

## クノイド波の斜面遡上の境界要素解析\*

## A BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS FOR CNOIDAL WAVE RUN-UP

大山 巧\*\*

By Takumi OHYAMA

A boundary element method using nonlinear potential theory has been developed for analyzing cnoidal wave run-up on a plane with a constant inclination angle. The validity of the method is confirmed by comparing the numerical results with experimental data. Because of the wave nonlinear effect, the linear solution given by Shuto predicts a much smaller magnitude of wave run-up. In addition, the applicability of Takada's formula, which takes the wave nonlinearity into consideration, is investigated by comparing the results obtained from the formula with those of the boundary element analysis. It is found that Takada's formula does not yield a good approximation for the run-up height of a cnoidal wave.

*Keywords*: wave run-up, boundary element method, cnoidal wave

## 1. はじめに

海岸堤防や護岸を合理的に設計するためには、波のはい上がり高さを十分な精度で把握することが、重要な課題となる。surging wave 領域における一様勾配斜面への波のはい上がり高さに関して、現在広く実用に供されているものに、Miche<sup>3)</sup>の解、高田<sup>4)</sup>の式、および首藤<sup>5)</sup>の解がある。Micheは、斜面が深海域まで連続する場合を考え、はい上がり高さや深海での入射波高の比を線形理論から求めている。高田は、このMicheの解に、Sainflou<sup>6)</sup>あるいはMiche<sup>3)</sup>の重複波理論に基づく解の非線形項を重ね合わせることにより、波の非線形性に関する補正を行っている。しかしこの式は、波の非線形性の影響が斜面勾配に無関係であるという仮定のもとに導かれているため、波の変形に及ぼす非線形効果を的確に評価しているとはいえない。さらに高田は、斜面のり先が有限水深水域にある場合のはい上がり高さや入射波高の比を求める際、線形項としてMicheの解をそのまま適用している。しかしながら、この場合対象とする入

射波高がMicheの解とは異なるはずであり、線形項としては、Micheの解に浅水係数の逆数をかけたKeller<sup>7)</sup>の解を用いるべきである(高田は、はい上がり高さや深海波高との比を求める際、逆にMicheの解に浅水係数をかけている)。また首藤は、Lagrange座標系を用いて、一定水深水域から一様勾配斜面が連続するときの波のはい上がり高さを理論的に求めている。ただしこの解は、線形長波理論に基づくもので、初期波高水深比が大きい場合の設計に用いるのは問題があるといえよう。

一方、Stoker<sup>8)</sup>、Carrier and Greenspan<sup>9)</sup>以来、非線形長波理論に基づく数値解析法が、すでに数多く提案されており、最近では孤立波のはい上がりに関して、Pedersen and Gjevik<sup>10)</sup>がPeregrine<sup>11)</sup>の手法を断面が緩やかに変化する水路へ拡張した研究がある。しかし、これらはboreや孤立波といった非周期性の波の運動に着目したものであり、これらの解析結果を周期性の波を対象にした通常の設計にそのまま用いることはできない。

また、Kim, Liu and Liggett<sup>12)</sup>はこれらとは別に、グリーン公式を用いた境界要素法により孤立波のはい上りを解析している。この方法は、非線形境界条件である自由表面上の圧力方程式と運動学的条件をそのまま取り込んだものであり、長波としての近似が含まれない

\* 本論文の内容の一部は既発表<sup>1), 2)</sup>のものであるが、本編はその後の新たな研究成果を加えて取りまとめたものである。

\*\* 正会員 清水建設(株)技術研究所海洋グループ  
(〒135 江東区越中島 3-4-17)

め、基本的には任意の有限振幅波に適用できる。しかしながら、Kimらの解析法では、変動境界である自由表面での速度ポテンシャルの時間的な変化を評価する際、その空間的な変動量を無視しており、解析精度上問題がある。

そこで著者は、これを厳密に評価した新しい数値解析法を提案し、孤立波に対する解析結果をもとにその改善効果を具体的に示した<sup>1)</sup>。そしてさらに、水理実験を数値的にシミュレートする、いわゆる数値波動水槽としてこの解析法を位置づけることにより、周期性非線形波であるクノイド波への適用を図り、その基本的な性能を検討した<sup>2)</sup>。

本研究は、これらに引き続き、クノイド波の斜面へのはい上がり問題に対する数値解析法を提案し、さらにそれに基づく解析結果から、はい上がり高さに及ぼす波の非線形性の影響およびクノイド波領域における首藤の解、高田の式の妥当性を検討するものである。ここで提案する数値解析法は、先に提案した手法<sup>1)</sup>を拡張したものである。すなわち、先に提案した手法では、自由表面上の節点の変動方向を鉛直に規定していたのに対し、本解析法ではKimらと同様な考え方にに基づき、この方向を各節点ごとに任意に設定する。そしてこれにより、波の斜面へのはい上がりおよび戻り流れに伴う自由表面の拡大、縮小現象を評価する。

本論文では、まず基礎となる理論とその定式化について述べ、さらに数値解析を行ううえで問題になる離散化パラメーター等の設定方法を提案する。ただし、一定水深水域でのパラメーターの設定方法についてはすでに提案している<sup>2)</sup>ので、ここでは節点の変動方向に勾配をもたせた場合にこれを拡張する。そして、クノイド波の一樣勾配斜面へのはい上がり高さと同斜面近傍の波形に関して、数値解析結果と水理実験結果を比較することにより、解析結果の妥当性を検証する。さらに、首藤の解、高田の式との比較から、波の非線形性の影響およびこれら理論解の適用性について論じる。

2. 基礎方程式と境界条件

図-1のように座標系を定義し、一定水深水域から斜面を含む岸壁が連続しているものとする。そして、造波境界  $S_c$  から発生した波が  $x$  の正の方向へ伝播し、斜面上にははい上がり、反射するものとする。ただし、この際斜面による摩擦の影響は無視する。

流体を非圧縮、非粘性流体とし、流体運動を非回転運動と仮定し、速度ポテンシャル  $\phi(x, z, t)$  を用いて流体運動を記述する。斜面を造波境界  $S_c$  から十分離れた位置に設定し、岸壁からの反射波が  $S_c$  に到達する前の状態までを考える。このとき、 $\phi$  に関する基礎方程式と

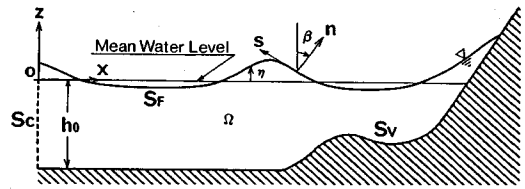


図-1 座標系

境界条件は、以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 && (\text{in } \Omega) \dots\dots\dots (1) \\ \phi_n &= -\phi_z = 0 && (\text{at } z = -h_0) \dots\dots\dots (2) \\ \phi_n &= 0 && (\text{on } S_v) \dots\dots\dots (3) \\ \phi_n &= -\phi_x = -U(z, t) && (\text{on } S_c) \dots\dots\dots (4) \\ \eta_t + \phi_x \eta_x &= \phi_z && (\text{on } S_f) \dots\dots\dots (5) \\ \phi_t + (1/2)(\phi_n^2 + (\phi_s)^2) + g\eta &= 0 && (\text{on } S_f) \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ただし、 $x, z, n$  等の添字は、それぞれによる偏微分を表わす。式(1)はオイラーの連続方程式、式(2)、(3)は海底面および壁面における不透過条件、式(4)は  $S_c$  における速度の連続条件、式(5)、(6)は、それぞれ自由表面での運動学的条件、力学的条件(圧力方程式)である。ここで、 $n, s$  は、図-1に示すように、流体領域  $\Omega$  を取り囲む境界面上での外向き法線方向、接線方向を表わし、 $\eta(x, t)$  は、鉛直上向きを正としたときの平均水面からの水面変動量である。また、 $U(z, t)$  は発生するクノイド波の水平水粒子速度で、ここではFenton<sup>13)</sup>の3次オーダーまでの理論解を用いることにする。

ここで、 $\beta$  を図-1のように定義するとき、 $\eta_x = -\tan \beta, \partial/\partial n = \sin \beta \partial/\partial x + \cos \beta \partial/\partial z$  の関係から、式(5)は次のように表わされる。

$$\phi_n = \eta_t \cos \beta \quad (\text{on } S_f) \dots\dots\dots (7)$$

3. 境界積分方程式とその離散化

(1) 境界積分方程式

境界積分方程式の導出にあたっては、二次元のグリーン公式と重みつき残差法を用いる。すなわち、基礎方程式(1)より  $\phi$  が調和関数であることから、流体領域  $\Omega$  にグリーン公式を適用すると、 $\Omega$  を取り囲む境界面  $S$  上の点  $P(x_p, z_p)$  における速度ポテンシャル  $\phi(P)$  は、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \phi(P) &= -\frac{1}{\alpha^*(P)} \int_S (\phi G_n - \phi_n G) ds \dots\dots\dots (8) \\ G &= \ln(1/r) + \ln(1/r') \end{aligned} \left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (z_q - z_p)^2} \\ r' &= \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (z_q + z_p + 2h_0)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $(x_q, z_q)$  は  $S$  上の点の座標を表わす。また、点  $P$  の両側の境界線がなす内角を  $\alpha(P)$  とするとき、 $z_p = -h_0$  のとき  $\alpha^*(P) = 2\alpha(P)$ 、 $z_p \neq -h_0$  のとき  $\alpha^*(P) =$

$\alpha(P)$ である。

式(8)に圧力方程式(6)以外の境界条件(2)~(4), (7)を代入し,  $z=-h_0$ で $G_n=0$ であることを考慮すると, 最終的に次式が導かれる。

$$\phi(P) = -\frac{1}{\alpha^*(P)} \left\{ \int_{S_F \cup S_c \cup S_v} \phi G_n ds - \int_{S_F} G_n \cos \beta ds + \int_{S_c} U G ds \right\} \dots \dots \dots (10)$$

一方, 自由表面上の圧力方程式(6)については重みつき残差法を適用する。式(6)に式(7)を代入し, 両辺に重み関数 $\omega$ をかけ,  $S_F$ 上で積分することにより, 以下の非線形重みつき残差方程式が得られる。

$$\int_{S_F} \omega \left[ \phi_t + \frac{1}{2} (\eta_t \cos \beta)^2 + (\phi_s)^2 + g\eta \right] ds = 0 \dots \dots \dots (11)$$

(2) 積分方程式の離散化

境界積分方程式(10), (11)を空間的に離散化するには, 線形要素を用いる。図-2に示すように, 各境界面上に節点を配置し,  $j$ 番目節点と $j+1$ 番目節点で構成される要素番号を $\bar{j}$ と定義する。ただし,  $\bar{N}$ 番目要素は $N$ および1番目節点から構成されるものとする。そして, 要素内の諸量の分布を次のように一次関数で近似する。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= N_j^T \phi_j, \quad \phi_j^T = (\phi_j, \phi_{j+1}) \\ \phi_t &= N_j^T (\phi_t)_j, \quad (\phi_t)_j^T = ((\phi_t)_j, (\phi_t)_{j+1}) \\ \eta &= N_j^T \eta_j, \quad \eta_j^T = (\eta_j, \eta_{j+1}) \\ \eta_t &= N_j^T (\eta_t)_j, \quad (\eta_t)_j^T = ((\eta_t)_j, (\eta_t)_{j+1}) \\ U &= N_j^T U_j, \quad U_j^T = (U_j, U_{j+1}) \\ \omega &= N_j^T \omega_j, \quad \omega_j^T = (\omega_j, \omega_{j+1}) \\ N_j^T &= (1-s/l_j, l_j) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

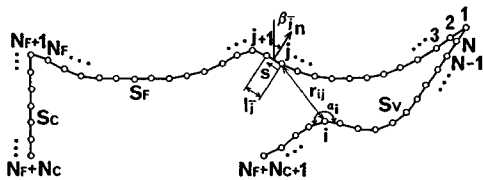


図-2 節点番号と記号の定義

ただし, 肩文字の $T$ はベクトルの転置を表す。

式(10), (11)に示される境界面上の積分を各要素での積分値の和で置き換え, 式(12)を代入すると, 次式が得られる。

$$\alpha_i^* \phi_i + \sum_{j=1}^{N_F+N_C-1} A_{ij}^T \phi_j + \sum_{j=N_F+N_C+1}^N A_{ij}^T \phi_j - \sum_{j=1}^{N_F} \cos \beta_j B_{ij}^T (\eta_t)_j + \sum_{j=N_F+1}^{N_F+N_C-1} B_{ij}^T U_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \dots \dots \dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{ij}^T &= \int_0^{l_j} N_j^T G_n ds = (A_{ij}^{(1)}, A_{ij}^{(2)}) \\ B_{ij}^T &= \int_0^{l_j} N_j^T G ds = (B_{ij}^{(1)}, B_{ij}^{(2)}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

$$\sum_{j=1}^{N_F} \omega_j^T \left[ \int_0^{l_j} N_j N_j^T ds (\phi_t)_j + \frac{1}{2} \left[ \cos^2 \beta_j \cdot \int_0^{l_j} N_j N_j^T (\eta_t)_j N_j^T ds (\eta_t)_j + \frac{1}{l_j^2} \int_0^{l_j} N_j ds E^T \phi_j E^T \phi_j \right] + g \int_0^{l_j} N_j N_j^T ds \eta_j \right] = 0 \dots \dots \dots (15)$$

ただし, 式(14)で定義される $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ は, 解析的に積分できる。また, 式(15)を導く際,  $\phi_s$ は要素内で一定とし, 次のように近似している。

$$\left. \begin{aligned} (\phi_s)_j &= (1/l_j) (\phi_{j+1} - \phi_j) = (1/l_j) E^T \phi_j \\ E^T &= (-1, 1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

式(15)に含まれる積分を行い, さらにこれを重み関数の節点値 $\omega_j$  ( $j=1, 2, \dots, N_F+1$ )について整理することにより次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^{N_F+1} \gamma_j \omega_j = 0 \dots \dots \dots (17)$$

ただし,  $\gamma_j$ は以下に示すとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_1 \{ 2(\phi_t)_1 + (\phi_t)_2 \} + b_1 \{ 3(\eta_t)_1^2 + 2(\eta_t)_1(\eta_t)_2 + (\eta_t)_2^2 \} + c_1 (\phi_2 - \phi_1)^2 + g \alpha_1 (2\eta_1 + \eta_2) \\ \gamma_j &= \alpha_{j-1} \{ (\phi_t)_{j-1} + 2(\phi_t)_j + \alpha_j \{ 2(\phi_t)_j + (\phi_t)_{j+1} + b_{j-1} \{ (\eta_t)_{j-1}^2 + 2(\eta_t)_{j-1}(\eta_t)_j + 3(\eta_t)_j^2 + b_j \{ 3(\eta_t)_j^2 + 2(\eta_t)_j(\eta_t)_{j+1} + (\eta_t)_{j+1}^2 \} + c_{j-1} (\phi_j - \phi_{j-1})^2 + c_j (\phi_{j+1} - \phi_j)^2 + g \alpha_{j-1} (\eta_{j-1} + 2\eta_j) + g \alpha_j (2\eta_j + \eta_{j+1}) \} \} \\ &\quad (j=2, 3, \dots, N_F) \\ \gamma_{N_F+1} &= \alpha_{N_F} \{ (\phi_t)_{N_F} + 2(\phi_t)_{N_F+1} \} + b_{N_F} \{ (\eta_t)_{N_F}^2 + 2(\eta_t)_{N_F}(\eta_t)_{N_F+1} + 3(\eta_t)_{N_F+1}^2 \} + c_{N_F} (\phi_{N_F} - \phi_{N_F+1})^2 + g \alpha_{N_F} (\eta_{N_F} + 2\eta_{N_F+1}) \\ \alpha_j &= \frac{l_j}{6}, \quad b_j = \frac{l_j \cos^2 \beta_j}{24}, \quad c_j = \frac{1}{4 l_j} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

上式が任意の重み関数について成り立つためには, 次式を満足する必要がある。

$$\gamma_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_F+1) \dots \dots \dots (19)$$

(3) 自由表面での座標変換

本解析法では, 図-3に示すように,  $z^*$ 軸が $j$ 番目節点を通り,  $z$ 軸と $\theta_j$ の角度をなすものとして各節点ごとに局所座標系を定義する。そして, 自由表面上の $j$ 番目節点は時間ステップの変化に対して $z^*$ 軸に沿って変動するものとする。

ここで,  $z^*$ 軸方向の運動学的条件より次式を得る。  
 $(\eta^*_{xj})_j = (\phi_{xj})_j - (\eta^*_{xj})_j (\phi_{xj})_j \dots \dots \dots (20)$

式(20)における $(\eta^*_{xj})_j$ は,  $\beta_j$ および $\theta_j$ を用いて次のように表わされる。

$$(\eta^*_{xj})_j = -\tan(\beta_j - \theta_j) \dots \dots \dots (21)$$

ただし,  $\beta_j$ は $j$ 番目節点上の $\beta$ の値である。ここで,  $\eta$ の分布を要素内で線形近似する都合上,  $\beta$ の値は節点上で不連続になるが, ここでは図-3に示すように定義す

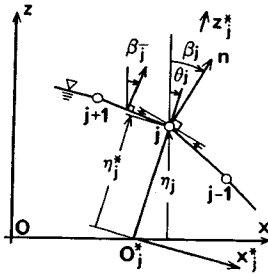


図-3 局所座標の定義

る。すなわち、節点上の接線を節点両側の境界線となす角度が等しくなるように定義し、その接線の方角から  $\beta$  を決める。

式 (21) を式 (20) に代入し、さらに  $\partial/\partial n = \sin(\beta_j - \theta_j) \partial/\partial x_j^* + \cos(\beta_j - \theta_j) \partial/\partial z_j^*$  の関係を用いると、次式が導かれる。

$$(\phi_n)_j = (\eta_j^*)_j \cos(\beta_j - \theta_j) \dots (22)$$

式 (7), (22) より、 $\eta_c$  は  $\eta_j^*$  により次のように表わされる。

$$(\eta_n)_j = (\eta_j^*)_j |\cos \theta_j + \sin \theta_j \tan \beta_j| \dots (23)$$

また  $\eta$  は、図-3 より次のように表わされる。

$$\eta_j = \eta_j^* \cos \theta_j \dots (24)$$

式 (13) に式 (23) を代入し、節点値について整理すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & a_j^* \phi_i + (A_{i1}^{(1)} + A_{iN}^{(2)}) \phi_1 + \sum_{j=2}^{N_f+N_c-1} (A_{ij-1}^{(2)} + A_{ij}^{(1)}) \phi_j \\ & + A_{iN_f+N_c-1}^{(2)} \phi_{N_f+N_c} + A_{iN_f+N_c+1}^{(1)} \phi_{N_f+N_c+1} \\ & + \sum_{j=N_f+N_c+2}^N (A_{ij-1}^{(2)} + A_{ij}^{(1)}) \phi_j - \left\{ B_{i1}^{(1)} \cos \beta_{i1} (\eta_1^*)_1 f_1 \right. \\ & + \sum_{j=2}^{N_f} (B_{ij-1}^{(2)} \cos \beta_{j-1} + B_{ij}^{(1)} \cos \beta_j) (\eta_j^*)_j f_j \\ & \left. + B_{iN_f}^{(2)} \cos \beta_{N_f} (\eta_{N_f}^*)_{N_f+1} f_{N_f+1} \right\} + B_{iN_f+1}^{(1)} U_{N_f+1} \\ & + \sum_{j=N_f+2}^{N_f+N_c-1} (B_{ij-1}^{(2)} + B_{ij}^{(1)}) U_j + B_{iN_f+N_c-1}^{(2)} U_{N_f+N_c} = 0 \end{aligned} \dots (25)$$

$$f_j = \cos \theta_j + \sin \theta_j \tan \beta_j \dots (26)$$

式 (18) にも式 (23), (24) を代入、式 (19) より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a_1 \{ 2(\phi_{v1})_1 + (\phi_{v2})_1 + b_{1-} \{ 3(\eta_1^*)_1^2 (f_1)^2 \\ & + 2(\eta_1^*)_1 (\eta_1^*)_2 f_1 f_2 + (\eta_1^*)_2^2 (f_2)^2 \} + c_1 (\phi_2 - \phi_1)^2 \\ & + g a_1 (2 \eta_1^* \cos \theta_1 + \eta_2^* \cos \theta_2) = 0 \\ \gamma_j &= a_{j-1} \{ (\phi_{v,j-1}) + 2(\phi_{v,j}) + a_{j-} \{ 2(\phi_{v,j}) + (\phi_{v,j+1}) \} \\ & + b_{j-1} \{ (\eta_{j-1}^*)_{j-1}^2 (f_{j-1})^2 + 2(\eta_{j-1}^*)_{j-1} (\eta_{j-1}^*)_j f_{j-1} f_j \\ & + 3(\eta_{j-1}^*)_j^2 (f_j)^2 \} + b_{j-} \{ 3(\eta_{j-1}^*)_j^2 (f_j)^2 + 2(\eta_{j-1}^*)_j (\eta_{j-1}^*)_{j+1} f_j f_{j+1} \\ & + (\eta_{j-1}^*)_{j+1}^2 (f_{j+1})^2 \} + c_{j-1} (\phi_j - \phi_{j-1})^2 + c_j (\phi_{j+1} - \phi_j)^2 \\ & + g a_{j-1} (\eta_{j-1}^* \cos \theta_{j-1} + 2 \eta_j^* \cos \theta_j) \\ & + g a_j (2 \eta_j^* \cos \theta_j + \eta_{j+1}^* \cos \theta_{j+1}) = 0 \end{aligned}$$

$$(j=2, 3, \dots, N_f)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{N_f+1} &= a_{N_f} \{ (\phi_{v,N_f}) + 2(\phi_{v,N_f+1}) + b_{N_f} \{ (\eta_{N_f}^*)_{N_f}^2 (f_{N_f})^2 \\ & + 2(\eta_{N_f}^*)_{N_f} (\eta_{N_f}^*)_{N_f+1} f_{N_f} f_{N_f+1} + 3(\eta_{N_f}^*)_{N_f+1}^2 (f_{N_f+1})^2 \} \\ & + c_{N_f} (\phi_{N_f+1} - \phi_{N_f})^2 + g a_{N_f} (\eta_{N_f}^* \cos \theta_{N_f} \\ & + 2 \eta_{N_f+1}^* \cos \theta_{N_f+1}) = 0 \end{aligned} \dots (27)$$

4. 逐次計算法

空間的に離散化した境界積分方程式 (25), (27) を各時間ステップで解き、流体運動を追跡する。ここで  $j$  番目節点 ( $j=1, \dots, N_f+1$ ) の  $n$  ステップにおける  $\eta^*$  および  $\eta_j^*$  をそれぞれ  $\eta_j^{*(n)}$ ,  $(\eta_j^*)_j^{(n)}$  と表わし、これらを 1 ステップ前の値のまわりでテイラー展開すると次のようになる。

$$\eta_j^{*(n)} = \eta_j^{*(n-1)} + \Delta \eta_j^{*(n)} \dots (28)$$

$$\Delta \eta_j^{*(n)} = \Delta t (\eta_j^*)_j^{(n-1)} + \frac{(\Delta t)^2}{2} (\eta_{jj}^*)_j^{(n-1)} + \dots (29)$$

$$(\eta_j^*)_j^{(n)} = (\eta_j^*)_j^{(n-1)} + (\Delta \eta_j^*)_j^{(n)} \dots (30)$$

$$(\Delta \eta_j^*)_j^{(n)} = \Delta t (\eta_{jj}^*)_j^{(n-1)} + \frac{(\Delta t)^2}{2} (\eta_{jjj}^*)_j^{(n-1)} + \dots (31)$$

ただし、 $\Delta t$  は 1 ステップ間の時間増分を表わす。式 (29), (31) より  $(\Delta \eta_j^*)_j^{(n)}$  を  $\Delta \eta_j^{*(n)}$  を用いて表わし、式 (30) に代入する。そして、 $(\Delta t)^2$  以上の項を微小項として無視すると、結局次式を得る。

$$(\eta_j^*)_j^{(n)} = \frac{2 \Delta \eta_j^{*(n)}}{\Delta t} - (\eta_j^*)_j^{(n-1)} \dots (32)$$

一方、 $\phi_c$  についても同様に、1 ステップ前の値のまわりでテイラー展開する。ただし、変動境界である自由表面上の節点については、その空間的な変動量  $\Delta \eta^*$  を考慮する必要がある<sup>1)</sup>。すなわち、 $t$  および  $z_j^*$  の 2 変数に対してこれらをテイラー展開すると、次のようになる。

$$\phi_j^{(n)} = \phi_j^{(n-1)} + \Delta \phi_j^{(n)} \quad (j=1, \dots, N_f+1) \dots (33)$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi_j^{(n)} &= \Delta t (\phi_{tj}^*)_j^{(n-1)} + \Delta \eta_j^{*(n)} (\phi_{z_j^*}^*)_j^{(n-1)} + (1/2) (\Delta t)^2 (\phi_{tt}^*)_j^{(n-1)} \\ &+ 2 \Delta t \Delta \eta_j^{*(n)} (\phi_{z_j^*}^*)_j^{(n-1)} + (\Delta \eta_j^*)_j^{(n)} (\phi_{z_j^*}^*)_j^{(n-1)} + \dots \end{aligned} \dots (34)$$

$$(\phi_{tj}^*)_j^{(n)} = (\phi_{tj}^*)_j^{(n-1)} + (\Delta \phi_{tj}^*)_j^{(n)} \quad (j=1, \dots, N_f+1) \dots (35)$$

$$(\Delta \phi_{tj}^*)_j^{(n)} = \Delta t (\phi_{ttt}^*)_j^{(n-1)} + \Delta \eta_j^{*(n)} (\phi_{z_j^*}^*)_j^{(n-1)} + \dots \dots (36)$$

式 (34)~(36) より、 $\eta^*$  の場合と同様な手順で  $(\phi_{v,j})_j^{(n)}$  を表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned} (\phi_{v,j})_j^{(n)} &= \frac{2 \Delta \phi_j^{(n)}}{\Delta t} - (\phi_{v,j})_j^{(n-1)} - \frac{2 \Delta \eta_j^{*(n)}}{\Delta t} (\phi_{z_j^*}^*)_j^{(n-1)} \\ &- \Delta \eta_j^{*(n)} (\phi_{z_j^*}^*)_j^{(n-1)} - (\Delta \eta_j^*)_j^{(n)} (\phi_{z_j^*}^*)_j^{(n-1)} / \Delta t + \dots \end{aligned} \dots (37)$$

式 (37) の右辺第 4, 5 項に式 (29) を代入し、 $(\Delta t)^2$  以上の項を無視すると次式が得られる。

$$(\phi_{v,j})_j^{(n)} = \frac{2 \Delta \phi_j^{(n)}}{\Delta t} - (\phi_{v,j})_j^{(n-1)} - \frac{2 \Delta \eta_j^{*(n)}}{\Delta t} (\phi_{z_j^*}^*)_j^{(n-1)}$$

$$-\Delta t(\eta_j^{*j-1})\{(\phi_{z_j}^{*j})^{n-1}+(\eta_j^{*j-1})(\phi_{z_j}^{*j})^{n-1}\} \\ (j=1, 2, \dots, N_F+1) \dots \dots \dots (38)$$

式 (38) における  $\phi_{z_j}^*$  は、運動学的条件式 (22) 等を利用して、 $\phi_{z_j}^* = \eta_j^* \cos^2(\beta - \theta) + \phi_s \sin(\beta - \theta)$  として求められる。ここで、式 (38) 右辺第 5 項の算定方法について述べる。著者はまず、 $\phi_{z_j}^*$  については  $\phi_{z_j}$  の場合と同様な方法で、 $\phi_{z_j}^{*j-1} = 2(\phi_{z_j}^{*j-1} - \phi_{z_j}^{*j-2})/\Delta t - \phi_{z_j}^{*j-2}$  として評価するが (この場合節点変動に対応する項は高次の非線形項として無視する)、 $\phi_{z_j}^{*j-1}$  を含む項については  $\phi_{z_j}^{*j-1}$  の項よりも高次の非線形項であるとしてこれを無視していた<sup>1)</sup>。またこの方法とは別に、式 (38) 右辺第 5 項が  $\eta_j^{*j-1} \Delta \phi_{z_j}^{*j}$  ( $\Delta \phi_{z_j}^{*j} = \phi_{z_j}^{*j} - \phi_{z_j}^{*j-1}$ ) と等価であることを利用し、後に述べる同一ステップでの繰返し計算において  $\Delta \phi_{z_j}^{*j}$  を求める方法を提案した<sup>2)</sup>。本論文では、後者の方がより高次の項を評価でき、計算も若干単純になることから、後者の方法を用いることにした。

一方、自由表面以外の境界上の節点についても次のように置く。

$$\phi_j^{*j} = \phi_j^{*j-1} + \Delta \phi_j^{*j} \quad (j = N_F + 1, \dots, N) \dots \dots \dots (39)$$

式 (28), (32), (33), (38), (39) を式 (25), (27) に代入する。そして、 $(\Delta t)^2$  以上の項に対応する  $(\Delta \eta_j^*)^2$ ,  $(\Delta \phi)^2$  を含む項を無視すると、最終的に  $\Delta \phi_j^{*j}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ),  $\Delta \eta_j^{*j}$  ( $j = 1, 2, \dots, N_F + 1$ ) に関する連立一次方程式を得る。ここで、 $\Delta \eta_j^{*j}$  が未知数として方程式中に取り込まれる関係上、 $n$  ステップでの境界形状がわからない。ただし、この問題に対しては、境界形状が十分収束するまで同一ステップで計算を繰り返す方法をすでに提案している<sup>1)</sup>。そしてその結果、十分な精度で解を求めることができることを確認したので、本解析法でも同様の方法を用いることにした。

5.  $\theta$  および離散化パラメーターの設定

斜面への波のはい上がりを解析する場合、自由表面上の節点の変動方向を決める  $\theta$  をどのように設定するかが問題になる。1 番目節点は、当然斜面に沿って変動させるわけであるが、2 番目以降の節点をすべて鉛直に変動させると、1 番目要素のみが極端に長くなるため、精度上好ましくないと考えられる。そこで、図-4 に示すように、各節点と斜面ののり先を結ぶ直線が  $z_j^*$  になるように  $\theta_j$  を設定する。ただし、一樣水深部での節点はすべて鉛直に変動させる。このように定義しておけば、水面が静水面を下回るときでも節点が交差するという不都合は生じない。

また、数値計算を行ううえで、離散化パラメーターである時間増分  $\Delta t$  および要素長の選択方法が問題になる。ただし、一定水深水域での離散化パラメーターの選択方法については、クノイド波の近似理論であるハイバ

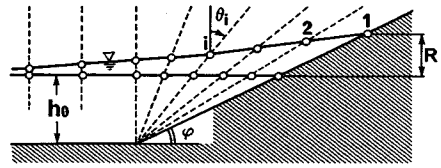
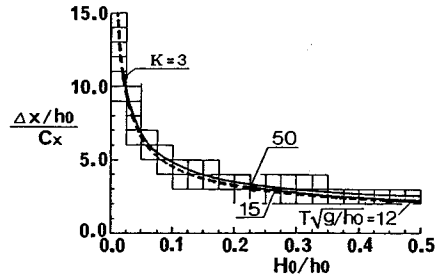
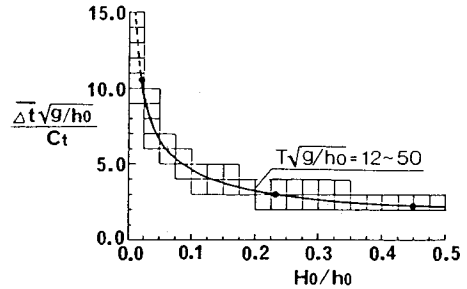


図-4 自由表面上における  $\theta$  の設定



(a)  $H_0/h_0$  と  $\Delta x/h_0$  の関係



(b)  $H_0/h_0$  と  $\Delta t \sqrt{g/h_0}$  の関係

図-5 一樣水深水域での離散化パラメーターの選択<sup>2)</sup>

ポリック波の第 2 次解を用いてすでに検討しており<sup>2)</sup>、その結果は図-5 に示すとおりである。図中、 $\Delta x$  は自由表面上の要素の  $x$  軸の投影長さ、 $\Delta t$  は一定水深水域に対する時間増分、 $T$  は発生する波の周期、 $C_x$ ,  $C_t$  は定数である。また、●印はそれぞれの波周期に対して  $K=3$  となるハイポリック波の適用限界を表わし、それを越える範囲については破線で示してある。これらの図に示される結果は、次のような考え方に基いて導かれたものである。すなわち、 $\Delta x$  については、ハイポリック波の進行波形において、無次元水面変動量  $\eta/H_0$  の節点間の差の最大値が同程度になるように、また  $\Delta t$  については、 $\Delta \eta/H_0$  の最大値が同程度になるように設定した。ここで、 $C_x$ ,  $C_t$  は空間的な離散化方法や時間スキームのとり方によって異なると考えられるが、本解析法においては  $C_x=0.26$ ,  $C_t=0.19$  としている<sup>2)</sup>。なお、ハイポリック波の適用範囲外では、厳密には図-5 の結果をそのまま用いることはできないが、これよりも若干小さめに設定すれば、実用上は十分である<sup>2)</sup>。

さて、水深変化部の  $\theta \neq 0$  の節点における 1 時間ス

テップ当たりの変動量は、一様水深部の  $\theta=0$  の節点よりも相対的に大きくなる。ここで、 $\theta \neq 0$  の節点変動の鉛直成分が  $\theta=0$  の節点と同程度であると単純に仮定すると、その変動量は、 $\theta=0$  の節点のほぼ  $1/\cos \theta$  倍程度になるものと予想される。いいかえれば、1 時間ステップ当たりの節点変動量を一定水深水域での変動量と同程度にするためには、 $\overline{\Delta t}$  を  $\cos \theta$  倍にすればよいことになる。そこで、ここでは  $\theta$  の最大値である  $\theta_1 (= \pi/2 - \psi, \psi$ : 斜面の傾斜角度) をもとに  $\Delta t$  を次のように設定する。

$$\Delta t = \overline{\Delta t} \cos \theta_1 = \overline{\Delta t} \sin \psi \dots\dots\dots (40)$$

ただし、 $\overline{\Delta t}$  は、図-5 から得られる値を表わす。

また、水深変化部の自由表面上の要素長は、図-4 に示すように波がはい上がった状態を考慮し、一定水深部よりも短くする必要があると考えられる。そこで本論文では、一様水深部の  $\Delta x$  は図-5 に従って決め、また水深変化部の  $\Delta x$  は一様水深部の  $1/3$  以下になるように節点を配置した。

6. 一様勾配斜面へのクノイド波のはい上がり

一様勾配斜面へのクノイド波のはい上がり高さに関して、解析結果を水理実験結果および線形理論に基づく首藤の解と比較することにより、解析結果の妥当性を検証するとともに、波の非線形性の影響について考察する。さらに、本解析結果等を用いて、クノイド波領域における高田の式の適用性を検討する。

(1) 実験の概要

実験には、図-6 に示すような長さ 17 m、幅 40 cm のアクリル製の水槽を用いた。そして、水槽の片側に設置した斜面の表面に、目盛りのついた透明なフィルムを貼っておき、波面がこの目盛り上をはい上がる様子を図-6 に示すようにビデオカメラで録り、はい上がり高さを測定した。また、入射波高は造波板から 8 m 離れた位置で測定し、発生後第 2 波目から第 5 波目の波の峰までを平均したものとした。

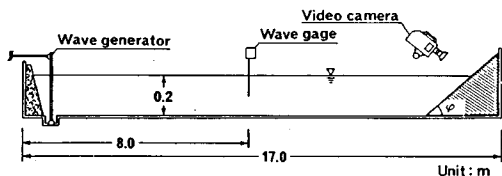


図-6 はい上がり高さの測定方法

実験は、無次元周期  $T\sqrt{g/h_0} = 12, 14, 16$  の 3 通りに対して、斜面の傾斜角度  $\psi$  を  $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  の 3 通りに変化させた合計 9 ケースについて行った。ただし、初期波高水深比  $H_0/h_0$  は  $0.3$  以下でランダムにとった。

(2) 実験結果および線形理論との比較

数値解析においては、初期条件として静水状態を仮定し、クノイド波形の第 3 次解<sup>13)</sup>で、造波境界  $S_c$  における水面変動量が 0 になるときを  $t=0$  として波を発生した。ただし、 $S_c$  から斜面のり先までの距離は、線形長波理論から得られる波長 ( $= T\sqrt{gh_0}$ ) の  $1.5$  倍とし、自由表面上の要素数や  $\Delta t$  については前に述べた方法に基づいて決めた。また、 $S_c$  および斜面での要素数は、それぞれ 5 および 10 とした。

さらにこの場合、波の定常性、すなわち発生後第何波目を定常波とみなせるかが問題になる。ただし、水路長が波長の 2 倍程度であれば、発生後第 2 波目以降は安定して水路内を伝播すると考えてもよいことをすでに確認している<sup>2)</sup>ので、第 2 波目の波のはい上がり高さを解析結果とした。

図-7~9 は、各ケースにおけるクノイド波のはい上がり高さに関して、本解析結果を実験結果と比較したものである。また、それぞれの図中には、波の非線形性の影響をみるために、線形長波理論に基づく首藤<sup>9)</sup>の解ものせてある。ここで、首藤の解は、以下に示すとおりである。

$$\frac{R}{H_0} = \left\{ J_0^2 \left( 4\pi \frac{l_0}{L_0} \right) + J_1^2 \left( 4\pi \frac{l_0}{L_0} \right) \right\}^{-1/2} \dots\dots\dots (41)$$

ただし、 $l_0$  は静水時の汀線と斜面のり先との水平距離、 $L_0$  は一定水深水域での波長、 $J_0, J_1$  はそれぞれ 0 次、1 次のベッセル関数である。

これらの図からわかるように、実験結果は、ほとんどの場合本解析結果よりも小さくなっている。これは主に、理論では考慮されていない斜面での摩擦による影響であると考えられるが、両者の一致は全体的に良好であるといえよう。一方、首藤の解は、常に本解析結果、実験結果を大きく下回っており、 $T\sqrt{g/h_0} = 16$  にみられるように、本解析結果の  $1/2$  にも満たない場合がある。またこれらの図において、本解析結果と首藤の解との差が、波の非線形性の影響を表わしているものと考え、それは高田が仮定しているように斜面勾配に無関係ではなく、勾配が緩やかになるほど大きな影響を及ぼしていることになる。

次に、斜面付近の空間波形の変化について、本解析結果と実験結果を比較した例を示す。写真-1 は、 $T\sqrt{g/h_0} = 14, H_0/h_0 = 0.2, \psi = 30^\circ$  のときの実験波形で、図-10 は同じ条件に対する数値解析結果である。ただし写真は、発生後第 3 波目の波がはい上がる様子を示したものである。写真および図中に示される  $\bar{t}$  は、(a) の状態を 0 としたときの時間の変化を表わす。なお実験では、まず水槽の真横から 16 mm 映写機を用いて波形を録画しておき、そのフィルムから写真を作成した。こ

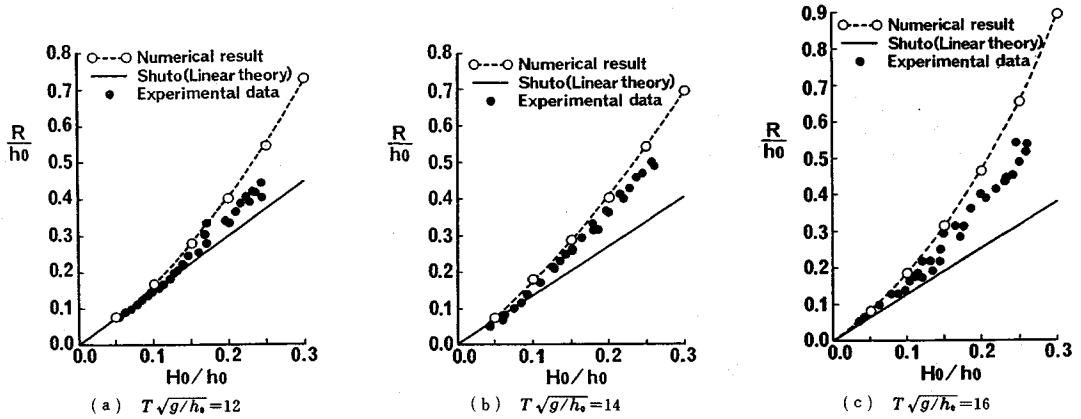


図-7 クノイド波のはい上がり高さ ( $\psi=30^\circ$ )

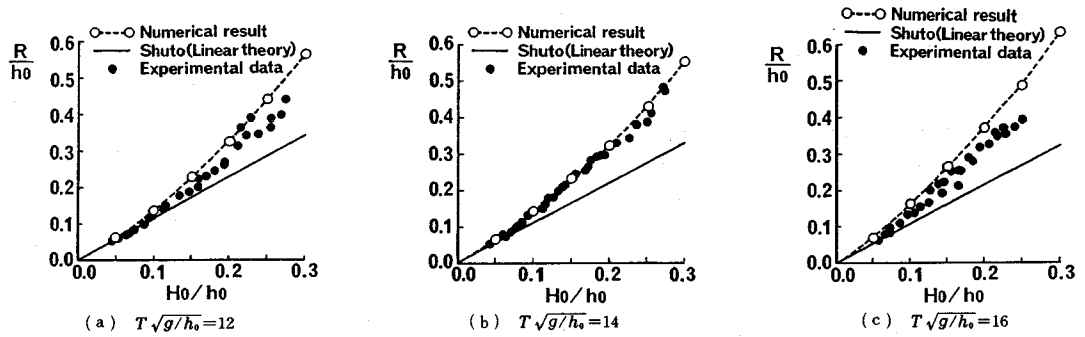


図-8 クノイド波のはい上がり高さ ( $\psi=45^\circ$ )

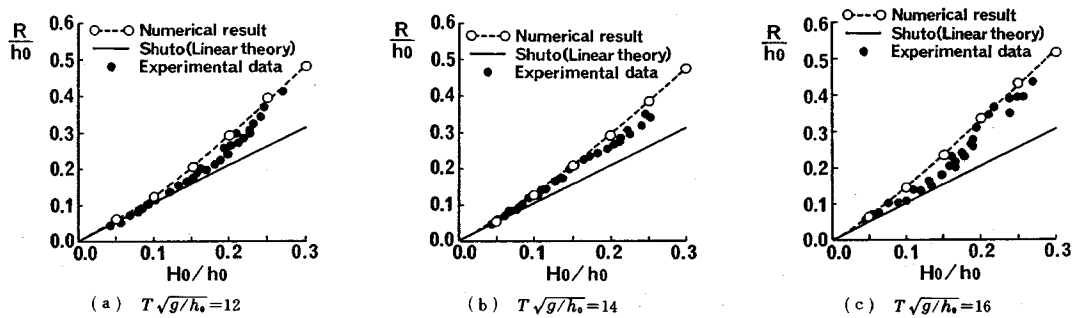


図-9 クノイド波のはい上がり高さ ( $\psi=60^\circ$ )

の際、斜面上の水面変動量が0になることを基準にして、そのコマ数から解析結果に対応する時間を判断した。また実験では、水槽側壁に鉛直方向には1cmごとに、水平方向には5cmごとに糸を貼っており、図-10にもこれに対応した目盛りを書き入れてある。これらから、本解析結果は十分な精度で波形を再現しているのがわかる。

(3) クノイド波領域での高田の式の妥当性

高田<sup>4)</sup>は、一様勾配斜面への波のはい上がり高さとして、Micheの解にSainflouあるいはMicheの重複波形

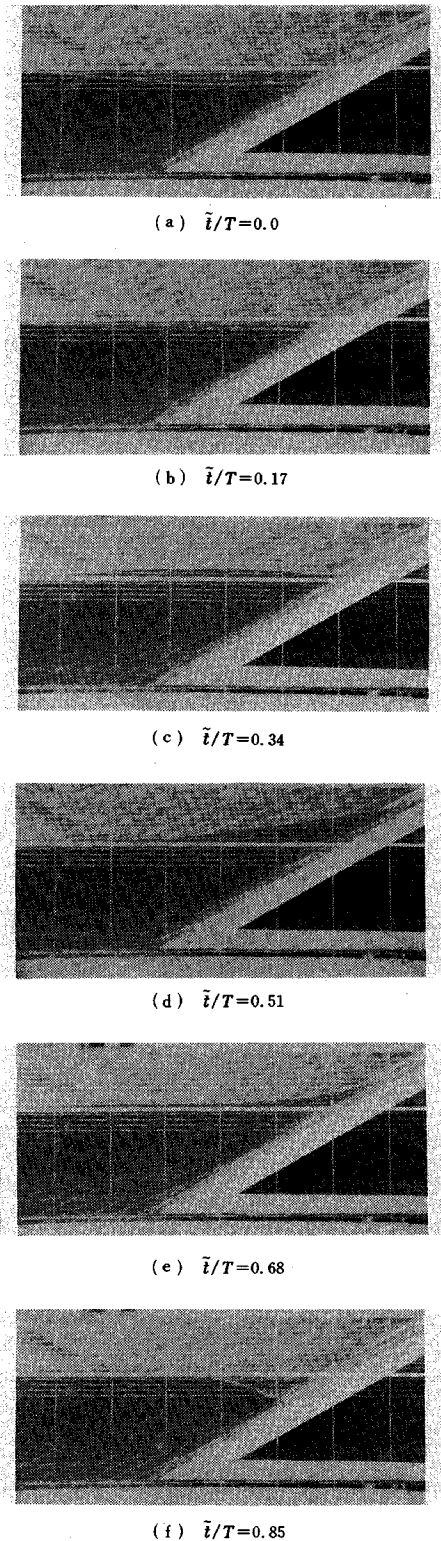
の非線形項を加算した次式を提案している。

<Sainflouの波形を用いた場合>

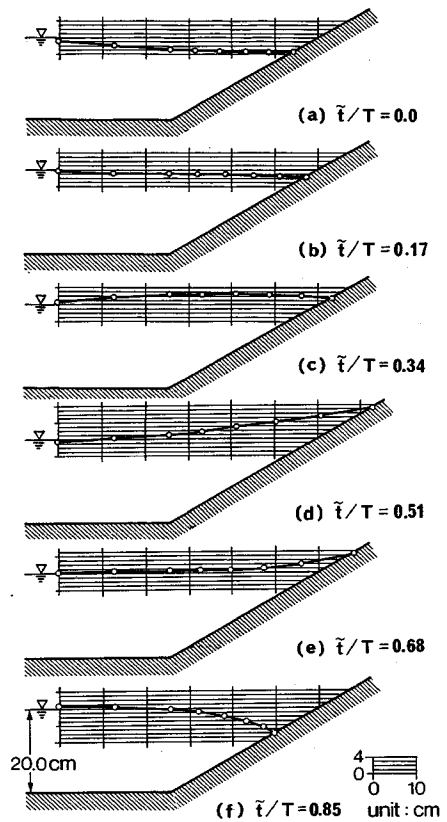
$$\frac{R}{H_0} = \sqrt{\frac{\pi}{2\psi} + \frac{H_0}{h_0} \frac{\pi h_0}{L_0}} \cosh \frac{2\pi h_0}{L_0} \dots\dots\dots (42)$$

<Micheの波形を用いた場合>

$$\frac{R}{H_0} = \sqrt{\frac{\pi}{2\psi} + \frac{H_0}{h_0} \frac{\pi h_0}{L_0}} \cosh \frac{2\pi h_0}{L_0} \cdot \left[ 1 - \left\{ \tanh^2 \frac{2\pi h_0}{L_0} - 3 \right\} / 4 \sinh^2 \frac{2\pi h_0}{L_0} \right] \dots\dots\dots (43)$$



写真—1 斜面近傍の波形変化の実験結果  
 ( $T\sqrt{g/h_0}=14, \phi=30^\circ, H_0/h_0=0.2$ )



図—10 斜面近傍の波形変化の解析結果  
 ( $T\sqrt{g/h_0}=14, \phi=30^\circ, H_0/h_0=0.2$ )

ここで、 $L_0$  は線形理論から求められる入射波の波長である。これらの式は、前にも述べたように、線形解として Miche の解をそのまま用いている点、波の非線形効果が斜面勾配に無関係であると仮定している点で理論的に問題がある。一方、このような根本的な矛盾があるにもかかわらず、高田の式は比較的短周期領域では実験値との対応がよく<sup>4)</sup>、また実際の設計にも広く用いられている<sup>14)</sup> も事実である。ただし、ここではこの式から得られる解の適用範囲が明確に示されていないことを重視し、本解析結果との比較からクノイド波領域における適用性を検討する。

図—11 は、横軸に初期波高水深比、縦軸に無次元周期をとり、 $\phi=45^\circ$  の場合のはい上がり高さに関して、本解析結果と高田の式から得られる結果を  $0.05 \leq H_0/h_0 \leq 0.30, 10.0 \leq T\sqrt{g/h_0} \leq 18.0$  の範囲で示したものである。ここで図—11(a) は、 $H_0/h_0$  については 0.05 ピッチ、 $T\sqrt{g/h_0}$  については 1.0 ピッチで変化させた合計 54 ケースの解析結果から作成したものである。また、図—11(b) に示される (Takada)<sub>s</sub> が Sainflou の波形を用いた式 (42) に、(Takada)<sub>M</sub> が Miche の波形を用い



た式 (43) に対応する。高田の式では、式 (42) と式 (43) で結果がかなり異なり、式 (43) の方が相対的に大きな値になる。また、式 (42) では周期に対してはい上がり高さはほとんど変化しないが、式 (43) では周期が長くなるにつれてその値は大きくなる。一方、本解析結果は、ほとんどの領域で式 (42) および式 (43) から得られる値の間にあるが、どちらかという式 (43) の方に近い。ただし、図-11 に示した範囲では、式 (43) は本解析

結果に比べて、最大 20% 程度大きな値を与えている。

ここで、周期が無限大の極限、すなわち孤立波の場合を考えてみる。図-12 は、 $\psi=45^\circ$  の場合の孤立波のはい上がり高さを示したものである。図中の実線は、Hall and Watts<sup>15)</sup> の実験結果 ( $R/h_0=3.1(H_0/h_0)^{1.15}$ )、○印は本解析結果を表す。本解析においては、 $S_c$  上の水粒子速度として Fenton<sup>16)</sup> の孤立波の第 3 次解を与えることにより、波を発生している。また、水路長は、のり先水深の 16 倍とし、離散化パラメータはクノイド波の場合と同じ手順で決めた。この場合、式 (42) では非線形項が 0 になり、結果として Miche の解と一致する。そして、図に示されるように、実験結果、本解析結果を大幅に下回ることになる。一方式 (43) では、逆に非線形項が発散してしまい、明らかに適用できない。

以上から、高田の式は、Sainflou の波形を用いた場合は過小評価に、Miche の波形を用いた場合は過大評価になる傾向があると考えられ、無次元周期の比較的長いクノイド波領域での適用には問題があるといえよう。

### 7. おわりに

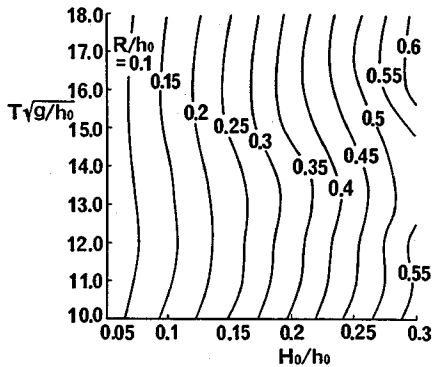
非線形波の急勾配斜面へのはい上がり現象をシミュレートする数値解析法として、境界要素法に基づく手法を提案した。そしてこれを用いて、クノイド波の一樣勾配斜面へのはい上がり高さを検討した。これにより得られた主な結論は、以下のとおりである。

(1)  $T\sqrt{g/h_0}=12, 14, 16, \psi=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  の合計 9 ケースのはい上がり高さについて、本解析結果を水理実験結果と比較した。その結果、両者はよく一致し、解析結果の妥当性が確かめられた。また、斜面付近の波形についても、本解析法により精度よく再現できることを確認した。

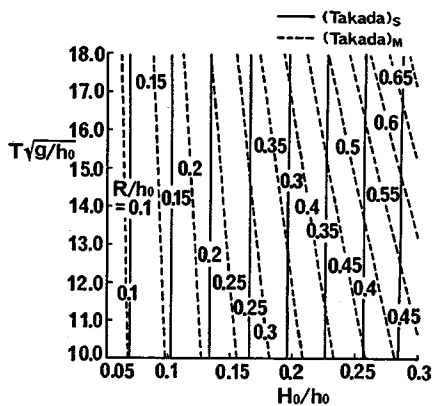
(2) 線形長波理論に基づく首藤の解は、波高水深比が大きくなると、本解析結果、実験結果を大幅に下回するため、実際の設計に用いるのは問題がある。また、本解析結果と首藤の解との差は、斜面勾配が緩やかなほど大きくなる。すなわち、波の非線形効果は、高田の仮定とは異なり、斜面勾配の影響を受けると考えられる。

(3)  $\psi=45^\circ$  とし、 $10.0 \leq T\sqrt{g/h_0} \leq 18.0, 0.05 \leq H_0/h_0 \leq 0.30$  の範囲で、本解析結果と高田の式との比較をした。高田の式では、Sainflou の波形を用いる場合と Miche の波形を用いる場合で結果がかなり異なり、前者は過小評価に、後者は過大評価になる傾向がある。特に、周期が無限大の孤立波の場合には、この傾向が顕著に現われる。

謝 辞：本研究を遂行するにあたり、清水建設(株) 大崎研究室 清川哲志氏から貴重なご助言を賜った。ま



(a) 本解析結果



(b) 高田の式

図-11 高田の式との比較 ( $\psi=45^\circ$ )

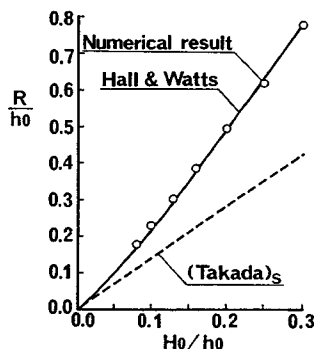


図-12 孤立波のはい上がり高さ ( $\psi=45^\circ$ )

た、実験とその結果の整理において、当時清水建設(株) 技術研究所現業員 渡辺 保君の協力を得た。ここに記して感謝の意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) 大山 巧：境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析，第32回海岸工学講演会論文集，pp.555～559，1985.
- 2) 大山 巧：数値波動水槽によるクノイド波の変形の解析，第33回海岸工学講演会論文集，pp.99～103，1986.
- 3) Miche, M. : Mouvements Ondulatoires de La Mer en Profondeur Constante ou Décroissante. (I～IV), Annales des Ponts et Chaussées, pp.25～406, 1944.
- 4) 高田 彰：波の遡上および反射の関連性について，土木学会論文報告集，第182号，pp.19～30，1970.
- 5) Shuto, N. : Standing waves in front of a sloping dike, Coastal Eng. in Japan, Vol.15, pp.13～23, 1972.
- 6) Sainflou, G. : Essai sur les Disques Maritimes Verticales, Annales des Ponts et Chaussées, Vol.98, No.4, 1928.
- 7) Keller, J.B. : Tsunamis-Water waves produced by earthquakes, Tsunami Hydrodynamics Conference, Honolulu, Hawaii, 1961.
- 8) Stoker, J.J. : The formation of breakers and bores, Comm. Pure Appl. Math., Vol.1, pp.1～87, 1948.
- 9) Carrier, G.F. and Greenspan, H.P. : Water waves of finite amplitude on a sloping beach, J.F.M., Vol.4, pp.97～109, 1958.
- 10) Pedersen, G. and Gjevik, B. : Run-up of solitary waves, J.F.M., Vol.135, pp.283～299, 1983.
- 11) Peregrine, D.H. : Long waves in a uniform channel of arbitrary cross-section, J.F.M., Vol.32, pp.353～365, 1968.
- 12) Kim, S.K., Liu, P.L-F. and Liggett, J.A. : Boundary integral equation solutions for solitary wave generation, propagation and run-up, Coastal Eng., Vol.7, pp.299～317, 1983.
- 13) Fenton, J.D. : A high-order cnoidal wave theory, J.F.M., Vol.94, pp.129～161, 1979.
- 14) 土木学会編，水理公式集—昭和60年版一，pp.529, 1985.
- 15) Hall, J.V., Jr. and Watts, G.M. : Laboratory investigation of the vertical rise of solitary waves on impermeable slopes, U.S. Army, Corps of Engineers, Beach Erosion Board, Tech. Memo. No.33, 1953.
- 16) Fenton, J.D. : A ninth-order solution for the solitary wave, J.F.M., Vol.53, pp.257～271, 1972.

(1986.11.14・受付)