

# 支川改修が本川の氾濫危険度に及ぼす 影響を評価するための一理論

## A THEORY OF FLOOD FREQUENCY AT A CONFLUENCE

栗田秀明\*・江藤剛治\*\*

By Hideaki KURITA and Takeharu ETOH

Improvements of a tributary for flood control may result in an increase of flood frequency of the mainstream. It is primarily because a portion of flood discharge which is equal to the increment of the drainage capacity of the tributary and overflows there before the improvement runs down into the mainstream. The frequency distribution of peak flood discharge at a confluence should be based on the distribution of the sum of discharges of the tributaries. The analytical expression of the flood risk at a confluence in terms of the drainage capacities of the tributaries is derived in view of overflow along the tributaries and the distribution of the sum.

*Keywords: river improvement, flood frequency, bivariate exponential distribution*

### 1. 序 論

近年、局所的かつ集中的な支川流域の都市化の進展に伴い、支川の改修の進捗が本川に比べて著しい場合がある。このとき、次の2点が問題となる。

- ① 流域の開発に伴う流出形態の変化や支川の改修に伴う流下形態の変化から、流出率が增大し、洪水到達時間が短縮し、結果として、ピーク流量が増大する。
- ② これまでは支川で氾濫し、氾濫により低減された後のピーク流量で本川に流下していた洪水流が、支川の改修により本川に直接流入するため、本川の氾濫確率（以後、本論文ではこれを氾濫危険度と称する）が増大する。

第1の問題は、流出形態の変化を考慮した流出解析により評価すべきである。第2の問題を扱うには、後述のように支川での氾濫を考慮した、2つの支川流量の結合確率密度関数による解析が必要である。

本研究では、第2の問題（以後、本論文ではこの問題

を本支川問題と称する）を扱う。ただし、2つの支川が合流する（あるいは、1つの支川が本川に合流すると考えてもよい）場合についてのみ取り扱う。また、ダム、遊水池等の貯留施設がない場合について検討する。

工事実施基本計画では、最終的な完成段階での治水システムの姿を描く。しかしながら、河川改修には長い時間を要するので、改修途中段階での洪水被害を効率的に低減させることも重要な課題となる。このための計画が段階的治水計画である。本研究課題は段階的治水計画において重要となる。このことについて説明する。

通常、基本計画において洪水頻度解析を行う場合には、明らかに遊水効果を期待する地点を除いては、基準点より上流の氾濫を考慮しない。その分だけ基準点の流量を過大評価することになる。この解析をもとに、ある確率の洪水を対象として計画をたてた場合には、実際にはそれよりもかなり高い治水安全度をもつ計画を策定することになる。基本計画策定においては、その程度の余裕をもった計画をたてることは当然である。また、河川の改修は、一般に下流から順次行うことが原則となっている。本川で計画河道が完成している場合には、本川に及ぼす影響を憂慮することなく、支川の改修を行うことができる。よって、そのための影響評価手法を開発する必要もない。一方、支川の流域内で局所的かつ集中的な都市化

\* 正会員 工修 (株)建設技術研究所大阪支社技術第3部  
(〒541 大阪市東区本町1-24-1ニューホンマチビル)

\*\* 正会員 工博 近畿大学教授 理工学部土木工学科  
(〒577 東大阪市小若江3-4-1)

が進んだ場合には、特定の支川の改修を本川の改修に先行して行わざるを得ないときがある。この場合には、本川の疎通能が計画レベルまで達していないので、支川の改修が本川の氾濫危険度を増大させる可能性が高い。これまでの議論より明らかなように、段階的治水計画においては、支川の氾濫や改修が本川の氾濫危険度に及ぼす影響を評価することが必要となる。

この影響を評価するためには、通常、次のような方法が用いられる。まず、時間的、空間的に種々のパターンをもつ降雨波形で、数多くの確率規模のハイドログラフを作成する。それらのハイドログラフを用い、支川の氾濫が考慮できる数値シミュレーションを行い、何段階かの支川疎通能ごとに本川の氾濫危険度を評価することにより、支川の改修による本川の氾濫危険度の変化を把握する。しかし、このような方法は、一般的に膨大な資料と多大な時間を要する。また、得られたシミュレーション結果のみにより意志決定を行うためには、机の上に乗べての結果を並べてみて、直感的な判断により必要な情報をとらざるを得ない。また、膨大な結果の整理方針がなかなかつかめないこともある。

一方、理論的な解析による場合には、多少思い切った仮定を導入することが必要となり、現実の現象と理論モデルの間で若干の乖離が生まれることもある。その結果、数値にも差異が生じる場合がある。しかしながら、この場合には理論式の式形より、現象の基本的性質を知ることができるし、シミュレーション結果の整理をするときの指針を得ることもできる。

以上が本研究に着手した動機である。

これまでにも、本支川問題を理論解析により検討しようとした試みもある。たとえば、長沢は25年も以前に支川合流に伴う洪水頻度解析を含めた洪水防御計画全般において、2変数確率分布の応用が不可欠であることを指摘している<sup>1)</sup>。長尾は洪水の河道ピーク水位と総流量が2変数(対数)正規分布に従うとして、1河道、1貯留施設で構成されるモデル水系の洪水処理計画のありかたを考察している<sup>2)</sup>。石原・瀬能は本支川問題について一般的に考察した。さらに、ピーク流量と日雨量の線形関係や上流本支川の年最大日雨量の同時分布が二変数対数正規分布に従うことなどを仮定して、簡単な場合の下流本川の氾濫確率の計算例を示し、主として相関係数の効果を検討した<sup>3)</sup>。高樟・鈴木はこれを発展させて経済効果を導入した分析を行っている<sup>4)</sup>。しかしながら、著者の知る限り、現在までこれらの研究成果が実務に供されることはなかったようである。著者は、次の2点がその原因ではないかと考える。

① いずれの研究も2変数(対数)正規分布理論を利用している。一方、非毎年のピーク流量資料は正規

分布あるいは対数正規分布に従うことは少なく、むしろ顕著な逆J字型の分布をとる(後述2. a) 確率分布形の選定の項参照)。

② 計画策定の実務に用いる手法は、できる限り簡便な方がよい。しかしながら、正規分布を用いる場合には、本川の氾濫危険度の式は初等関数で表わされず、両支川の結合確率密度関数の積分形のまま示さざるを得ない。そのため、本川の氾濫危険度を知るには面倒な数値積分を必要とする。

基本的には、確率分布の選択に原因があったわけである。すなわち、第1の問題では、現象をより忠実にモデル化することに不十分な点があった。第2の点では、結果をできる限り簡便な形に帰着させるという努力が不十分であったわけである(補遺1参照)。

著者らは、両支川のピーク流量の結合確率密度関数が2変数指数分布に従うとしたうえで、次の2つの特別なケースを考えて、できる限り厳密な解析により、支川の疎通能と本川の氾濫危険度の関係を表わす式を導いた。

① 両支川の流出量が完全独立(相関母数 $\rho=0$ )

② 両支川の流出量が完全従属(相関母数 $\rho=1$ )

これらの場合に対しては、非常に簡単な氾濫危険度の式が得られた。一般的な解は、これら2つの場合の解の間に位置することは明らかなので、これら特別な場合の解が得られただけでも、実用上十分な意義がある。

## 2. 解析の方針

本研究では、先の問題点を改善するために、次のような方針で解析を進めることにした。

### a) 確率分布形の選定

一般に河川計画において、超過確率に対する分布型のあてはめとしては、年最大値系列(annual maximum series: 毎年資料とよばれている)を標本する。このとき、対数正規分布やガルベル分布などが実測ピーク流量の頻度によく適合する。2つの支川の流量と、その和で表わされる本川流量の確率分布を取り扱う場合には、当然、上流2支川の流出量の結合確率を考える必要がある。このとき、注意しなければいけないのは、ある年の2つの支川の年最大値は同一の雨によるものとは限らないため、それらの和は本川流量を表わし得ないことである。これら为了避免するためには、ある閾値以上の全資料(partial duration series: 必ずしも適切な言葉ではないと考えるが、非毎年資料とよばれている)を標本とする必要がある。このような全資料のピーク流量の分布は指数分布にほぼ従うことが知られている。さらに、現時点で2変数確率分布として実用上使えるものは、2変数(対数)正規分布、井沢の2変数ガンマ分布(形状母数 $\nu=1$ のとき、2変数指数分布となる)等である<sup>5)-7)</sup>。以上、2つ

の観点から、本研究では2つの支川の流量の確率分布はそれぞれ指数分布に従い、両者の結合確率密度関数は2変数指数分布に従うものとする。

b) 2支川の流量の相関が特別な場合について解析解を誘導することの意義

2つの支川のピーク流量の結合確率密度関数が2変数指数分布に従うとして、両者の相関が完全独立(相関母数  $\rho=0$ ) の場合と、完全従属 ( $\rho=1$ ) の場合について、本川の氾濫危険度を求めた結果、非常に簡単な式形で解が導かれた。一般の場合の氾濫危険度は、両者の中間に位置するので、任意の  $\rho$  の値に対しては、数値解析結果との比較により、氾濫危険度の内挿公式を作ることは容易であろう。また、 $\rho=0$ 、 $\rho=1$  のときの解は氾濫危険度を最も低く、あるいは最も高く評価する。氾濫危険度の上下界を押さえることができるという点でも、 $\rho=0$ 、 $\rho=1$  のときの解が得られることの意義は大きい。

c) 等危険度線の作成

室田・江藤は、ダム・遊水池で代表される貯留施設と河道・ポンプに代表される排水施設の間の、治水機能分担のあり方を評価するために、「等危険度線」という概念を提示している<sup>8)</sup>。この研究では、所与の治水安全度を確保するために必要な貯留容量と排水容量の関係を表わす式を理論的に導いている。さらに、この式をもとに、貯留容量と排水容量を軸とする二次元平面上で、危険度が一定となる線を描いた「等危険度線図」を使うことを推奨している。この図より、貯留容量がいくらで、排水容量がいくらのおときは危険度がどうなるか、逆に、危険度を所与としたときには、必要な貯留容量と排水容量の組合せがどうなるかが一目でわかる。

本研究でも、この等危険度線の考え方で結果を整理する。これにより、2つの支川の疎通能がいくらといくらのおときは、本川の氾濫危険度はどうなるか、あるいは、改修により支川の疎通能が引き上げられたときには、本川の氾濫危険度がどの程度高くなるかが一目で把握できる。

3. 理論模型

(1) 仮定と記号

次のような仮定・記号を用いる。

a) 流量関係

本支川の基準点でのピーク流量および疎通能の関係を図-1に示すように定義する。

本川のピーク流量  $z$  は、氾濫を考慮した両支川のピーク流量  $x'$ 、 $y'$  の線形代数和で表わされるものとする。氾濫は越水型で、疎通能  $x_0$ 、 $y_0$  を越える流量は氾濫し、疎通能だけの流量が本川へ流下すると仮定する(補遺2参照)。すなわち、

$$z = k_1 x' + k_2 y' \dots \dots \dots (1)$$

ここで、

$$x' = \begin{cases} x & \text{for } x \leq x_0 \text{ (支川1 氾濫なし)} \\ x_0 & \text{for } x > x_0 \text{ (支川1 氾濫あり)} \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} y & \text{for } y \leq y_0 \text{ (支川2 氾濫なし)} \\ y_0 & \text{for } y > y_0 \text{ (支川2 氾濫あり)} \end{cases}$$

$$0 < k_1 \leq 1, 0 < k_2 \leq 1$$

$k_1$  は本川ピーク時における支川1の流量と、支川1のピーク流量の比であり、 $k_2$  は本川ピーク時における支川2の流量と支川2のピーク流量の比である(図-2参照)。たとえば、支川1の流域面積が支川2に比べ十分に大きいときには、支川1の下流端のピーク流量の生起時刻と本川のピーク流量の生起時刻が一致することになり、支川1の下流端でのピーク流量のほぼ全量が本川のピーク流量に寄与することとなり、 $k_1=1$  となる。全流域面積に対して、一方の支川の流域面積が小さいときには、 $k$  は小さい値となり、洪水ごとの  $k$  のばらつきは大きくなる。ただし、多くの洪水に対し解析を行うときには、 $k$  のばらつきの効果は平均化されて、無視し得るものとする。よって、本論文では  $k$  の値は一定と仮定する。実務上は平均的な  $k$  の値よりやや大きい値に固定すればよい。

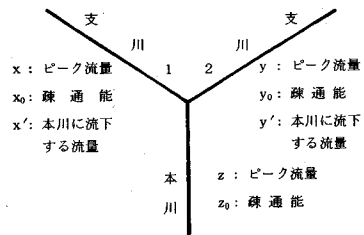


図-1 記号

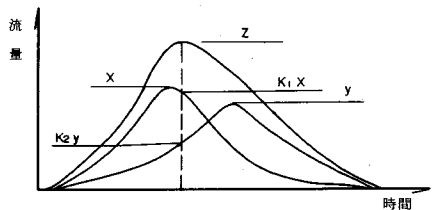


図-2 本支川の hidrograph の概念図

b) 流量の確率分布

両支川のピーク流量の確率分布は指数分布に従う。その結合確率密度関数は2変数指数分布(後述の式(6)参照)に従うものとする。

$$f_1(x) = \beta_1 \cdot \exp(-\beta_1 \cdot x) \dots \dots \dots (2)$$

$$f_2(y) = \beta_2 \cdot \exp(-\beta_2 \cdot y) \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 $f_1$ 、 $f_2$  は  $x$ 、 $y$  の確率密度関数、尺度母数  $\beta$

は  $\beta=1/\mu=1/\sigma$  ( $\mu, \sigma$  は  $x$  あるいは  $y$  の平均値, 標準偏差) である。それぞれの確率分布関数は  $F_1, F_2$  で表わす。

c) 氾濫条件

本川で氾濫が生じるのは、支川合流後の本川ピーク流量が本川の疎通能を越える場合、すなわち、 $z_0 < z$  の場合である。これに、式 (1) を代入すれば、

$$z_0 < k_1 x' + k_2 y' \dots\dots\dots (4)$$

$x-y$  平面上で本川の氾濫が生じる領域は、式 (1)、(4) より、図-3 のように示される。この図は  $x_0$  と  $z_0/k_1$  および、 $y_0$  と  $z_0/k_2$  の大小関係により、5つのケースに分類されている。

次に、各ケースについて、それぞれのもつ物理的意味を説明する。簡単のため、まず  $k_1=k_2=1$  の場合を考える。

ケース1:  $x_0 > z_0$  かつ  $y_0 > z_0$  の場合

本川の疎通能が支川1より小さく、かつ支川2より小さいことを示す。本川の疎通能が両支川のいずれよりも小さい。本川が氾濫したのち、外力規模がより大きければ支川で氾濫が生じる。支川の改修により、本川の氾濫危険度は変化しない。通常、このような場合は少ないと考えられる。支川と本川の間にダムや遊水池等の洪水貯留施設が存在する場合には、このようなこともあり得る。ただし、これは本論文では検討の対

象としていない。

ケース2:  $y_0 \leq z_0 < x_0$  の場合

本川の疎通能が支川2より大きい、支川1よりは小さいことを示す。ケース1の場合と同じように、本川の疎通能が支川1より小さい場合は少ない。支川2の改修が、本川の氾濫危険度を増大させる。

ケース3:  $x_0 \leq z_0 < y_0$  の場合

ケース2の支川1と支川2の関係を、反対にしたものである。

ケース4:  $x_0 \leq z_0, y_0 \leq z_0$  かつ  $x_0 + y_0 > z_0$  の場合

本川の疎通能は支川1ならびに支川2の単独の疎通能より大きい、両者の和よりは小さい。最も一般的な河川計画における計画流量配分である。なぜならば、通常比較的大きな流域面積をもつ支川間では、降雨が一樣であることは少なく、支川1のピーク流量がその疎通能に達したときに、支川2のピーク流量も疎通能一杯まで達することは確率的にみて少ない。よって、本川の疎通能は両支川の疎通能の和より小さくてよい。両支川の改修が本川の氾濫危険度を増大させる。本支川問題の典型的な解析対象領域である。後述のように、このケースの解の特別な解として、ケース1~3の本川の氾濫危険度が求まる。

ケース5:  $x_0 + y_0 \leq z_0$  の場合

本川の疎通能が支川1と支川2の疎通能の和より大

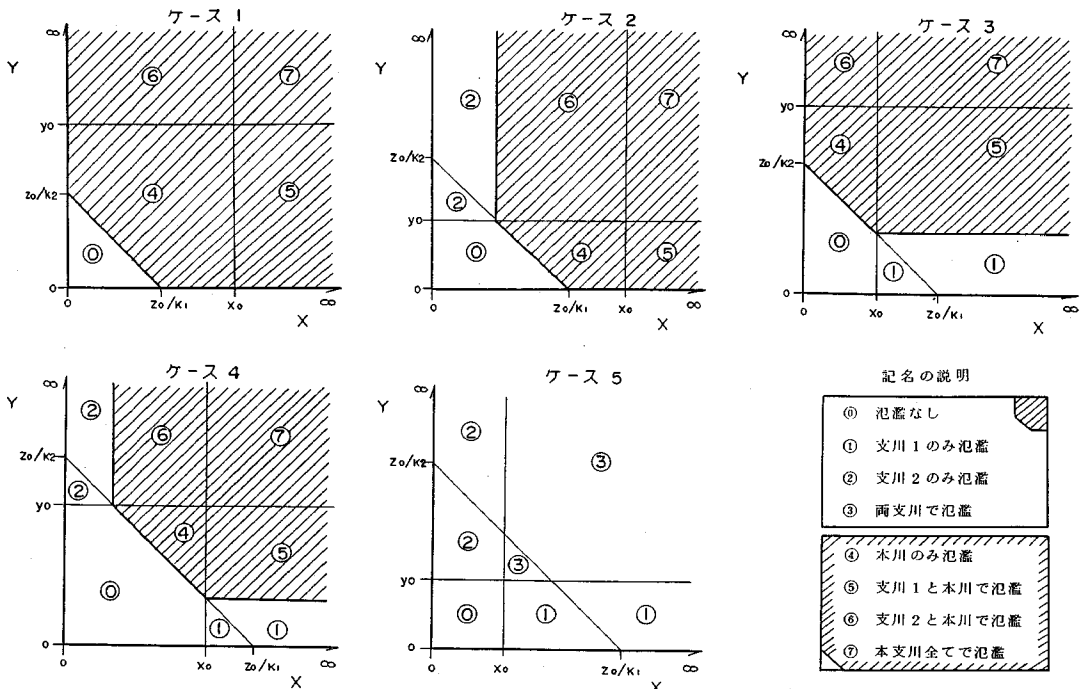


図-3 疎通能の種々の組合せに対する、本川危険度を計算するための積分領域 (斜線の部分が本川で氾濫が生じる  $x-y$  座標上での領域、 $k_1 x_0, k_2 y_0, z_0$  の大小関係により種々のケースが生じる)

きい場合であり、本川では全く氾濫が生じない。このような状況は、本川の疎通能が支川のそれに比べて過剰容量の状態といえる。下流から逐次、基本計画レベルの河道を整備していくときには、改修途中段階でこのような状況が生じる。しかし、厳しい予算制約を受けている今日の治水事業の中で、改修途中段階の長期にわたって過剰容量の状況が続くことは、経済的にみて効率が悪い。このような、条件が保持されたままで、河川改修を進めることができるならば、本支川問題を考える必要はない。

次に、 $k_1, k_2$  を導入したものについて考える。 $k_1, k_2$  は、支川1 および支川2 の基準点から本川基準点に至る、流量低減ならびに合流時差による寄与率の低下を補正している。よって、 $k_1 x_0, k_2 y_0$  を疎通能相当流量と定義したうえで、先の文章の疎通能をこれで読み換えればよい。

(2) 本川の氾濫危険度  $P_{F3}$  の誘導

本川で氾濫が生じる確率、すなわち氾濫危険度  $P_{F3}$  は、図-3で示した各ケースの斜線の領域において、両支川のピーク流量の結合確率密度関数を積分すればよい。一般的には、次式で書き表わされる。

$$P_{F3} = \int_A f(x, y) dA \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 $A$  は図-3の斜線の領域、 $dA$  はその中の面積素分 (図-4参照)。

一般的には、ケース4だけを対象として計算しておけば、他のケースはこの特別な場合として求められる。式(5)で、 $f(x, y)$  に井沢の2変数指数分布を適用すると、次式のように示される<sup>5),6)</sup>。

$$f(x, y) = \begin{cases} \beta_1 \exp(-\beta_1 x) \cdot \beta_2 \exp(-\beta_2 y) & \text{for } \rho=0 \\ \frac{\beta_1 \beta_2}{(1-\rho)} \exp\left\{-\frac{\beta_1 x}{(1-\rho)} - \frac{\beta_2 y}{(1-\rho)}\right\} \\ \quad \times I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\beta_1 \beta_2 x y}\right) & \text{for } 0 < \rho < 1 \\ \beta_1 \exp(-\beta_1 x) = m \beta_2 \exp(-m \beta_2 y) & \text{for } \rho=1 \end{cases} \dots \dots \dots (6)$$

ここで、 $\rho$ : 相関母数、 $I_0$ : 0次の変形ベッセル関数、 $m = \beta_1 / \beta_2$ 。

たとえば、ケース4において  $P_{F3}$  を算定するには、図-4の斜線で示す領域で、式(6)の結合確率密度関数を積分すればよい。ただし、式(6)中、 $0 < \rho < 1$  のときには変形ベッセル関数を含むため式(5)の積分は数値積分によらざるを得ない。

a)  $x, y$  が完全独立の場合 ( $\rho=0$ ) の解析

例として、ケース4 (図-3参照) の  $P_{F3}$  を  $P'_{F3}$  で表わし、この式を導く。

ケース4の場合

$$\begin{aligned} P'_{F3} &= \text{Prob. } \{z > z_0, x_0 \leq z_0/k_1, y_0 \leq z_0/k_2\} \\ &= \int_{(z_0 - k_1 x_0)/k_2}^{y_0} \int_{(z_0 - k_2 y)/k_1}^{\infty} f(x, y) dx \cdot dy \\ &\quad + \int_{y_0}^{\infty} \int_{(z_0 - k_2 y_0)/k_1}^{\infty} f(x, y) dx \cdot dy \\ &= \frac{\beta_2}{\beta_2 - \frac{\beta_1}{k_1}} \times \exp\left\{-\frac{\beta_2}{k_2} z_0 + \left(\frac{k_1}{k_2} \beta_2 - \beta_1\right) x_0\right\} \\ &\quad + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \frac{k_1}{k_2} \beta_2} \times \exp\left\{-\frac{\beta_1}{k_1} z_0 + \left(\frac{k_2}{k_1} \beta_1 - \beta_2\right) y_0\right\} \end{aligned} \dots \dots \dots (7)$$

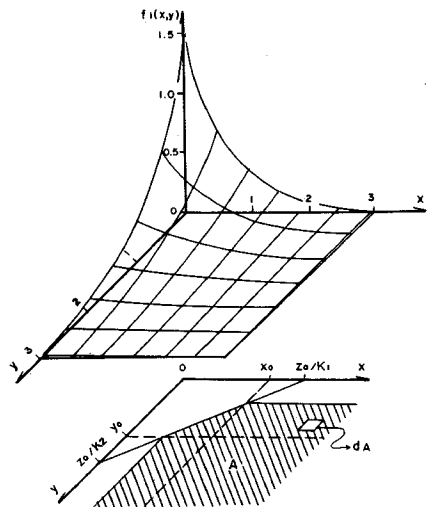


図-4 積分領域と結合確率密度関数の例

なお、式(7)で明らかのように、 $x, y$  で積分したのちは、本川の氾濫危険度  $P_{F3}$  は、パラメーター  $k_1, k_2, \beta_1, \beta_2$  と、疎通能を表わす変数  $x_0, y_0, z_0$  の関数となる。よって、式(7)の  $P'_{F3}$  を  $P'_{F3}(x_0, y_0, z_0)$  と書く。ケース1~3についても同様に  $P_{F3}$  を求める。

結果として、全ケースの本川氾濫危険度  $P_{F3}$  は、次式のようにまとめられる。

ケース1~4 ( $k_1 x_0 + k_2 y_0 > z_0$ ) に対しては、  
 $P_{F3} = P'_{F3}(x'_0, y'_0, z_0) \dots \dots \dots (8)$   
 ただし、

$$x'_0 = \begin{cases} x_0 & \text{for } x_0 < z_0/k_1 \\ z_0/k_1 & \text{for } x_0 \geq z_0/k_1 \end{cases}$$

$$y'_0 = \begin{cases} y_0 & \text{for } y_0 < z_0/k_2 \\ z_0/k_2 & \text{for } y_0 \geq z_0/k_2 \end{cases}$$

ケース5 ( $k_1 x_0 + k_2 y_0 \leq z_0$ ) に対しては、  
 $P_{F3} = 0 \dots \dots \dots (8)'$

これを、 $x_0 - y_0$  平面上に図示すれば、図-5のように示される。

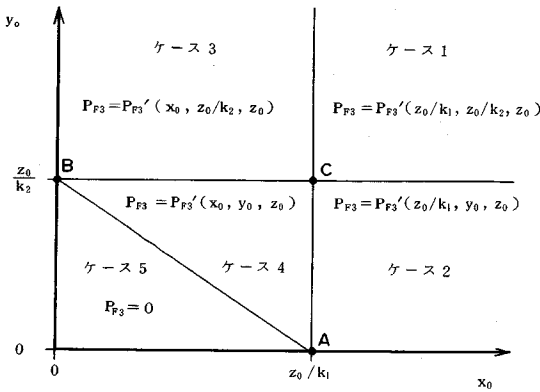


図-5 危険度の領域区分 ( $\rho=0$  のとき)

式(7), (8)で表わされる解を実用上より便利で簡単な形に変形する。まず、図-5中の代表点A, B, Cの氾濫危険度  $P_{F3A}$ ,  $P_{F3B}$ ,  $P_{F3C}$  を求める。これらは、式(7)におのおのの座標値  $(x_0, y_0)$  を代入することにより、次の式(9)~(11)のように示される。

$$P_{F3A} = \exp\{-\beta_1 z_0/k_1\} = 1 - F_1(z_0/k_1) \dots (9)$$

$$P_{F3B} = \exp\{-\beta_2 z_0/k_2\} = 1 - F_2(z_0/k_2) \dots (10)$$

$$P_{F3C} = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \frac{k_2}{k_1} \beta_1} P_{F3A} + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \frac{k_1}{k_2} \beta_2} P_{F3B} \dots (11)$$

$P_{F3A}$  と  $P_{F3B}$  の物理的な意味を考える。 $P_{F3A}$  は、支川1が疎通能  $z_0/k_1$  を持ったときの支川1の危険度であり、支川1のピーク流量の確率分布関数に  $z_0/k_1$  を代入した値を求め、それを1から差し引くことにより求められる。 $P_{F3B}$  も同様である。したがって、 $P_{F3A}$ ,  $P_{F3B}$  は、おのおのの支川のピーク流量の確率分布が与えられれば、容易に求められる。

両支川の疎通能を本川疎通能で無次元化すると、式(7), (8)は支川疎通能の無次元量  $X_0, Y_0$  と、 $P_{F3A}$ ,  $P_{F3B}$  で表わされる。このとき、最終的に式(7), (8)は次のようなきわめて簡単な式で表わされる。

$X_0 + Y_0 > 1$  のとき、

$$P_{F3} = \frac{1}{1-\delta} (P_{F3B})^{1-(1-\delta)X_0}$$

$$+ \frac{1}{1-1/\delta} (P_{F3A})^{1-(1-1/\delta)Y_0} \text{ for } \delta \neq 1$$

$$P_{F3} = P_{F3A} [1 - (X_0 + Y_0 - 1) \ln P_{F3A}] \text{ for } \delta = 1 \dots (12)$$

ただし、

$$X_0 = \begin{cases} X_0 & \text{for } X_0 < 1 \\ 1 & \text{for } X_0 \geq 1 \end{cases}$$

$$Y_0 = \begin{cases} Y_0 & \text{for } Y_0 < 1 \\ 1 & \text{for } Y_0 \geq 1 \end{cases}$$

また、 $X_0 + Y_0 \leq 1$  のとき、

$$P_{F3} = 0 \dots (12)'$$

ここに、 $X_0 = k_1 x_0 / z_0$ ,  $Y_0 = k_2 y_0 / z_0$ ,  $\delta = k_2 \beta_1 / k_1 \beta_2$  この式は、次のような特徴をもっている。

- ①  $P_{F3A}$ ,  $P_{F3B}$  は、おのおのの支川のピーク流量の確率分布から求められ、それらの結合確率分布を知る必要がない。これらの値は年最大値資料からも求めることができる。
- ② 一変数の水流量が再現期間5年を越える分布については、非毎年資料と毎年資料による再現期間がほぼ一致することが知られているので、 $P_{F3A}$ ,  $P_{F3B}$  は毎年資料から計算できることになる(補遺3参照)。
- ③  $\beta$  の値は、本来、非毎年資料から計算しなければならない。しかしながら、年最大値分布の標準偏差を  $\sigma'$  とするとき、 $\beta$  は次式から計算できることが知られている(補遺3参照)。

$$\beta = 1 / (0.7797 \sigma') \dots (13)$$

よって、 $k$  の値が流域面積比等の関数として与えられておれば、 $\delta$  の値も毎年資料から簡単に計算することができる。結果的に  $P_{F3}$  はそれぞれの支川のピーク流量の毎年資料と、式(12)に基づいて簡単に推定することができる。

b)  $x, y$  が完全従属の場合 ( $\rho=1$ ) の解析

図-3のケース4の場合について、本川の氾濫危険度  $P_{F3}$  を導くと、次式のように示される。

$$P_{F3} = \text{Prob.} \{z > z_0, x_0 \leq z_0/k_1, y_0 \leq z_0/k_2\}$$

$$= \int_{(z_0 - k_1 x_0)/k_2}^{\infty} \beta_2 \cdot \exp(-\beta_2 y) dy$$

$$= \exp\{-\beta_2(z_0 - k_1 x_0)/k_2\}$$

$$\dots \text{for } m \leq (z_0 - k_1 x_0)/k_2$$

$$P_{F3} = \int_{z_0/(k_1 + m k_2)}^{\infty} \beta_1 \cdot \exp(-\beta_1 x) dx$$

$$= \exp\{-\beta_1 z_0 / (k_1 + m k_2)\}$$

$$\dots \text{for } (z_0 - k_1 x_0)/k_2 x_0 < m \leq k_1 y_0 / (z_0 - k_2 y_0)$$

$$P_{F3} = \int_{(z_0 - k_2 y_0)/k_1}^{\infty} \beta_1 \cdot \exp(-\beta_1 x) dx$$

$$= \exp\{-\beta_1(z_0 - k_2 y_0)/k_1\}$$

$$\dots \text{for } m > k_1 y_0 / (z_0 - k_2 y_0) \dots (14)$$

同様に、ケース1~3について本川氾濫危険度  $P_{F3}$  を求め整理した。この場合、図-6に示す  $x_0$ - $y_0$  平面で、新たなケースI, II, III, IVに区分して考えなければいけない。それぞれのケースに対する本川の氾濫危険度は、次式のように示される。

$$P_{F3} = \begin{cases} \exp\{-\beta_1 \beta_2 z_0 / (k_1 \beta_2 + k_2 \beta_1)\} & \text{: ケース I} \\ \exp\{-\beta_1(z_0 - k_2 y_0)/k_1\} & \text{: ケース II} \\ \exp\{-\beta_2(z_0 - k_1 x_0)/k_2\} & \text{: ケース III} \\ 0 & \text{: ケース IV} \end{cases} \dots (15)$$

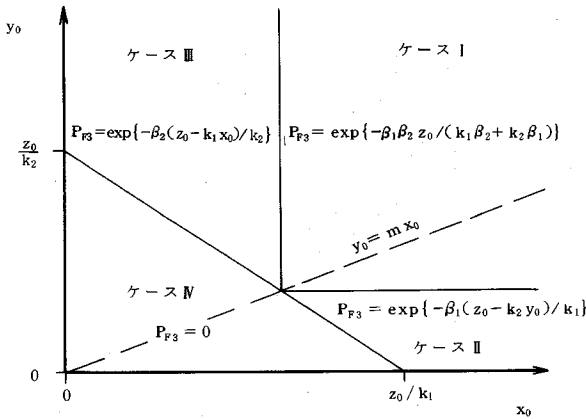


図-6 各領域の危険度  $P_{F3}$  ( $\rho=1$  のとき)

さらに、 $x_0, y_0$  を無次元化し、式 (15) を無次元量  $X_0, Y_0$  と  $P_{F3A}, P_{F3B}$  で表わすと次式のようなになる。この場合も、 $P_{F3}$  は両支川のそれぞれの確率分布から容易に推定できることとなる。

$X_0 + Y_0 > 1$  のとき、

$$P_{F3} = \begin{cases} P_{F3B}^{(1-X_0)} & \text{for } X_0 \leq 1/(1+\delta) \\ P_{F3A}^{1/(1+\delta)} & \text{for } X_0 > 1/(1+\delta) \\ & \text{and } Y_0 > \delta/(1+\delta) \\ P_{F3A}^{(1-Y_0)} & \text{for } Y_0 \leq \delta/(1+\delta) \end{cases} \dots (16)$$

また、 $X_0 + Y_0 \leq 1$  のとき、

$$P_{F3} = 0 \dots (16)'$$

(3) 等危険度線図

前記 a), b) の解析結果をもとに、両支川の無次元疎通能  $X_0, Y_0$  と、本川の氾濫危険度  $P_{F3}$  の関係を等危険度線図として示す。  $P_{F3}$  は本来  $x_0, y_0, z_0$  の3変数の関数である。よって、二次元平面上では、 $P_{F3}$  が一定の条件を表わす曲線を描くことはできない。しかし、 $x_0, y_0$  を  $z_0$  で無次元化すると、 $P_{F3}$  は無次元量  $X_0, Y_0$  の2変数の関数となるため、二次元平面上で  $P_{F3}$  が一定の条件を表わす曲線を描くことができる。そこで、横軸を  $X_0$ 、縦軸を  $Y_0$  とする平面上で、「 $P_{F3} = \text{一定}$ 」の等危険度線を描いた。これを、本支川問題での等危険度線とよぶ。

図-7には、式 (12)、式 (16) をもとに、 $\delta=0.5$ 、 $P_{F3A}=e^{-1}$ 、 $P_{F3B}=e^{-2}$  と固定したうえで、 $P_{F3}$  をパラメーターとして作成した等危険度線図を示している。図中には  $\rho=0.5$  として、式 (5)、(6) を数値計算した結果も示している。実線は完全独立 ( $\rho=0$ ) のときの解、破線は完全従属 ( $\rho=1$ ) のときの解、一点鎖線は  $\rho=0.5$  のときの数値解である。また、図-8には、 $P_{F3}$  を固定したうえで、 $\beta_1/\beta_2$  をパラメーターとして作成した等危険度線図を示している。これは、氾濫危険度を一定として、たとえば流域面積比が変わったとき、両支川の疎通能がどのような関係でなければならないかを表わし

ている。

これらの図より、次のことがわかる。

- ① 両支川の疎通能を固定して、 $\rho=0$  と  $\rho=1$  の場合に対して、本川の氾濫危険度  $P_{F3}$  を比較する。たとえば、 $(X_0, Y_0) = (0.5, 0.8)$  に対して  $\rho=0$  のとき  $P_{F3} \approx 1/3$ 、 $\rho=1$  のとき  $P_{F3} \approx 1/2.5$  となる。このとき、 $\rho=0$  の場合より  $\rho=1$  のほうが、本川の氾濫危険度  $P_{F3}$  を高く評価している。これは、次の理由による。 $\rho=1$  の場合では、一方の支川のピーク流量が大きいたまには、常に他方の支川のピーク流量も大きいため、本川へ流入する流量は大きくなる。 $\rho=0$  の場合では、両支川のピーク流量に相関がないため、一方の支川のピーク流量が大きいたまには、他方の支川のピーク流出量があまり大きくない場合も多い。よって、平均的には本川へ流入する流量は、 $\rho=1$  の場合ほど大きくならないためである。

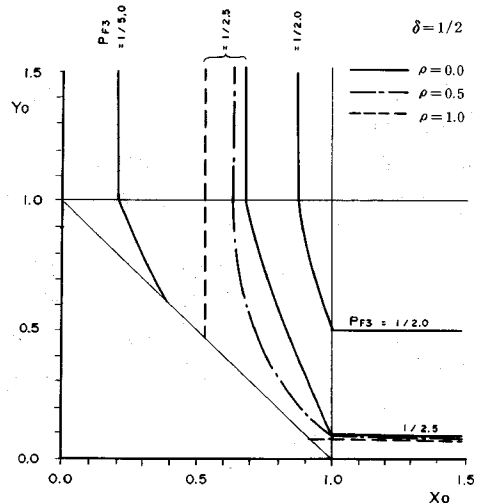


図-7 等危険度線図 ( $\delta=0.5$ ,  $P_{F3A}=e^{-1}$ ,  $P_{F3B}=e^{-2}$ )

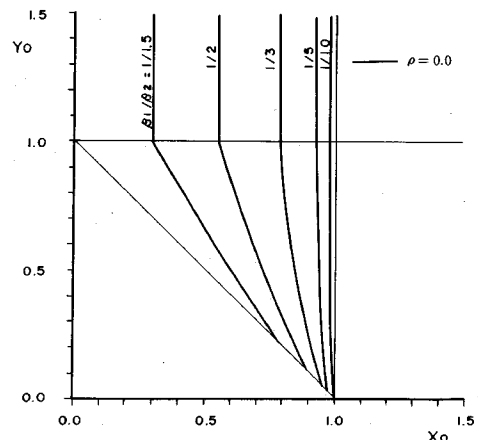


図-8 等危険度線図 ( $P_{F3}=1/3$ ,  $P_{F3A}=e^{-1}$ ,  $k_1=k_2=1$ )

- ② 当然のことながら、 $\rho=0.5$ の解は $\rho=0$ と $\rho=1$ の等危険度線の間位置している。
- ③  $\rho=0$ の場合、 $\beta_1/\beta_2=1/10$ 程度になると等危険度線は $y$ 軸にほとんど平行になる。つまり、支川1の平均的なピーク流量が支川2の10倍程度、概していえば、支川1の流域面積が支川2の10倍程度になれば、支川2の疎通能 $Y_0$ の変化が、本川の氾濫危険度に及ぼす影響は小さなものとなる。

4. 等危険度線図の利用

導かれた本川の氾濫危険度は、結果的に非常に簡単な式(12)、(16)で表わされる。よって、等危険度線図の作成も容易である。以下に実務において、本支川問題の等危険度線を描く方法と利用の方法を示す。

(1) 等危険度線の描き方

- ① 本川の疎通能 $z_0$ を仮定する。
- ② 代表的な洪水ハイドログラフより、 $k_1, k_2$ を求めておく。
- ③ 両支川の年最大ピーク流量の標準偏差より、 $\beta_1, \beta_2$ を求める。これと $k_1/k_2$ の値により、 $\delta$ が求まる。
- ④ 両支川の年最大ピーク流量資料をガンベル分布により確率評価し、 $x_0, y_0$ に対する超過確率 $P_{F1}, P_{F2}$ を求めておく。これに $z_0/k_1, z_0/k_2$ を代入し、 $\lambda$ で割ることにより $P_{F3A}, P_{F3B}$ を求める。
- ⑤ まず、本川の氾濫危険度 $P_{F3}$ (年確率の意味での本川氾濫危険度は $\lambda \cdot P_{F3}$ となる。ただし、両支川の $\lambda$ が一致しているものとする)を仮定する。 $\rho=0$ に対しては、式(12)より $X_0$ を変えて $Y_0$ を計算し、これを $X_0-Y_0$ 平面上にプロットすれば、1つの $P_{F3}$ に対する等危険度線が求まる。さらに、いくつかの $P_{F3}$ に対して同じことを繰り返すことにより、複数の等危険度線が描ける。 $\rho=1$ のときには、 $\rho=0$ と同様に式(16)から求められる。たとえば、図-9は $\delta=1/1.6$ に対して等危険度線を描いたものである。
- ⑥ 同様に、 $z_0$ を種々変えたものについても $P_{F3}$ を求めておき、同じ危険度となる $z_0$ の等値線を描く。たとえば、図-10は $P_{F3}$ を所与としたときの、 $z_0$ の等値線を描いている。
- ⑦ 図-9、図-10中の $P_{F1}, P_{F2}$ は次のようにして描く。 $x_0=(z_0/k_1)X_0$ より、 $X_0$ を $x_0$ に変換し、④で求めた $P_{F1}$ に $x_0$ を代入すれば、 $x_0$ に対する $P_{F1}$ が求まる。 $P_{F2} \sim Y_0$ の関係についても同様である。

なお、図-9、10では簡単のため $\lambda=1$ としている。

(2) 利用の方法

- ① たとえば、ある水系を対象として図-9に示すような等危険度線図が描かれたとする。現在の本川の

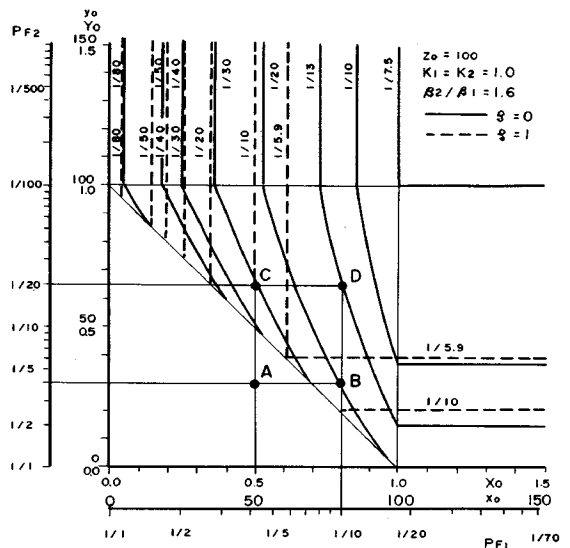


図-9 等危険度線図の例 (パラメーター： $P_{F3}$ )

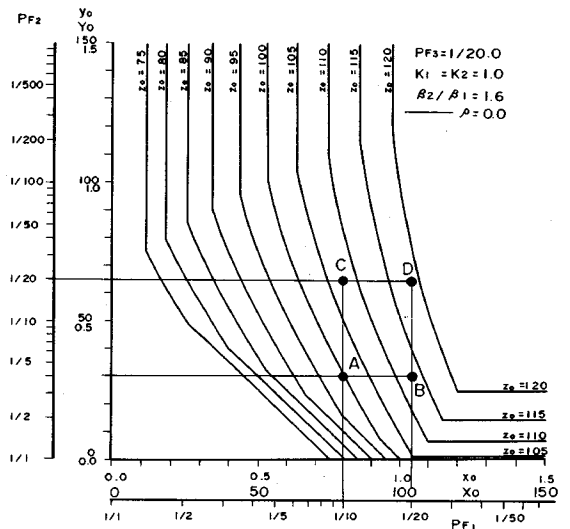


図-10 等危険度線図の例 (パラメーター： $z_0$ )

疎通能 $z_0$ は $100 \text{ m}^3/\text{s}$ 、支川1は $50 \text{ m}^3/\text{s}$ 、支川2は $30 \text{ m}^3/\text{s}$ とする(A点)。このときの本川の氾濫危険度は0( $\because 100 > 50 + 30$ )である。支川2が改修され危険度 $1/20$ 、疎通能 $65 \text{ m}^3/\text{s}$ まで改修されたとすると(C点)、 $\rho=0$ の場合には本川の氾濫危険度 $P_{F3}$ が $0 \rightarrow 1/30$ 、 $\rho=1$ の場合には $0 \rightarrow 1/10$ と変化することがわかる(A点 $\rightarrow$ C点)。また、支川1が危険度 $1/10$ まで改修された場合(B点)、両支川が改修された場合(D点)など、支川の改修による本川の氾濫危険度の増大が一目で理解できる。

- ② 本川の氾濫危険度を固定して、同じ危険度となる本川の疎通能の等値線を疎通能ごとに数本描く。た



たとえば、図—10に示すような等値線が描かれたとすれば、この図より、支川1の疎通能が80 m<sup>3</sup>/s、支川2が30 m<sup>3</sup>/s、本川が100 m<sup>3</sup>/sの水系において(A点)、支川1が改修され危険度が1/20に引き上げられるとき(B点)、本川の氾濫危険度を現状の1/20のまま保持するためには、本川の疎通能を115 m<sup>3</sup>/s程度まで引き上げる必要のあることがわかる(A点→B点)。また、支川2が危険度1/20まで改修された場合(C点)、両支川が改修された場合(D点)など、支川の改修に対して、本川の氾濫危険度を保持するためには、どの程度本川の疎通能を増大させればよいかが一目で理解できる。

5. 結 語

本研究では、支川の改修が本川の氾濫危険度に与える影響を把握するため、2つの支川のピーク流量の結合密度関数が2変数指数分布に従うと仮定して、本川の氾濫危険度の式を理論的に導いた。

氾濫危険度の式が初等関数で表わし得るのは、両支川のピーク流量の相関母数が、 $\rho=0$ と $\rho=1$ の特別な場合についてのみである。これらの式は非常に簡単な形式で表わされる。かつ、これから計算される値は、本川の氾濫危険度を最も低く、あるいは最も高く評価する。一般的には、本川の氾濫危険度はこれらの値の中間的な値をとる。計画の最安全側、最危険側を知ることは、実務において有効な情報になると考えられる。

合流点の洪水頻度は、基本的に全資料(非毎年資料)から解析されなければならない。結果的に得られた氾濫危険度の式は、両支川の年最大ピーク流量資料(毎年資料)を用いて評価することができる。実務上は、年最大値資料でしか資料が整理されていないことも多い。この意味からも、得られた式は実用的であるといえる。

謝 辞：本研究は、第1著者が業務としてかかわった「水系安全度評価調査(建設省近畿地方建設局)」に関連して行われた。調査の過程で、分析の基本となる合流点の氾濫確率の式について、いまだ十分な検討がなされていないことがわかった。少なくとも実用性の高い式は得られていなかった。

よって、別途そのような式が導けないか検討した結果を本論文に示した。調査の過程でご指導、ご議論いただくとともに、本論文の発表についてご理解を賜った建設省近畿地方建設局河川計画課の関係各位に心から感謝の意を表する。

補遺 1

二変数確率分布に基づく、本支川問題の取り扱いが実

用化されなかった主因の1つは、次の点であったことが、査読者の1人より指摘された(査読意見引用)。

「ピーク流量のデータは統計的に不安定であり、また日雨量とピーク流量の関係も一義的でないこと、さらに二変数あるいは多変数の確率分布のパラメーターを同定するにはデータ数が不十分であったこと等の方が、実務上の障害となった原因としては大きいと考えられる。」

補遺 2

越水型(破堤は考えない)の場合には、各支川を流下する流量  $x'$ ,  $y'$  は、疎通能  $x_0$ ,  $y_0$  にほぼ等しい。破堤したとしても、氾濫原の比較的小さい支川の破堤であれば、氾濫原はすぐ満水状態となり、 $x_0$  よりやや小さいか、ほぼそれに等しいピーク流量が流下するであろう。破堤し、かつ非常に大きい氾濫原をもつ場合は、 $x'$  は  $x_0$  よりかなり小さな値になるので、 $x_0$ ,  $y_0$  に1より小さい適当な補正係数を乗ずるなどの修正が必要となろう。

このように、式(1)から導かれる結果は氾濫危険度を最も高く評価する。氾濫危険度を所与とすれば、より大きい施設を必要とすることになる。すなわち、本論文で導いた結果はやや安全側の計画を与えることになる。実務上はこの方が望ましい。

補遺 3

非毎年資料が指数分布に従うとき、その超過確率を  $P_{FE}$  とする。このとき、年最大値はガンベル分布に従う。その超過確率を  $P_{FG}$  とする。このとき、 $P_{FE}$ ,  $P_{FG}$  は次式で表わされる。

$$P_{FE} = \exp(-\beta x) \dots \dots \dots (17)$$

$$P_{FG} = 1 - \exp[-\lambda \exp(-\beta x)] \dots \dots \dots (18)$$

ここに、 $\lambda$ : 年平均洪水生起頻度

ガンベル分布の積率解より、 $\beta = 1/0.7797 \sigma'$  ( $\sigma'$  は年最大値系列の標準偏差である)である<sup>9)</sup>。よって、指数分布の尺度母数  $\beta$  は年最大値系列から計算できる。

また、 $\lambda \exp(-\beta x) \ll 1$  のとき、

$$\begin{aligned} P_{FG} &= 1 - [1 - \lambda \exp(-\beta x) + \frac{1}{2} \{\lambda \exp(-\beta x)\}^2 \dots] \\ &= \lambda \exp(-\beta x) - \frac{1}{2} \{\lambda \exp(-\beta x)\}^2 + \dots \\ &= \lambda P_{FE} - \frac{1}{2} (\lambda P_{FE})^2 + \dots \dots \dots (19) \\ &\approx \lambda P_{FE} \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

再現期間が5年を超えるとき実用上、式(19)から式(20)の近似が成り立つ。すなわち  $P_{FG} (\approx \lambda P_{FE}) < 1/5$  である。このとき、式(19)で第1項は0.2以下、第2項は0.02以下となるので、第2項以下を無視するときの誤差は10%以下となる。再現期間で10%以下の誤差は実用上無視できる。このとき、

$$P_{FE} \doteq \frac{1}{\lambda} P_{FC} \dots \dots \dots (21)$$

## 参 考 文 献

- 1) 長沢敏夫 (東北地方建設局, 河川部計画課): 複合確率と河川工事計画におけるその応用について, 第14回建設省技術研究会報告, 自由課題 B-3.1, pp.791~796, 1960.
- 2) 長尾正志: 洪水処理計画に関する確率論的研究, 京都大学防災研究所年報, 第10号 B, pp.41~51, 1967.3.
- 3) 石原安雄・瀬能邦雄: 氾濫の確率論的評価について, 第25回土木学会年次学術講演会講演概要集, pp.195~198, 1970.
- 4) 高棹琢馬・鈴木藤一郎: 河川の疎通能力の評価に関する2・3の考察, 第27回土木学会年次学術講演会講演概要集, pp.421~424, 1972.
- 5) 井沢竜夫: 二変数の $\Gamma$ -分布について (降水量の分布第2報), 気象と統計, 第4巻, 第1号, pp.9~15, 1953.
- 6) 井沢竜夫: 二変数の $\Gamma$ -分布について (続), 気象と統計, 第4巻, 第2号, pp.15~19, 1953.
- 7) 長尾正志・角屋 睦: 二変数ガンマ分布とその適用に関する研究 (1)—二変数指数分布の基礎理論—, 京都大学防災研究所年報, 第13号 B, pp.105~133, 1970.3.
- 8) 江藤剛治・室田 明: 単一貯留施設による治水の安全度に関する理論的研究, 土木学会論文集, 第351号, II-2, pp.163~171, 1984.11.
- 9) たとえば, 土木学会水理公式集改訂委員会: 水理公式集一昭和46年改訂版一, 第1編基礎編, 17.3 極値分布, (社)土木学会, p.147, 1971.11.

(1986.9.22・受付)