的操作による項である。第4項は同様にB2上での第2項の影響を差引いた近似項である。

また、 r_i, r_i' はそれぞれ井戸 i, i' から Fig. 3の領域内の任意点までの距離で、 $(r_i)_B$ および $(r_i')_B$ は井戸 i および i' から境界 B2 上の任意点までの距離である。

なお式(13)では、境界 B1, B2 で $\Phi = 0$ の条件から積分定数を0としている。

次に、式(9)と式(13)を重ね合わせ、直角座標軸で示すと式(14)となる。これは Fig. 3のように注水量 Q_w の井戸があり、境界 B1 の $\Phi = H_s$ すなわち $\Phi = 0$ 、B2 の $\phi = H_f$ すなわち $\Phi = (1/2)(H_s^2 - H_s^2 \rho_s / \rho_f)$ 、B3, B4 を不透水壁とする領域内の求める流量ポテンシャルの近似式である。

$$k \Phi = -q_0 x - (Q_w / 2\pi) F(x, y, x_w, y_w, L) \dots \dots \dots (14)$$

$$\begin{aligned} F = & \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\ln \left[\frac{\sqrt{(x' - x_w)^2 + |y - (2i-1)y_w|^2}}{\sqrt{(x+x_w)^2 + |y - (2i-1)y_w|^2}} \right] \right. \\ & \left. - (x/L) \ln \left[\frac{\sqrt{(L-x_w)^2 + |y - (2i-1)y_w|^2}}{\sqrt{(L+x_w)^2 + |y - (2i-1)y_w|^2}} \right] \right] \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

(3) 注水量最小時の塩水侵入阻止の流況

領域内の流れの流量ポテンシャルの等高線は井戸 W を囲んで、Fig. 4 (Fig. 3の井戸から下半分の図) のようになり、注入水は WS (S はよどみ点) を境界として、海側と陸側に分れる。このとき S の x 軸上の位置 x_s は、 $H_s = H_f$ のときは、ほぼ x_w となり、 H_f が H_s より低下してゆくにつれ、 x_s は x_w より海側に移動してゆく。 x 軸上の流量ポテンシャルは、S 点を最高として海側と陸側に向かって減少する。ここでは、注水井間隔の中央部すなわち x 軸が、塩水侵入の危険性が最も大きいことから、 x 軸上での塩水くさび先端の挙動を検討することにする。

いまくさび先端の流量ポテンシャル Φ_c の値をもつ Φ の等高線が図の $a\alpha$ と βb のように x 軸で切断されているとする。ここで、 α を x 軸上の S 点より海側の Φ_c の値の位置と定義する。これは x 軸上のくさび先端位置である。また β を x 軸上の S 点より陸側の Φ_c の値の位置と定義する。これはくさび先端には関係のない点である。いまこの状態から Q_w を減少させると、 α, β はともに S 点に近づき、ついに S で一致する。 α が S に一致したとき、 β も S に一致する理由は、 x 軸上で S のポテンシャルが最高であることから肯定されよう。また、S は Q_w の減少につれ、海側に移動するが、その移動は比較的小さい。次に、さらに Q_w を減少させると、 Φ_c の等高線は $e_1 e_2 e_3$ のように、W 方向に縮少してゆく。この場合、 Φ_c は x 軸上には生ぜず、したがって x

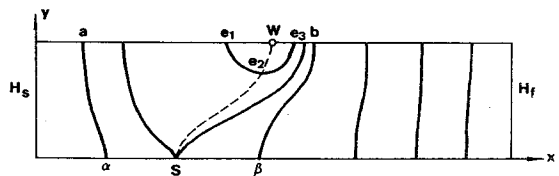


Fig. 4 Contour lines of discharge potential around recharge well.

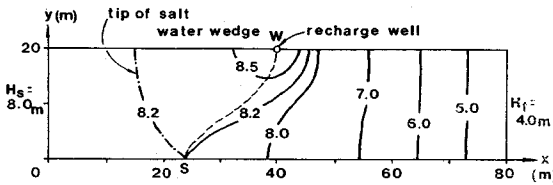


Fig.5 Contour of groundwater level and tip of salt water wedge.

軸上には塩水くさび先端は発生しなくて、塩水は陸側に侵入する。したがって、井戸 W 固定で、x 軸上にくさび先端が生じている状態すなわち塩水侵入が阻止されている状態で、注水量を最小にするくさび先端位置はくさび先端がよどみ点 S に一致したときといえる。このとき井戸の両側のできる Φ_c の等高線は S 点でちょうど閉じる。

Fig. 5 に、 $L=80\text{ m}$ 、 $Y=40\text{ m}$ 、 $k=3\times 10^{-4}\text{ m/s}$ 、 $\rho_f=1.0\text{ g/cm}^3$ 、 $\rho_s=1.025\text{ g/cm}^3$ 、 $x_w=40\text{ m}$ 、 $H_s=8.0\text{ m}$ 、 $H_f=4.0\text{ m}$ で塩水侵入阻止の状況下での注水量最小の状態すなわち最適注水量の状態の淡水位の等高線を示している。くさび先端位置の淡水位等高線 $\phi_c=8.2\text{ m}$ が x 軸上でちょうど閉じ、その位置がよどみ点となる。この場合、先端位置 $x_c=x_s=23.5\text{ m}$ 、注水量 $Q_w=745.2\text{ m}^3/\text{day}$ であった。

(4) 注揚水量と無次元化

前述のように、掘削部の揚水量 Q_p (負とする) を境界 B2 の流出量として求める。ここでは、Y が L に比べある程度小であれば、 $x=L$ 上の $\partial\Phi/\partial x$ の変化は小さいものと考えられ、この $\partial\Phi/\partial x$ の値として $x=L$ 、 $y=0$ の点の値を用いることにする。

$$Q_p = k \int_0^Y (\partial\Phi/\partial x|_{x=L}) dy = k(\partial\Phi/\partial x|_{y=0}^x=L) 2y_w$$

$$= -2y_w q_0 + (y_w/\pi) Q_w \partial F/\partial x|_{y=0}^x=L \dots\dots\dots (16)$$

ここで、たとえば $\partial\Phi/\partial x|_{x=L}$ は、 $\partial\Phi/\partial x$ の式中で $x=L$ とおいた値を意味し、この意味は以下同様とする。式 (16) から Q_p は Q_w の一次関数となる。

したがって、注水量と揚水量の絶対値の和 Q_T は、

$$Q_T = |Q_w| + |Q_p|$$

$$= 2y_w q_0 + Q_w [1 + (y_w/\pi) \partial F/\partial x|_{y=0}^x=L] \dots\dots\dots (17)$$

Q_w は式 (14) でくさび先端の位置 x_c で $\Phi = \Phi_c$ とおけば、

$$Q_w = -2\pi(q_0 x_c + k\Phi_c)/F|_{y=0}^x=x_c \dots\dots\dots (18)$$

ここで現象の一般化のため、次の無次元化を行う。

$$x/L = \xi, \quad y/L = \eta, \quad Q_T/Lq_0^* = \zeta_T$$

$$H_f/H_s = \theta, \quad \rho_s/\rho_f - 1 = \epsilon \dots\dots\dots (19)$$

ここに、

$$q_0^* = kH_s^2(\rho_s/\rho_f)/(2L) \dots\dots\dots (20)$$

ここで $x_c/L = \xi_c$ のように、 x 、 y 、…に添字がついた値

について、その添字を ξ 、 η 、…の添字にそのまま用いて無次元量を表わすことにする。

式 (19) を式 (17) に用いれば、

$$\zeta_T = 2\eta_w \gamma + \zeta_w [1 + (\eta_w/\pi) \partial \Gamma/\partial \xi|_{\eta=0}^{\xi=\xi_c}] \dots\dots\dots (21)$$

ここに、

$$\gamma = q_0/q_0^* = 1 - \theta^2/(1 + \epsilon) \dots\dots\dots (22)$$

また式 (18) から、

$$\zeta_w = -2\pi(\gamma\xi_c + \epsilon)/\Gamma|_{\eta=0}^{\xi=\xi_c} \dots\dots\dots (23)$$

Γ は式 (15) の F の式を無次元化したもので、

$$\Gamma = \sum_{i=0}^{\infty} \{ \ln [\sqrt{(\xi - \xi_w)^2 + \{ \eta - (2i-1)\eta_w \}^2} / \sqrt{(\xi + \xi_w)^2 + \{ \eta - (2i-1)\eta_w \}^2}] - \xi \ln [\sqrt{(1 - \xi_w)^2 + \{ \eta - (2i-1)\eta_w \}^2} / \sqrt{(1 + \xi_w)^2 + \{ \eta - (2i-1)\eta_w \}^2}] \} \dots\dots\dots (24)$$

式 (21) のように、注揚水量 ζ_T は ϵ 、 η_w 、 θ 、 ξ_c および ξ_w の関数で表示できる。この ζ_T を最小にする状態が最適注揚水状態である。この場合、 ϵ 、 η_w 、 θ が与えられた状態で、 ξ_w を固定し ξ_c を動かすか、 ξ_c を固定し ξ_w を動かして得られる最小の ζ_T を ζ_{Tp} とし、また ξ_w 、 ξ_c をともに動かして得られる最小の ζ_T を ζ_{Tm} とする。 ζ_{Tm} は ζ_{Tp} のうちのさらに最小の値である。以下これらを求めてみよう。

(5) ξ_w 固定の最適注揚水

式 (21) の ζ_w に式 (23) を入れ、 ϵ 、 η_w 、 θ 、 ξ_w を一定として、 $\partial\zeta_T/\partial\xi_c = 0$ を求めると、

$$\gamma \Gamma|_{\eta=0}^{\xi=\xi_c} - (\gamma\xi_c + \epsilon) \partial \Gamma/\partial \xi_c|_{\eta=0}^{\xi=\xi_c} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

式 (25) から得られる ξ_c は ξ_w を固定した場合で、塩水侵入を阻止できる ζ_T のうち最小の ζ_T のとき (最適注揚水時) のくさび先端位置である。また式 (25) は式 (23) を ξ_c で偏微分し 0 とおいた式と一致することより、式 (25) から得られる ξ_c は 3. (3) で考察したように、x 軸上のくさび先端がちょうどよどみ点に一致するときのよどみ点の位置を示している。式 (25) の ξ_w に対する ξ_c の関係曲線を 2 種類の θ について求めたものが Fig. 6, 7 の ACB 線である。またこのときの注揚水量 ζ_{Tp} は式 (21) から求められ、これを Fig. 6, 7 の A'C'B' に示している。

さて Fig. 4 で述べたように、ある ξ_w に対し、 ξ_w の減少による α 、 β の移動は Fig. 6 に示す垂直な adb 線上で生じ、 α は a から d へ、 β は b から d へ進み ACB 線上の点 d (Fig. 4 の S 点) で α と β は一致し、このとき ξ_w したがって ζ_T は最小となる。したがって db 線の範囲すなわち ACB 線より上側の範囲は β の範囲で、これはくさび先端ではないことから除外する。また ACB 線より下側の範囲の任意点の ξ_w 、 ξ_c は井戸位置とくさび先端 α の位置を示し、そのときの注揚水量は式 (21) から求められる。このときのくさび先端はよどみ点とは一致しない。

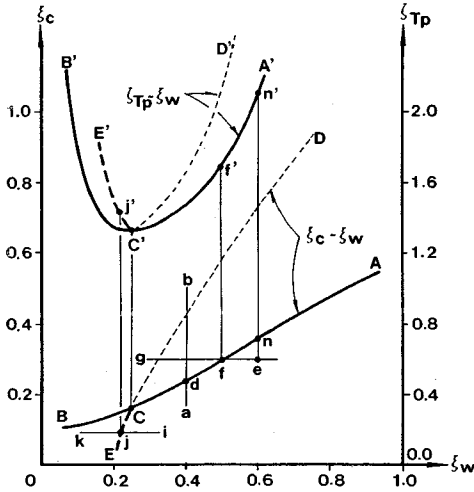


Fig. 6 Optimal recharge and discharge in case of fixed ξ_w or ξ_c . ($\epsilon=0.025, \eta_w=0.25, \theta=0.5$)

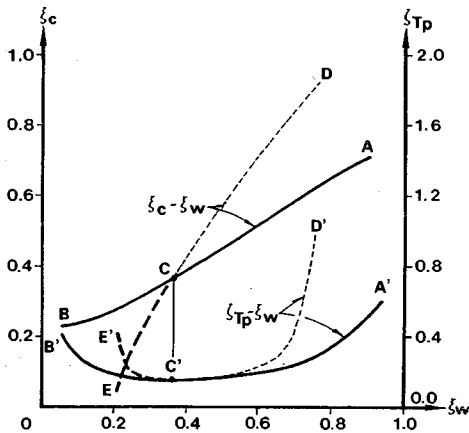


Fig. 7 Optimal recharge and discharge in case of fixed ξ_w or ξ_c . ($\epsilon=0.025, \eta_w=0.25, \theta=1.0$)

次に、Fig. 6とFig. 7を比較すると、 θ の小さいFig. 6は θ が大きいFig. 7に比べて、 ξ_w の変化による最適注揚水量A'C'B'線(ξ_{Tp})の変化率が大きく、また全般的に最適注揚水量が大きいといえる。

(6) ξ_c 固定の最適注揚水

$\epsilon, \eta_w, \theta, \xi_c$ を一定として、式(21)から $\partial \xi_{Tp} / \partial \xi_w = 0$ を求めれば、

$$\{1 + (\eta_w / \pi) \partial \Gamma / \partial \xi \Big|_{\xi=\xi_c} \} \partial \Gamma / \partial \xi_w \Big|_{\xi=\xi_c} - (\eta_w / \pi) \partial (\partial \Gamma / \partial \xi \Big|_{\xi=\xi_c}) / \partial \xi_w \Big|_{\xi=\xi_c} = 0 \dots \dots \dots (26)$$

式(26)により算出される ξ_c に対する ξ_w の位置をFig. 6, 7のDCE線に示している。またこの ξ_c, ξ_w を式(21)に与えて得られる ξ_r と ξ_w との関係をD'C'E'線に示している。

いま ξ_c を固定して、 ξ_w を移動させた場合を、Fig. 6に表示したefg線について考察すると、くさび先端 α の

位置 ξ_c をefg線に固定し、井戸の位置 ξ_w をeからfに向かって海側に動かすと、よどみ点をはさんで陸側に生ずる β は ξ_w の移動につれてよどみ点すなわちFig. 6ではACB線に近づき、ACB線上の点fで α と β とは一致する。いまe点とf点の注揚水量を比較しよう。e点に立てた垂直線がACB線と交わる点をnとすれば、(e点の注揚水量) > (n点の注揚水量 (図のn'))、さらにnとfに対応するA'C'B'線上の流量を比較すれば、(n点の注揚水量 (n')) > (f点の注揚水量 (f'))。したがって、(e点の注揚水量) > (f点の注揚水量)である。次にfを過ぎ、gに向かって ξ_w が移動すると、ACB線の上側の領域に入り、この場合の ξ_c は β の位置を表わしていて、 β を固定して ξ_w を移動する場合になり、題意にそぐわないのでfgは除外する。したがって、 ξ_c を固定し、 ξ_w を移動させた場合すなわちefg線上での注水量最小の ξ_w の点はfとなる。以上により、CD線とC'D'線は除外され、ACB線とDCE線との交点Cより右側の範囲では、最適注揚水状態は ξ_w 固定の場合と同様AC線となり、このときの注揚水量はA'C'線となる。次に、C点の左側では、CE線はACB線の下側にくる。この場合は、CE線での ξ_c はくさび先端位置を示すもので、CE線は有意の線となり、このときの注揚水量は式(21)から得られ、C'E'線となる。すなわち、図の ξ_c 固定のijk線ではCE線との交点j点が最適注揚水状態を示す ξ_w の点となり、この場合の注揚水量 ξ_{Tp} はj点で示される。なおCE線上では α と β は一致しない。

(7) ξ_w, ξ_c に制約のない場合の最適注揚水

与えられた境界条件のもとで、 ξ_w, ξ_c に制約がない場合の注揚水量最小の場合を求めてみよう。この場合の ξ_w, ξ_c は $\partial \xi_r / \partial \xi_c = 0$ と $\partial \xi_r / \partial \xi_w = 0$ すなわち式(25)と式(26)を連立させて求められる。その値はFig. 6, 7のACBとDCB線の交点Cの ξ_w, ξ_c となり、そのときの注揚水量はA'C'B'線の最小値C'点で示される。これは塩水侵入限界線と注水井の位置に制約がない場合で、領域での可能な最小注揚水量 ξ_{rm} を示し、この状態をここでは無制約最適注揚水量状態とよぶことにする。いま $\epsilon=0.025$ とし、各 η_w, θ に対して、無制約最適注揚水時の ξ_w, ξ_c (ξ_{wm}, ξ_{cm} と記す)およびそのときの注揚水量を求めると、Fig. 8となる。この図によると、 $\theta = H_r / H_s$ の減少につれて、 ξ_{wm} または ξ_{cm} は減少するが、その減少率は θ がほぼ0.8以下では比較的小さく、ほぼ $\xi_{wm}=0.30 \sim 0.24, \xi_{cm}=0.22 \sim 0.14$ 程度である。このように無制約最適注揚水状態の注水井位置がほぼ固定した値をもつことは興味があり、注水井位置の設定にあたり有用なことである。また θ の減少につれ、 ξ_{wm} と ξ_{cm} との差がやや大きくなる。またほぼ $\theta > 0.9$ では θ の増大につれ ξ_{wm} および ξ_{cm} の値は急激に大きくなる。

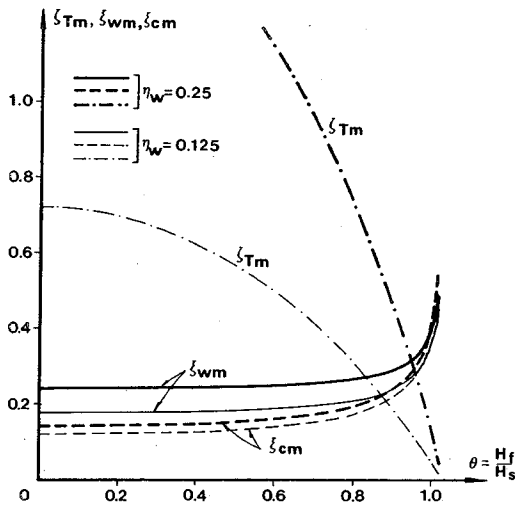


Fig. 8 Non limited optimal recharge and discharge.

次に θ の減少につれ ξ_{Tm} はかなり大きい割合で増大する。次に η_w の増大につれ、 ξ_{wm} 、 ξ_{cm} 、 ξ_{Tm} は増加し、特に ξ_{Tm} の増加は著しい。

(8) ξ_w 、 ξ_c に許容範囲がある場合の最適注揚水

ここでは地形、利水上の観点から ξ_w と ξ_c に許容の範囲が指定される場合の最適注揚水状態を求めてみよう。ここで ξ_c の許容範囲が与えられているということは侵入限界線位置 ξ_f が与えられていることに相当する。

まず Fig. 3 のような領域が与えられたとして、これに対する η_w 、 θ に対して Fig. 8 より無制約最適注揚水状態を求め、この ξ_{wm} と ξ_{cm} が注水井の設定可能範囲と、与えられた塩水侵入限界線に対し、許容できればこれを採用すればよい。また、もしこれが許容できない場合は次のようにして、最適注揚水状態を求める。たとえば Fig. 9 (Fig. 6, 7 に対応した説明図) で ξ_w が a~b の範囲で設置可能とし、また cd 線が塩水侵入限界線の位置とし、したがって ξ_c が cd 線より下側で許容されるとすれば、 ξ_w 、 ξ_c の許容範囲は図のハッチで示される abcd の内部となる。ここでは、このように、 ξ_w 、 ξ_c の許容範囲が与えられたときの最適の注揚水時の ξ_w と ξ_c およびそのときの注揚水量を求めることを考えよう。この場合、まず C 点が最も最適で、次いで ACB 線および CE 線が最適となり、また ACB 線より上の部分は除外されることを基本事項として考えていく。

与えられた許容範囲について、最適状態の ξ_w 、 ξ_c とそのときの注揚水量の決定法を Fig. 9 に例示して述べると次のようになる。

(1) まず許容範囲が C を含むとき (Fig. 9 の (1) の範囲) は C が最適。その注揚水量は C'。この値は、Fig. 8 の値と同じである。

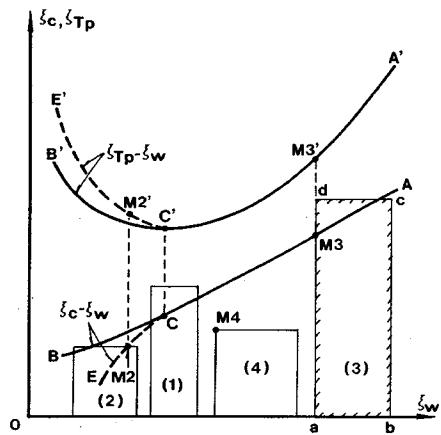


Fig. 9 Selection of optimal recharge and discharge.

(2) C を含まないときで、範囲を示す水平線が CE 線を切る部分があるとき (図の (2)) は、その交点 M2 が最適。注揚水量は M2'。

(3) 上記以外で、範囲を示す垂直線が ACB 線を切る部分があるとき (図の (3)) は、C に近い垂直線が ACB 線を切る点 M3 が最適。注揚水量は M3'。

(4) 上記以外すなわち範囲が ACB、CE 線を含まないとき (図の (4)) は範囲の隅角部の点のうちまず CE 線または AC 線に近い点 M4 が最適。その注揚水量は M4 の ξ_w 、 ξ_c を式 (21) に入れて求まる。

以上により、最適の判定が不明確な点が数点生じた場合は、それら比較の点の注揚水量を式 (21) から求め、その量の小さい方をとればよい。

このような最適注揚水状態の選定にあたっては、Fig. 8 で述べたほど $\theta < 0.2$ では ξ_{wm} はほぼ 0.30~0.24 となること、および Fig. 6, 7 を比較し前述したように、 θ が小になると、 ξ_w に対する最適注揚水量 ξ_{Tp} の変化率が大きくなるので、 ξ_w の選定に注意が必要となることは参考になると考える。

4. 実領域の塩水侵入制御の数値解析

(1) 概 説

Fig. 10 に示す福岡市北部の西戸崎地区に、下水処理場が計画され、この基礎工事期間中の掘削部の汲出しによる周辺地下水位の低下と掘削部に近い海岸線からの塩水侵入が問題となった。ここではこの実領域について、侵入限界線と注水井の位置に制約を与えない無制約最適注揚水状態の数値解析を行うことにする。基本方針として、まず注水井間隔を与えて、Fig. 10 の点線で示すような適当に選んだ数個の長方形領域について、Fig. 8 より無制約最適注揚水状態の侵入限界線位置と注水井位置を求め、これから実領域内に侵入限界線と注水井列を設

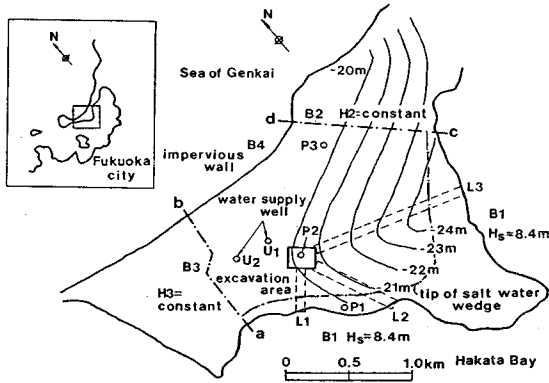


Fig. 10 Analytical region.

定し、これに有限要素法と線形計画法を適用して、実領域における無制約最適注揚水状態の塩水くさび先端位置と各注揚水井の注揚水量を求めるものである。以下この計算手順に従って述べることにする。

(2) 解析領域と計算条件

解析領域は Fig. 10 のように淡水位の与えられた境界 ab, cd および博多湾、玄海灘に囲まれた面積約 3 km² の領域である。U1, U2 は住民の生活用水井であり、実線は基礎岩盤の等高線である。また、P1, P2, P3 は地質調査用ボーリング位置で、この地質柱状図から概略推定した地質断面図を Fig. 11 に示している。地表面より砂層、シルト混じり砂層、シルト層より構成され、岩盤は平均海面下約 20 m の位置にある。ここでは、シルト層を難透水層として、近似的に全領域で平均海面下 8.4 m の水平な面を不透水層上面とする。また透水係数として、地質調査結果から全領域にわたって $k=3.0 \times 10^{-4}$ m/s を用いる。境界条件は Fig. 10 のように B1 は海水位 $H_s=8.4$ m, B2, B3 の淡水位 H_2, H_3 は地下水位等高線から得られる水位(境界線上で場所的に変化している)を時間的に一定として与え、また B4 は岩盤が露出していることから不透水壁とする。また掘削部内の工事中の水位は 1.4 m である。ここでは掘削部周辺に矢板の打設がない場合 (Case 1) とある場合 (Case 2) について考える。本掘削部では、矢板を打つ場合、不透水層中に打込まれることになっているので、ここでは矢板相互の継目からの漏水を考える。これには永岡⁷⁾ の

実地のモデル実験があり、これを参照して、その比透水係数を 0.50×10^{-6} (1/s) とし、有限要素法の計算にあたっては、Fig. 12 の斜線部を矢板と同じ透水性をもつ難透水壁に置換して考えることにし、この難透水壁の厚さ δ を 15 m とし、したがってその透水係数 k_2 を $k_2 = 0.50 \times 10^{-6} \times 15 \text{ m/s} = 7.5 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ とした。なお、Fig. 10 に地下水位低下工事前の上述の境界条件のもとで、数値解析した塩水くさび先端位置を示している。

(3) 塩水侵入限界線と注水井位置の決定

ここでは、無制約最適注揚水状態を考慮して、侵入限界線と注水井の位置を次のように定める。すなわち Fig. 10 に示すような適宜とった L1, L2, L3 の点線の 3 個の長方形領域をとる。すなわち詳しくは Fig. 13 の L1, L2, L3 の位置について述べると、まず注水井間隔を No.1~No.15 まで 120 m, No.16~No.20 までを 160 m と定めて、注水井 1 個を含む近似的な長方形領域を作成し、 H_f としては、Case 1 (矢板なし) では掘削部内水位をとり $H_f=1.4$ m とし、Case 2 (矢板あり) では矢板の外側 (Fig. 12 のハッチの外側)、この水位には Fig. 12 のハッチ部の透水係数から算定して $H_f=8.0$ m を与え、その他 Fig. 3 のモデル領域の緒言を定め、Fig. 8 から ξ_{um}, ξ_{cm} を求める。こうして得られた 3 個の長方形領域での ξ_{um} を連ねたものを Fig. 13 中に図示している Case 1 および Fig. 14 中の Case 2 の丸印の注水井例として示している。また得られた 3 個の長方形領域での ξ_{cm} を数値計算では侵入限界線位置 ξ_i に用い、これらを結んだものを Fig. 13 中の Case 1 および Fig. 14 中の Case 2 の点線の侵入限界線として示している。なお Fig. 13 に図示している Case 1' は図の Case 1 の注水井と侵入限界線の相対的位置をそのままにして陸側へ 50 m 移動させたもので、また Fig. 14 の Case 2',

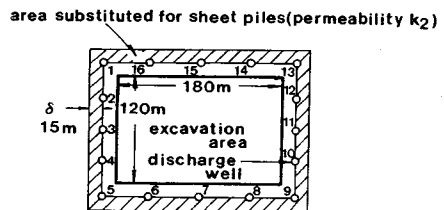


Fig. 12 Excavation area and arrangement of discharge wells with sheet piles.

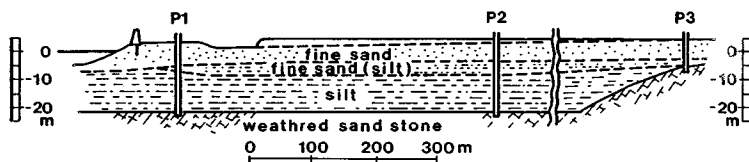


Fig. 11 Geologic column section.

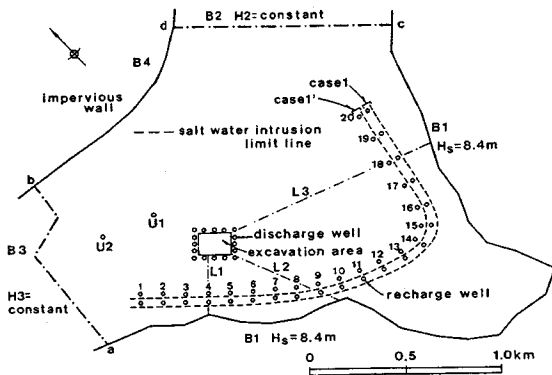


Fig. 13 Location of salt water intrusion limit line and recharge wells (case 1).

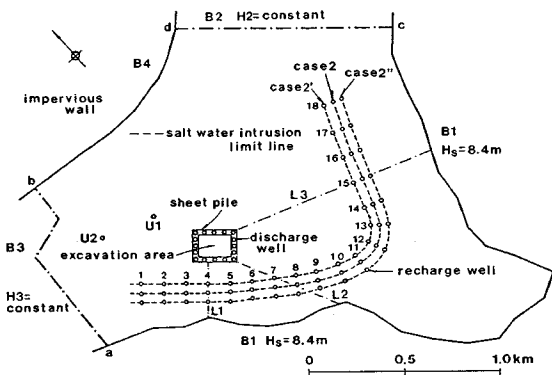


Fig. 14 Location of salt water intrusion limit line and recharge wells (case 2).

Case 2" は Case 2 をそのままそれぞれ陸側と海側へ 50 m 移動させたもので最適状態との比較を行うため設定したものである。

(4) 有限要素法と線形計画法の適用

以上のようにして設定された解析領域について、各注揚水位、用水井位置および侵入限界線と掘削部周辺の点を節点とし、これを制約条件をもつ節点とする。またその他領域の内部と境界上に適宜節点を設けて、三角形要素に分割し、式 (5) を有限要素法を用いて離散化すると

$$A\Phi + Q = 0 \dots\dots\dots(27)$$

次に流動ポテンシャル Φ を 3 つに分割し、 Φ_1 を制約条件をもつ節点、 Φ_2 を領域内任意節点、 Φ_3 を境界節点の各流量ポテンシャルとすると、式 (27) は、

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(28)$$

Φ_3 を境界条件より既知とし、式 (28) の第 1, 第 2 式から Φ_2 を消去し、 Φ_1 に関する式を求めると、

$$Q_i = B\Phi_i + C \dots\dots\dots(29)$$

いま、 Φ_i 、 Q_i をさらに分割し、注水井節点に i 、侵入限界線上の節点に l 、用水井戸節点に u 、掘削部周りの揚水井節点に p 、掘削部周辺の節点に k を、それぞれ Φ 、 Q の添字としてつける。

次に、これらの制限値をそれぞれ Φ_i^* 、 Φ_l^* 、 Φ_u^* 、 Φ_p^* および Φ_k^* とし、次のように与える。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i^* &= (1/2)H_s^2 \cdot \rho_s(\rho_s - \rho_f) / \rho_f^2 \\ \Phi_l^* &= (1/2)H_s^2 \cdot \rho_s(\rho_s - \rho_f) / \rho_f^2 \\ \Phi_u^* &= (1/2)(\phi_u^{*2} - H_s^2 \rho_s / \rho_f) \\ \Phi_p^* &= (1/2)(\phi_p^{*2} - H_s^2 \rho_s / \rho_f) \\ \Phi_k^* &= (1/2)(\phi_k^{*2} - H_s^2 \rho_s / \rho_f) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

ここで、 Φ_i^* 、 Φ_l^* 、 Φ_u^* および Φ_p^* 、 Φ_k^* はそれぞれの節点の低限界値（この値以下にはならないとする制限値）で、ここでは $\phi_u^* = \phi_p^* = 0$ を与える。また Φ_i^* 、 Φ_l^* にはくさび先端位置のポテンシャルを表す式 (7) を用いている。次に Φ_u^* および Φ_p^* はその節点の高限界値で、 $\phi_k^* = 1.4$ m を与える。

次いで、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i' &= \Phi_i - \Phi_i^*, \quad \Phi_l' = \Phi_l - \Phi_l^* \\ \Phi_u' &= \Phi_u - \Phi_u^*, \quad \Phi_p' = \Phi_p - \Phi_p^* \\ \Phi_k' &= -(\Phi_k - \Phi_k^*) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

とおくと、式 (29) は、

$$\begin{aligned} [Q_i \ Q_l \ Q_u \ Q_p \ Q_k]^T \\ = [B][\Phi_i' \ \Phi_l' \ \Phi_u' \ \Phi_p' \ \Phi_k']^T \\ + [B][\Phi_i^* \ \Phi_l^* \ \Phi_u^* \ \Phi_p^* \ \Phi_k^*]^T + C \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

したがって、与えられた制約のもとで注水量と揚水量の絶対値の総和を最小とする最適注揚水問題の目的関数は、

$$f = \sum_{i=1}^I |Q_i| + \sum_{p=1}^P |Q_p| \dots\dots\dots(33)$$

ここで、 I は注水井戸の総数、 P は揚水井戸の総数である。また制約条件は、

$$\left. \begin{aligned} Q_i \geq 0, \quad Q_l = 0, \quad Q_u = Q_{ur} \\ Q_p \leq 0, \quad Q_k = 0 \\ \Phi_i' \geq 0, \quad \Phi_l' \geq 0, \quad \Phi_u' \geq 0 \\ \Phi_p' \geq 0, \quad \Phi_k' \geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

ここで、 Q_{ur} は用水井戸からの与えられた汲上げ量である。

式 (33) は式 (32) からわかるように、 Φ' に関する一次式であり、同様に式 (34) は Φ' に関する一次の不等式または等式で表わされる。したがって、シンプレックス法⁶⁾を用いて、式 (34) の制約条件のもとで式 (33) の目的関数を最小にする Φ' 、したがって Φ を求めることができ、領域内の淡水位、くさび先端位置が得られる。次いで、これらの Φ を用いて、式 (29) から最適の注水量 Q_i と揚水量 Q_p が得られる。これがすなわち最適注揚水量である。

(5) 数値解析の結果と検討

以上の手順に従って数値解析を行った結果を Fig. 15, 16 および Table 1, 2 に示す。Fig. 15, 16 は Case 1, Case 2 の地下水位等高線を示し, Table 1, 2 は各注揚水井の注水, 揚水量を示している。

Fig. 15, 16 では, くさび先端位置を示す $\phi_c=8.61\text{ m}$ の等高線を一点鎖線で示している。また注水井の間隔のほぼ中央部で, 海側と陸側の $\phi_c=8.61\text{ m}$ の等高線がほぼ一致し, この点が前述のようによどみ点であると考えられる。また Table 1, 2 から, Case 1 は Case 1' より, また Case 2 は Case 2', Case 2'' より, 注揚水の合計が小になっている。以上により, Case 1, 2 はほぼ満足な最適注揚水状態を示していると推定される。

これらのことより, 本数値解析手法は複雑な境界をもつ実地の塩水制御の最適注揚水の算定に有用なものと考えられる。また Fig. 15, 16 および Table 1, 2 を比較して, 掘削部の周囲に矢板が設定される場合掘削部周辺の地下水位の低下が著しくおさえられ, また注揚水量は顕著に減少することが示されていて, 矢板設置の効果をみ

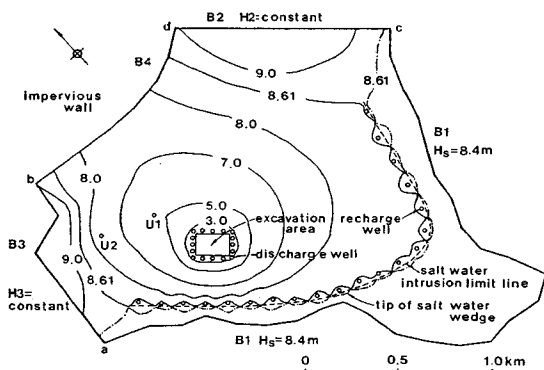


Fig. 15 Contours of groundwater level by recharge and discharge wells with no sheet pile (case 1).

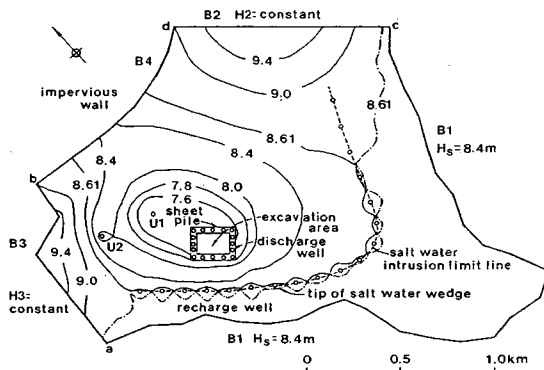


Fig. 16 Contours of groundwater level by recharge and discharge wells with sheet pile (case 2).

ることができる。本数値結果は, 塩水侵入限界線と注水井位置に制約を与えない無制約最適注揚水状態であり, 各井戸の注揚水量はこの領域での塩水阻止の最小値と考えられる。次に注水井の両側の $\phi_c=8.61\text{ m}$ の等高線が, 注水井の間隔の中央部でほぼ一致し, 塩水阻止の状態となっていることを考えると, 実地では, これに塩水阻止上の安全性を考えて注水量をやや増加させる必要があると考えられる。

(6) 塩水侵入限界線または注水井位置に制約をもつ場合の数値解

以上は塩水侵入限界線と注水井位置に制約がない場合

Table 1 Recharge and discharge rate (Case 1, 1' with no sheet pile).

well No.	recharge well		well No.	discharge well	
	recharge rate(m ³ /d)			discharge rate(m ³ /d)	
	Case 1	Case 1'		Case 1	Case 1'
1	280.6	285.4	1	94.8	107.0
2	222.9	222.1	2	251.9	261.6
3	433.7	563.3	3	26.0	1.3
4	434.8	496.5	4	287.4	305.6
5	470.1	624.7	5	325.0	399.4
6	305.3	338.3	6	392.6	438.1
7	291.2	324.4	7	94.3	141.5
8	122.2	91.5	8	402.0	449.6
9	171.0	153.5	9	356.1	432.6
10	99.9	49.9	10	301.4	317.2
11	91.2	93.5	11	10.2	20.0
12	29.9	20.5	12	279.7	286.5
13	32.9	39.5	13	178.8	192.7
14	30.2	7.3	14	288.0	293.0
15	32.1	43.1	15	0.0	0.0
16	40.7	13.0	16	271.1	275.8
17	77.2	76.7	-	-	-
18	53.9	41.3	-	-	-
19	83.0	90.7	-	-	-
20	24.0	19.8	-	-	-
total	3327.5	3586.7	total	3532.4	3921.7
total of recharge and discharge rate(m ³ /d)					
(Case 1) 1)+3)=6859.9			(Case 1') 2)+4)=7508.4		

Table 2 Recharge and discharge rate (Case 2, 2', 2'' with sheet pile).

well No.	recharge well			well No.	discharge well		
	recharge rate(m ³ /d)				discharge rate(m ³ /d)		
	Case2	Case2'	Case2''		Case2	Case2'	Case2''
1	49.0	73.3	32.2	1	11.7	12.8	10.8
2	141.9	115.7	148.8	2	100.1	101.7	98.9
3	120.6	170.1	136.6	3	0.0	0.0	0.0
4	192.0	171.3	155.8	4	102.4	104.4	100.9
5	119.1	179.6	140.9	5	18.4	20.6	16.8
6	127.4	80.4	109.2	6	114.6	121.5	109.7
7	39.9	63.7	66.3	7	0.0	0.0	0.0
8	74.1	53.8	57.1	8	115.5	122.1	110.7
9	18.7	21.9	52.0	9	20.3	22.2	18.9
10	53.3	35.1	54.0	10	106.3	107.9	105.0
11	7.4	7.3	16.0	11	0.0	0.0	0.0
12	27.9	20.2	33.7	12	105.3	106.6	104.2
13	5.3	2.5	8.7	13	18.1	19.0	17.3
14	30.7	31.1	31.3	14	99.6	101.7	97.9
15	11.2	7.4	16.3	15	0.0	0.0	0.0
16	0.0	0.0	0.0	16	96.4	98.7	94.6
17	0.0	0.0	0.0	-	-	-	-
18	0.0	0.0	0.0	-	-	-	-
total	1018.3	1033.2	1058.6	total	908.6	939.2	885.8
total of recharge and discharge rate(m ³ /d)							
(Case 2) 1)+4)=1926.9			(Case 2') 2)+5)=1972.4			(Case 2'') 3)+6)=1944.5	

すなわち無制約最適注揚水状態の数値解であるが、次にこれらに制約がある場合について述べよう。この場合も同様に、Fig. 10のL1, L2, L3のように、長方形領域をとり、これに、侵入限界線または注水井の位置の許容範囲を与えて、Fig. 9 (実際にはFig. 6, 7など)を用いて、M2, M3, M4のように、条件に応じて最適注揚水状態の ξ_c , ξ_w を、各長方形領域について求め、得られた ξ_c を数値計算では侵入限界線位置 ξ に用いて、これらを連ねてFig. 13のように、侵入限界線と注水井列を設定する。次にこの領域について、前述の有限要素法と線形計画法を用い、数値解析すれば、侵入限界線または注水井に制約をもつ場合の実領域の最適注揚水状態の各井戸の注揚水量とくさび先端位置が求められる。

5. むすび

本報は、海岸地域で、構造物の基礎掘削など地下水位の低下に起因する地下塩水の侵入を、海岸線に並べた注水井により、制御する場合について解析し、この場合の注揚水量の総和を最小にする最適注揚水状態を求めたものである。

まず、注水井が1個の長方形領域における定常地下密度流について、その流量ポテンシャルを導き、これを凡いて最適注揚水状態を求め塩水侵入限界線と注水井位置に制約がない場合とある場合について、それぞれの最適注揚水状態のくさび先端位置と注水井位置および注揚水量を求めた。次に、これらの理論的考察結果を利用しながら、複雑な境界をもつ塩水侵入制御について、有限要素法と線形計画法を用いて、最適注揚水状態を求める数

値解析手法を述べ、これを実地の領域に適用して有用な手法であることを述べた。

本報はかなり数学的にモデル化して、算定手法に重点をおいて述べたものであり、淡水の注入効果、目づまり等、実際に適用するにあたっての諸問題については今後検討する必要があると考える。

参 考 文 献

- 1) Aguado, E. and Remson, I. : Ground-Water Hydraulics in Aquifer Management, Proc. of A. S. C. E., Vol. 100, No. HY 1, pp. 103~118, January, 1974.
- 2) 上田・神野・長野：広領域地下水からの最適取水について、土木学会論文報告集，第283号，pp. 33~43，1979年3月。
- 3) 上田・藤野・平野・神野：準一様流を仮定できる定常3次元地下密度流の数値解と最適井戸取水について、土木学会論文報告集，第301号，pp. 83~92，1980年9月。
- 4) 佐藤邦明・渡辺邦夫：地下水の適性揚水システム化に関する研究，水資源に関するシンポジウム前刷集，pp. 429~434，1977年。
- 5) Strack, O. D. L. : A single-Potential Solution for Regional Interface Problems in Coastal Aquifers, Water Resour. Res., 12 (6), pp. 1165~1174, 1976.
- 6) たとえば，石井吾郎：数理計画入門，サイエンス社，1976。
- 7) 永岡・木川・池田・高橋：止水壁工法，河口湖工学基礎編，工業用水協会，河口湖調査委員会，pp. 112~170，1968年5月。

(1986. 5. 26・受付)