

研究展望

波浪問題における領域分割法と境界要素法

THE METHOD OF POTENTIAL CONTINUATION AND THE BOUNDARY ELEMENT METHOD IN WATER WAVE PROBLEMS

井島 武士*

By Takeshi IJIMA

はしがき

水面波の境界値問題に対処するには、解析的方法¹⁾が望ましいが、それではごく限られた問題しか解決することができない。現在では電子計算機によって、多くの問題が数値解によって処理されている。その代表的方法として有限要素法と境界要素法が挙げられる。著者はそれらと別なポテンシャル接続法⁴⁾(領域分割法)を見出して種々の問題を取り扱ったが、引き続き周辺積分法(境界要素法^{8),10)-12),20)}を独立に展開して、前者よりも広範で多様な問題に対応できることを示してきた。この機会を借りてそれらの基本的な考え方を明確に解説し併せて応用例を挙げて、参考に供したいと思う。

1. 流体運動と境界条件

(1) 流体運動

重力の場合、静止状態から始まった非粘性非圧縮性完全流体の運動とみなされる水面波の運動は、渦度保存則により速度ポテンシャルをもつことが保証される。

$(x-z)$ 平面内の二次元運動として静水面に原点 0, 水平に x 軸, 鉛直に z 軸をとり, 時間を t で表わすと速度ポテンシャル Φ は質量保存則により, ラプラスの方程式 (1) を満足し, 流体運動は運動量保存則により流速 u, w と圧力 p の 3 要素で確定し, ρ を流体密度, g を重力の加速度として, 式 (2), (3) で表わされる。

$$\nabla^2 \Phi = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$(u, w) = (\Phi_x, \Phi_z) \dots \dots \dots (2)$$

$$p/\rho = -\Phi_t - (\Phi_x^2 + \Phi_z^2)/2 - gz \dots \dots \dots (3)$$

(2) 境界条件

(i) 境界条件を異にする 2 つの流体間または流体と物体間の境界面においては, 運動量保存と質量保存の 2 法則によって境界条件が与えられる。たとえば自由表面 $F = z - \zeta = 0$ では大気圧一定 $Dp/Dt = 0$ の条件 (運動量保存) と $DF/Dt = 0$ の条件 (質量保存) によって次の 2 式が成り立つ。

$$\Phi_t = -g\zeta - (\Phi_x^2 + \Phi_z^2)/2 \quad (z = \zeta) \dots \dots \dots (4)$$

$$\zeta_t = -\Phi_z - \zeta_x \Phi_x \quad (z = \zeta) \dots \dots \dots (5)$$

(ii) 流体中の固定仮想面においては, すべての時刻において, 一方の流体の流速と圧力は, 他方のそれぞれと等しくなければならない。仮想面への切線と法線をそれぞれ s, n とし, 切線 s の x 軸とのなす角度を反時計回りに θ とすると次の関係式がある。

$$\partial/\partial x = \cos\theta \cdot \partial/\partial s + \sin\theta \cdot \partial/\partial n \dots \dots \dots (6)$$

$$\partial/\partial z = \sin\theta \cdot \partial/\partial s - \cos\theta \cdot \partial/\partial n$$

$$(\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial z)^2 = (\partial/\partial n)^2 + (\partial/\partial s)^2 \dots \dots \dots (7)$$

仮想面の両側の量を添字 1, 2 で区別すると, 左右の流速が等しいためには仮想面上で

$$(\partial\Phi/\partial n)_1 = (\partial\Phi/\partial n)_2, (\partial\Phi/\partial s)_1 = (\partial\Phi/\partial s)_2 \dots \dots (8)$$

でなければならないが, 後者は仮想面上で $\Phi_1 = \Phi_2$ ならば当然成り立つから, 上式の条件は次式と同等である。

$$(\partial\Phi/\partial n)_1 = (\partial\Phi/\partial n)_2, \Phi_1 = \Phi_2 \dots \dots \dots (9)$$

また式 (3), (7) からわかるように, すべての時刻で式 (9) が成立すれば, 式 (3) から $p_1 = p_2$ すなわち両側の圧力は等しく, 式 (9) は仮想面で運動が連続であるための必要かつ十分の条件であることは明らかである。

(iii) 物体と流体との相互運動を考慮すべき境界面に

* 正会員 工博 九州大学名誉教授・東和大学教授
(〒819-01 福岡市西区今宿青木 979)

Keywords: numerical method, water wave problem

おいても、条件を規定するのは質量保存と運動量保存の法則であり、これによってポテンシャルをもつ流体運動においては、常に境界面に沿う Φ と $\partial\Phi/\partial n$ との力学的関係が唯一的に与えられる。

(iv) 広い流体域では、無限遠での仮想面における放射条件(Radiation Condition)として次式が適用される。

$$\partial\Phi/\partial x = -k/\sigma \cdot \partial\Phi/\partial t \dots\dots\dots (10)$$

ここで k は周波数 σ に対する波数である。この条件は厳密には証明されていないが、多くの計算例においては不合理は起こらないとされている^{21), 23)}。以下に述べる数値解法においては特に境界条件に関する理解が基本的に重要である。

2. ポテンシャル接続法 (領域分割法)

定常状態での微小振幅波の問題では、流体域が多少複雑な形状をもつ場合でも、それが水平面と鉛直面を境界面とする矩形領域の組合せであるときには比較的簡単に解が求まることが多い。

一般に矩形領域ではラプラスの式 (1) を $\Phi(x, z) = \phi(x, z) \cdot \exp(i\sigma t) = f(x) \cdot \varphi(z) \cdot \exp(i\sigma t)$ として、変数分離法により x および z に関する2個の常微分方程式に分離した場合、 $\varphi(z)$ に関する方程式に対する上端 (たとえば静水面 $z=0$) および下端 (たとえば水底 $z=-h$) における境界条件が、 α と β を定数とする式 (11) の形の1次式で与えられるときは、 $\varphi(z)$ は式 (11) で決まる固有値に対応する直交関数項より成る。

$$ad\varphi/dz + \beta\varphi = \gamma \dots\dots\dots (11)$$

そして $f(x)$ は2階の常微分方程式を満足すべきことから、それは $\gamma=0$ とした場合の、独立な2組の定数係数 A_s と B_s をもつ級数の和で表わされ、 $\phi(x, z)$ は $f(x) \cdot \varphi(z)$ と、 $\gamma \neq 0$ に対する特解 $F(x) \cdot G(z)$ の和として次の形で表わされる。 s は整数である。

$$\phi(x, z) = \sum_{s=0}^{\infty} [A_s f_s(x) + B_s g_s(x)] \cdot \varphi_s(z) + F(x) \cdot G(z) \dots\dots\dots (12)$$

上式は次の特徴をもっている。

(a) $\varphi_s(z)$ ($s=0, 1, 2, \dots$) は直交関数系をなす。すなわち

$$\int_{-h}^0 \varphi_s(z) \varphi_t(z) dz = 0 \quad (\gamma \neq s) \dots\dots\dots (13)$$

(b) A_s, B_s は互いに独立な定数である。

(c) $F(x) \cdot G(z)$ は式 (11) の右辺 $\gamma \neq 0$ の場合の特解である。

$\gamma=0$ の場合はもちろん $F(x) \cdot G(z)$ は存在しない。水面波の問題での自由表面条件は式 (11) で $\gamma=0$ の形であり、また水底条件は $\beta=\gamma=0$ の場合に相当する。

2つの流体域が鉛直仮想面で相接するときは、両者の

流体運動は仮想面上で連続でなければならないから、式 (9) の2条件、すなわちポテンシャルとその法線勾配の連続性が成立せねばならない。仮想面の x 座標を $x=l$ とし、左右の領域のポテンシャルを肩符 (1), (2) で区別すると、式 (12) を用いて、式 (9) は次のようになる。

$$\sum_{s=0}^{\infty} [A_s^{(1)} f_s^{(1)}(l) + B_s^{(1)} g_s^{(1)}(l)] \varphi_s^{(1)}(z) + F^{(1)}(l) \cdot G^{(1)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} [\text{肩符 (2)}] \cdot \varphi_s^{(2)} + F^{(2)}(l) \cdot G^{(2)}(z) \dots\dots\dots (14)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} [A_s^{(1)} f_s^{(1)}(l) + B_s^{(1)} g_s^{(1)}(l)] \varphi_s^{(1)}(z) + F^{(1)}(l) \cdot G^{(1)}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} [\text{肩符 (2)}] \cdot \varphi_s^{(2)}(z) + F^{(2)}(l) \cdot G^{(2)}(z) \dots\dots\dots (15)$$

上式で f'_s, g'_s 等は x に関する微分を表わす。上式の各項に $\varphi_s^{(1)}(z)$ を乗じて z について $-h$ から 0 までの積分を行い

$$\int_{-h}^0 \varphi_s^{(1)} \cdot \varphi_s^{(1)} dz = a_{ss}, \quad \int_{-h}^0 \varphi_s^{(1)} \cdot \varphi_t^{(2)} dz = b_{rs},$$

$$\int_{-h}^0 G^{(1)} \cdot \varphi_s^{(1)} dz = C^{(1)}, \quad \int_{-h}^0 G^{(2)} \cdot \varphi_s^{(1)} dz = C^{(2)} \dots\dots\dots (16)$$

とおくと $A_s^{(1)}, B_s^{(1)}, A_s^{(2)}, B_s^{(2)}$ に関する次の連立方程式を得る。

$$a_{ss} [A_s^{(1)} f_s^{(1)}(l) + B_s^{(1)} g_s^{(1)}(l)] + C^{(1)} F^{(1)}(l) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{rs} [\text{肩符 (2)}] + C^{(2)} F^{(2)}(l) \dots\dots\dots (17)$$

$$a_{ss} [A_s^{(1)} f_s^{(1)}(l) + B_s^{(1)} g_s^{(1)}(l)] + C^{(1)} F^{(1)}(l) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{rs} [\text{肩符 (2)}] + C^{(2)} F^{(2)}(l) \dots\dots\dots (18)$$

上式は $s=0, 1, 2, \dots$ について成立する。

図-1のように $x=m$ および l により分割される流体域 (I)(II)(III) があり、(II) から波が入射し、(I) を通って (III) に至るとするときは、領域 (II) では入射波 H_i に対応する $A_s^{(2)}$ を既知、反射波 H_r に対応する $B_s^{(2)}$ を未知、領域 (III) では通過波 H_t に対応する $A_s^{(3)}$ を未知、それと逆方向に進行する波 $B_s^{(3)}$ は存在しない ($B_s^{(3)}=0$) とすると、 $x=l$ におけると同様に $x=m$ においても、式 (17), (18) に対応する2組の式が存在する。結局4組の未知数 $A_s^{(1)}, B_s^{(1)}; B_s^{(2)}; A_s^{(3)}$ に対して4組の条件式が、 $s=0, 1, 2, \dots$ のそれぞれに対して存在する

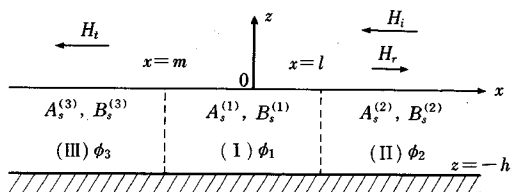


図-1 領域の分割

から、所要の s の値までのすべての条件式を連立方程式として解くことにより、定数係数が確定され、ポテンシャル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 がすべて確定する。具体例については文献4)~7), 9)等を参照されたい。

3. 境界要素法

上記の方法は矩形流体域については有効であるが、任意形状の流体域については、適用できない。この場合は以下に述べる境界要素法(周辺積分法)が、簡明かつ有効な方法である。

水面波の境界値問題に、この方法を用いた最初は Hwang and Tuck(1970)²⁾と Lee(1971)³⁾であろう。両者は同じ問題(波の入射による一定水深の泊地内の波の分布)を0次の第1種ハンケル関数をグリーン関数として取り扱っている。前者では境界上に分布する未知の source potential による分散波と、無限遠では重複波となるような入射波・反射波の重畳として泊地内の波を表わし、泊地境界面で法線流速が0となるべき条件から source を算出する。後者は港口を仮面として泊地内外を2領域に分割し、各領域にグリーンの公式を適用して境界上のポテンシャルを定めるものである。以下著者の方法は、Lee³⁾の方法を任意水深の二次元および三次元問題に拡張したものにあたり、種々の型式の境界条件に適応し、非定常問題、有限振幅波問題などにも対応することができる。

(1) 原理

(i) 三次元の (x, y, z) 空間内の閉領域 Ω の内部およびその境界面 Γ 上で微分可能な2つの独立な連続関数 ϕ および ϕ^* に関しては、グリーンの定理により次式が成立する。

$$\int_{\Omega} [\phi \nabla^2 \phi^* - \phi^* \nabla^2 \phi] d\Omega - \int_{\Gamma} (\phi \cdot \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - \phi^* \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n}) d\Gamma = 0 \quad (19)$$

ここで n は Γ 上の外向き法線である。領域 Ω 内の点 $i(=(x_i, y_i, z_i))$ と点 (x, y, z) との距離を $r(=[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2]^{1/2})$ とし、 $\phi^*=1/r$ とすると ϕ^* は $r \neq 0$ に対してラプラスの方程式 $\nabla^2 \phi^*=0$ を満足する。点 i を中心とする微小半径 ϵ の球を除外し、 $r \neq 0$ として式(19)に $\phi^*=1/r$ とおいた後 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ると次式を得る。

$$\phi(i) = \phi(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\Omega} \frac{\nabla^2 \phi}{r} d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma \right] \quad (20)$$

さらに関数 ϕ がポテンシャル関数であるときは $\nabla^2 \phi = 0$ であるから、上式から

$$\phi(i) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma \quad (21)$$

これは領域 Ω 内部の任意点におけるポテンシャル関数 ϕ の値が、境界上の値とその法線勾配により定まることを示している。同じことが二次元 (x, z) 空間でも成立し、この場合は式(19)で

$$\phi^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad r = [(x-x_i)^2 + (z-z_i)^2]^{1/2} \quad (22)$$

とおけば、 $\nabla^2 \phi^* = 0$ が満足され、 $\nabla^2 \phi = 0$ の場合は式(21)の代わりに次式が得られる。

$$\phi(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\ln \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] d\Gamma \quad (23)$$

(ii) 逆に領域 Ω 内の点 i における ϕ の値が、式(21)または(23)により境界 Γ 上の ϕ と $\partial \phi / \partial n$ だけで決まるような関数 ϕ はポテンシャル関数として領域内でラプラスの方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ を満足する。このことはラプラスの方程式を解くことと、積分方程式(21)または(23)を解くこととは同等であることを意味し、境界上の ϕ と $\partial \phi / \partial n$ だけを確定できれば、問題は解決されたことになる(以下では二次元問題について述べる)。

(iii) 式(23)は領域内の点 i での ϕ と境界上の ϕ および $\partial \phi / \partial n$ の関係を表わす積分方程式とみると、点 i を境界上に移した場合は、式(23)は境界上の ϕ と $\partial \phi / \partial n$ の間に成立する関係を与える積分方程式に移行することになる。そこで式(20)を導くのと同様にして境界上の点 i を中心とする半径 ϵ の半円を除外した部分について計算を行い、次に $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ると、次の積分方程式を得る。

$$\phi(i) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left[\ln \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \right] d\Gamma \quad (24)$$

上式中の ϕ と $\partial \phi / \partial n$ は境界上の値で、 R は境界上の点 i と点 (x, z) の距離である。右辺の積分を離散化して和の形に直すと、式(24)は境界上の ϕ と $\partial \phi / \partial n$ に関する1次方程式を与える。

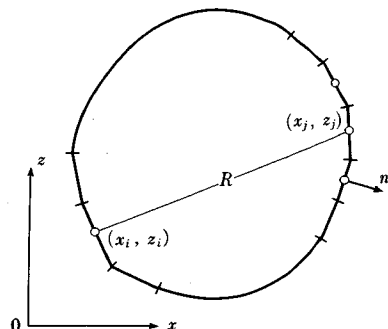


図-2 境界の分割近似

(iv) 積分方程式 (24) における被積分関数 ϕ と $\partial\phi/\partial n$ は境界線上に連続的に分布する量である。これを離散化する方法²⁶⁾は必要な近似度に応じて種々考えられているが、最も簡単な方法は、図-2 に示すように、まず境界線を適当な N 個の点で分割し、各点を直線で結んだ多角形で近似する。次におのおのの分割要素の中央点 $j(= (x_j, z_j))$ における ϕ と $\partial\phi/\partial n$ の値がその要素上に一定値で分布すると仮定する。すると式 (24) の右辺は次のように近似される。

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left(\ln \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \right) d\Gamma \doteq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial\phi(j)}{\partial n} \cdot \int_{\Delta r_j} \ln \frac{1}{R} d\Gamma - \phi(j) \int_{\Delta r_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) d\Gamma \right)$$

ここで、

$$E_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta r_j} \ln \frac{1}{R} d\Gamma, \quad \bar{E}_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta r_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) d\Gamma \dots\dots\dots (25)$$

とおくと、式 (24) は次式で近似される。

$$\phi(i) = \sum_{j=1}^N \left(E_{ij} \bar{\phi}(j) - \bar{E}_{ij} \phi(j) \right) \quad \text{または、} \\ \sum_{j=1}^N \left(F_{ij} \phi(j) - E_{ij} \bar{\phi}(j) \right) = 0 \dots\dots\dots (26)$$

ここで $\bar{\phi} = \partial\phi/\partial n, F_{ij} = \delta_{ij} + \bar{E}_{ij},$

$$\delta_{ij} = 0 (j \neq i); = 1 (j = i) \dots\dots\dots (27)$$

式 (26) は境界上の N 個の点 (i) について成り立つので、 ϕ と $\bar{\phi}(= \partial\phi/\partial n)$ に関する総数 N 個の連立一次方程式を表わしている。

(v) 式 (21), (23) で示すように、ポテンシャルをもつ流体運動は、各時刻における境界上の ϕ と $\bar{\phi}$ の分布により決まる。

そして式 (26) はそれらの ϕ と $\bar{\phi}$ との間に成立すべき、1 次関係式を与えており、その係数である E_{ij} と \bar{E}_{ij} とは境界上の任意の 2 点間の相対位置、換言すれば領域の幾何学的形状のみによって決まる。すなわち式 (26) は流体運動を支配する、領域の形による幾何学的条件を表わしている。しかしこれは 2 組の未知量 $\phi, \bar{\phi}$ に関する 1 組の関係式を与えるのみであるから、式 (26) とは独立な、さらに一組の ϕ と $\bar{\phi}$ に関する条件式が必要である。それは境界面における質量および運動量保存の法則による力学的条件式として与えられる。境界面に接する 2 つの流体または流体と物体の質量と運動量にはそれぞれ圧力と速度の 2 変数、したがって合計 4 個の変数があり、境界条件式として前記の 2 法則があって、4 個の変数の中の 2 個が消去され、境界面では残りの 2 個 (ϕ と $\bar{\phi}$) が力学的条件式として関係づけられることになる。微小振幅の運動では、その関係は常に 1 次式で、一般的には式 (11) の形で与えられ、したがって式 (26) と (11) とを連立方程式として解くことによって境界上の ϕ と

$\bar{\phi}$ とが唯一的に決まることになる。有限振幅波の場合は、摂動展開¹⁴⁾を行うか、離散化の近似度を向上する²⁶⁾ことによって解決されることになる。

(vi) 以上の取扱いは二次元または三次元ラプラス方程式を満足する関数に関するものである。理論上は三次元問題の取扱いは二次元問題とほとんど変わらないが、実際計算の手続きは相当に煩雑となる¹⁸⁾。しかし水深が一定の場合^{21), 23)}には、三次元ラプラス式を二次元平面 (x, y) の関数 $f(x, y)$ に関する次のヘルムホルツ方程式に変換することができる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0 \dots\dots\dots (28)$$

このとき関数 f に対しては、関数 ϕ に対するグリーン関数の式 (23), (24) の形が成立する。ただしこの場合はグリーン関数 $\ln(1/r)$ の代わりに式 (28) の特解であり、かつ $r \rightarrow \infty$ における Sommerfeld の放射条件式 (29) を満足する 0 次の第 1 種ハンケル関数 $H_0^{(1)}(kr)$ (r は式 (22) と同じ定義による) を用いねばならない。

$$\sqrt{r} (\partial f / \partial r - ikf) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \dots\dots\dots (29)$$

この場合式 (23) に対応して式 (30), 式 (24) に対応して式 (31) が成立する。

領域内の点 i に関して

$$f(i) = \frac{1}{4} \int_{\Gamma} [iH_0^{(1)}(kr) \cdot \frac{\partial f}{\partial n} - f \cdot \frac{\partial}{\partial n} (iH_0^{(1)}(kr))] d\Gamma \dots\dots\dots (30)$$

境界上の点 i に関して

$$f(i) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [iH_0^{(1)}(kR) \frac{\partial f}{\partial n} - f \cdot \frac{\partial}{\partial n} (iH_0^{(1)}(kR))] d\Gamma \dots\dots\dots (31)$$

が成立する。

あるいはまた、水深が一定でなくても、境界条件が y 方向について一定である場合¹⁵⁾にはラプラスの式の代わりに

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - k^* f = 0 \dots\dots\dots (32)$$

が用いられることがあり、 $k^* = ik$ とおくと、ハンケル関数の代わりに変形ベッセル関数 $K_0(k^*r)$ が用いられ、式 (30), (31) の代わりにそれぞれ次式が成立する。

$$f(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} [K_0(k^*r) \cdot \frac{\partial f}{\partial n} - f \cdot \frac{\partial}{\partial n} (K_0(k^*r))] d\Gamma \dots\dots\dots (33)$$

$$f(i) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} [K_0(k^*R) \cdot \frac{\partial f}{\partial n} - f \cdot \frac{\partial}{\partial n} (K_0(k^*R))] d\Gamma \dots\dots\dots (34)$$

式 (30), (31) は Lee²⁾により用いられており、式 (33), (34) の応用は本論文で紹介する。

(2) 無次元表示

本文で用いられる座標系と流体量および自由表面条件

を無次元化する手続きを示す。

(i) 微小振幅定常波

流体域の代表的な長さ(たとえば水深)を h , 波の振幅の代表値を $a = a'h$, 時間因子を $\exp(i\sigma t)$ とし, 式(3)~(5)の2次の項と静水圧を省略して次のようにおく。

$$\begin{aligned} (x, z, n) &= (x'h, z'h, n'h), \quad \Phi = ga/\sigma \cdot \phi \cdot \exp(i\sigma t) \\ (u, w) &= (\Phi_x, \Phi_z) = ga/\sigma h \cdot (\phi_x, \phi_z) \cdot \exp(i\sigma t) \\ p &= -\rho g a \phi \exp(i\sigma t), \quad \Gamma = \sigma^2 h/g \dots \dots \dots (35) \end{aligned}$$

自由表面 ($z=0$) と不透過面における条件はそれぞれ

$$\bar{\phi} (= \partial\phi/\partial n) = \Gamma\phi \dots \dots \dots (36)$$

$$\bar{\phi} = 0 \dots \dots \dots (37)$$

(ii) 非定常波¹⁴⁾

時間の代表値を $1/\sigma$ (σ はたとえば運動の周波数) として $t = t'/\sigma$ とおき, 以下のように無次元化する。

$$\begin{aligned} (x', z', \zeta', t') &= (x/h, z/h, \zeta/h, \sigma t), \\ (u', w') &= (\phi_x/\Gamma, \phi_z/\Gamma) \\ \phi &= \sigma/g h \cdot \Phi, \quad p' = p/\rho g h = -\phi_t - (\phi_x^2 + \phi_z^2)/2\Gamma, \\ &\dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

自由表面条件は $z' = \zeta'$ において

$$\phi_t = -\zeta' - (\phi_x^2 + \phi_z^2)/2\Gamma, \quad \zeta'_t = (\phi_x - \zeta'_x \phi_x)/\Gamma \dots \dots \dots (39)$$

以上は有限振幅波に対するもので, 微小振幅波では式(38), (39)での2次以上の高次項を省略すればよい。

4. 境界要素法の適用例1 (定常微小振幅波)

(1) 空気潜袋による波の発生^{19), 27)}

図-3は2個のポリエチレンの薄膜円筒形の袋に, 全容積の約60%の空気を入れて, 水深 h の造波水路底に間隔 $B=3h$ で固定し, 底面の孔から一定量の空気を左右交互に周期的に流入出させて, 袋の変形によって水面に発生する波高と水深の比を, 空気袋だけの場合と, その周囲に不透過剛体の円筒を立てた場合について考察するものである。計算の便宜上, 空気袋は二次元形状とし, 円筒は2枚の鉛直壁でおきかえる。2個の空気袋の変形は左右反対称であるから, 流体運動は2個の袋の中央を通る鉛直線 $00'$ に関して逆対称となり, $00'$ 上では $\phi = \phi_2 = 0$ とおくことができる。ODは自由表面, DD' は仮想面, $O'CEF$ と $HPQD'$ は水底および不透過壁面, FGH は空気潜袋膜面, M は空気孔の中心点である。各量は式(35)により無次元化し, 寸法は図-4の中に示している。仮想面でのポテンシャルは $+x$ 方向への進行波として次式で与える。

$$\begin{aligned} \phi_0 &= K_w \frac{\cosh\lambda(1+z')}{\cosh\lambda} e^{-i\lambda x}, \\ \bar{\phi}_0 = \phi_{0x} &= -i\lambda\phi_0 \quad (\lambda = kh) \dots \dots \dots (40) \end{aligned}$$

空気袋の膜面 FGH におけるポテンシャル ϕ_1 に対する境界条件は, 膜を仮想的弾性膜として近似的に導いている。

すなわち密度 $\rho_m = \rho'_m \rho$, 厚さ $\delta = \delta' h$ の膜面が, 外部の流体圧 p と内側の空気圧 p^* および膜面自身の变形特性に従って, 静止平衡位置から法線方向への微小変位を行うとし, 膜面に作用している静止時の張力 $T = \rho g h T'$ および仮想弾性率 $G = \rho g h G'$ をもって膜の運動量方程式を次のように導いている。

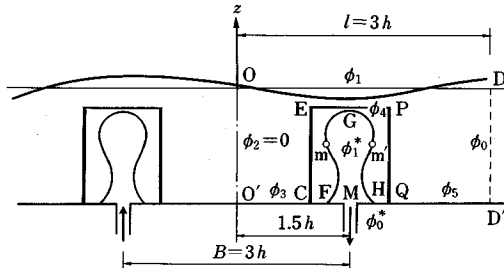


図-3 空気潜袋による波の発生

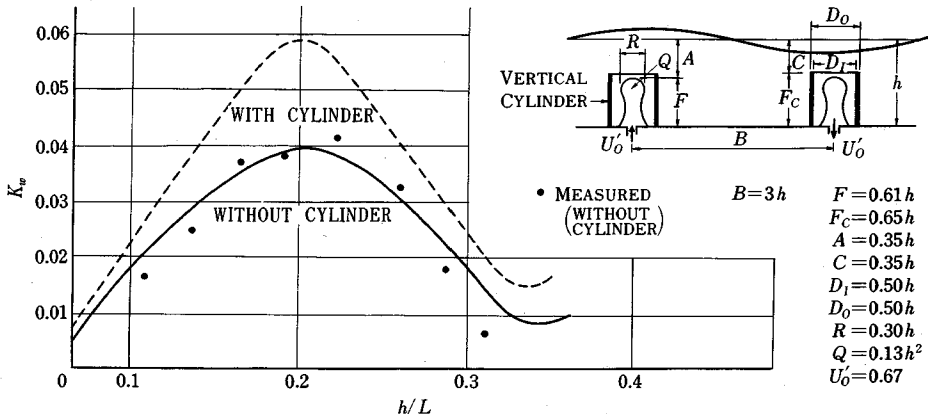


図-4 空気潜袋の変形による波の発生率

$$\rho_m \partial^2 \xi / \partial t^2 = p^* - p + T \partial^2 \xi / \partial s^2 - G(d\theta/ds)^2 \cdot \xi \quad \dots\dots\dots(41)$$

sは膜面に沿う長さ、θは膜面への切線と水平軸とのなす角度で、密度ρ*の内部流体（空気）の運動もポテンシャルφ*をもつと仮定すると、上式のpとp*は次式で表わされる。

$$(p, p^*) = -igh(\rho\phi, \rho^*\phi^*) \exp(i\sigma t) \quad \dots\dots\dots(42)$$

また内外流体と膜面自身の法線速度は等しい（質量保存則）から

$$\xi' = -i\phi_n / \Gamma = -i\phi_n^* / \Gamma \quad \dots\dots\dots(43)$$

式(42), (43)を(41)に用いて膜面上のφ, φ̄およびφ*, φ̄*について次式を得る。

$$\delta' \rho^* \phi^* - \phi + i[T' \partial^2 / \partial s^2 - G'(d\theta/ds)^2] \cdot \xi' = 0 \quad \dots\dots\dots(44)$$

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}^* \quad (= i\xi' \Gamma) \quad \dots\dots\dots(45)$$

空気袋に流出入する空気量の振幅をΔQ、空気孔の幅をA₀hとすると空気流速はU = ΔQ · σ / 2A₀ · exp(iσt)で

$$\bar{\phi}_n^* = U_0 \Gamma, \quad (U_0 = \Delta Q / 2A_0 h) \quad \dots\dots\dots(46)$$

とおくことができる。

式(26)をポテンシャルφの外部流体域の各境界線上のポテンシャルφ_{1,2,3,4,5,6}に適用し、またφとφ̄の関係式として式(36), (37)および(40)を適用する。次に式(26)をポテンシャルφ_n*を適用し、さらに式(37), (44), (45)を用い、点Mに対しては式(46)を既知量として与え、それらを連立方程式として解くことによって、式(46)で与えたU₀に対するK_wを算出し、同時に境界上のすべてのφ, φ̄およびφ*, φ̄*を決めることができる。

図-4ではl=3h, 0'M=1.5hとして計算したK_wを破線で示している。また鉛直壁を取り除いた場合のK_wを実線で、さらに水深30cm、水路幅30cmの造波水路での実験値を●で示している。実験値と計算値のh/L(Lは周波数σと水深hに対する波長)による変化の傾向は一致しており、h/L≒0.2すなわちB/L≒0.6でK_wは極大値を示している。鉛直壁を取り付けると、K_wの極大値は約1.5倍に上昇し造波効果が向上することが予測される。これは空気袋の体積変化が主としてm, m'点以深の「くびれ」の部分の「ひだ」の伸縮に基づいており、それが近傍の外部流体を主として水平方向に排除することにより造波効果を示すと考えられるが、鉛直壁を設けると潜袋との間の流体は鉛直に流動する傾向が大きくなり、そのため水面の上昇と低下が促進されて、造波効果が助長されるものと解釈される。

(2) 潜堤と透過性防波堤における波の反射と通過⁽⁵⁾

図-5はy方向に一樣な任意断面形状をもつ潜堤があつて、x軸と角度θをもって波が入射する場合を示

している。仮想面ABおよびA'B'を潜堤から十分離れた一樣水深hの部分に設定して外部領域(I)および(II)を設け、潜堤を含む部分を領域(0)とする。x軸とθの角度から入射波があるときは、反射波はx軸に対称で、通過波は入射波と同じ方向θをもち、周波数σと水深hに対する波数をkとすれば、各領域のポテンシャル関数φ(x, y, z)は次式で表わされる。

$$\phi_1 = e^{-iky \sin \theta} \cdot [e^{ikx \cos \theta} + K_r e^{-ikx \cos \theta}] \cdot C(z) \quad \dots\dots\dots(47)$$

$$\phi_2 = K_t \cdot e^{-iky \sin \theta} \cdot e^{ikx \cos \theta} \cdot C(z)$$

$$C(z) = \cosh k(z+h) / \cosh kh \quad \dots\dots\dots(48)$$

$$\phi_0 = e^{-iky \sin \theta} \cdot f(x, z) \quad \dots\dots\dots(49)$$

式(49)を三次元ラプラスの式に代入すると次式となる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - (k \sin \theta)^2 \cdot f = 0 \quad \dots\dots\dots(50)$$

これは特解として0次の変形ベッセル関数K₀(kr sinθ)をもっており、式(33), (34)においてk* = k sinθとおいたグリーンの式が成り立つ。

図-6は図中に示したような高さd、天端幅b、底幅B、傾斜面が1:1の不透過台形潜堤に対するθ=0°, 30°, 60°の入射波に対する反射率|K_r|を示したもので、横軸はkh=2πh/Lである。ここではb/h=0.5, d/h=0.7, B/h=1.9の場合を示しているが、|K_r|²+|K_t|²=1の関係にあるから通過率もわかる。図によるとθ=0°の方

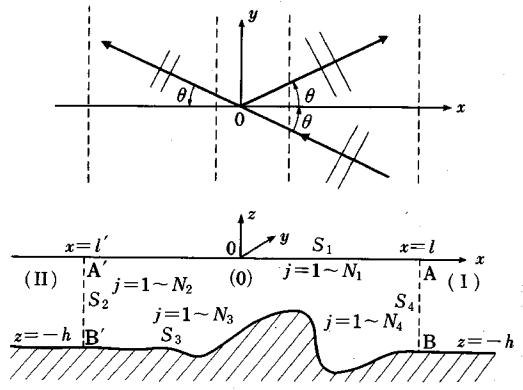


図-5 潜堤における波の反射と通過

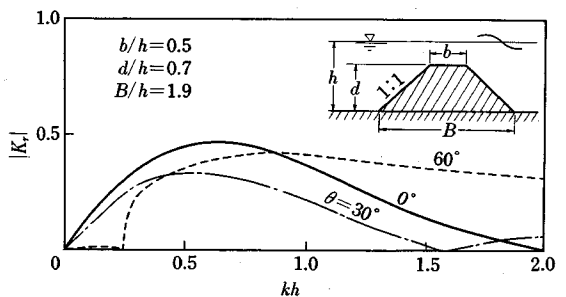


図-6 斜め入射波に対する台形潜堤の反射率

が $\theta=30^\circ$ の場合よりも反射率が大、すなわち通過率が小さく $\theta=30^\circ$ の方がよく波が通過していくことがわかる。この台形潜堤の底幅に近い幅をもつ矩形潜堤について計算した結果を図-7 に示したが、周波数による反射率の変動が大きく、また反射率が0、したがって波が完全に通過する特定の波長が存在することがわかる。

小島ら²⁸⁾は潜堤の代わりに、一様な空隙をもつ防波堤の通過率と反射率について調べている。図-8 はその結果の一部を示すものであるが、水深 h の海域に幅 $B=0.343h$ 、空隙率0.2の直立防波堤がある場合に、まず水路実験において $\theta=0^\circ$ に対する波の通過率と反射率の測定によって、堤体内流速と加速度に比例する抵抗係数を求めて $\mu_1/\sigma=\mu_2=0.7$ を得た。これについて、上記の潜堤に対すると類似の方法で入射角 θ を $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ および 60° とした場合を計算した。波長の減少に伴って通過率 k_t は低下し、反射率は上昇するが、入射角 θ の増加に伴い、通過率は上昇し、反射率 k_r は低下して

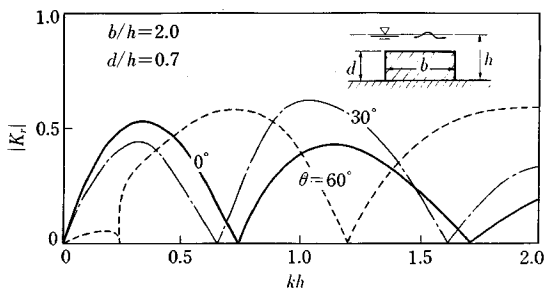


図-7 斜め入射波に対する矩形潜堤の反射率

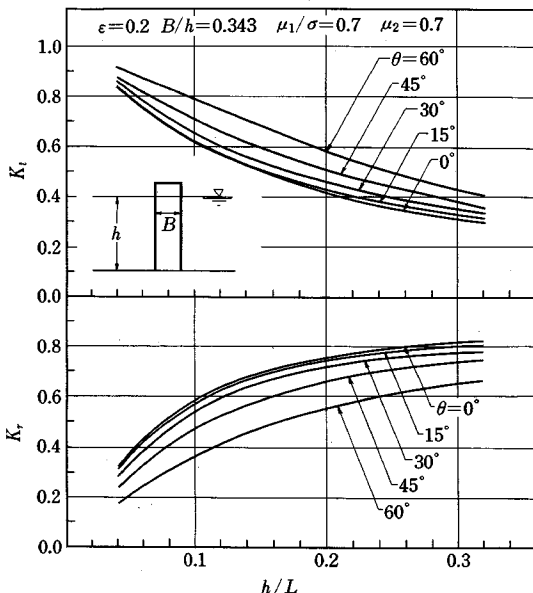


図-8 斜め入射波に対する直立透過堤における反射率と通過率

いくことが示されている。すなわち入射角が大きくなるほど、堤体背後の波は大きくなっていくという興味ある現象が示唆されている。このことは平面水槽において行われた縦スリット防波堤の通過率測定実験の結果でも認められている²⁵⁾。

5. 境界要素法の適用例 2 (有限振幅波)

(1) 斜面上の波の変形²³⁾

入射した波が汀線で変形し砕波する際の波形を計算する場合は、水面変動が水深よりも大きいという状態が現われる。このような場合には各時刻ごとに算出された水面形状を流体域境界面として計算し、次の時刻の水面形状を算出するという操作を繰り返すことと、その際の積分方程式の離散化を精度よく行う方法を導入して精度の低下を防止する必要がある。

式 (24) を離散化する際に、要素上での ϕ と $\bar{\phi}$ が一定値で分布すると仮定するよりも、要素の一端 j での値 $\phi(j)$ または $\bar{\phi}(j)$ が、他端 $j+1$ での値 $\phi(j+1)$ または $\bar{\phi}(j+1)$ に直線的に変わると仮定する方が合理的である。図-9 では j 番目および $j+1$ 番目の点 (x, z) の座標 x_j, x_{j+1} を $\xi=-1$ から $\xi=1$ までの座標に変換する。そのためには

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{2x - x_{j+1} - x_j}{\Delta x_j}, \quad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j) \\ M_{j1} &= \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad M_{j2} = \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

とすると

$$x = M_{j1}x_j + M_{j2}x_{j+1}, \quad z = M_{j1}z_j + M_{j2}z_{j+1} \dots\dots\dots (52)$$

となり、 j 点と $j+1$ 点の中間の ϕ と $\bar{\phi}$ は次のように表わされる。

$$\phi = M_{j1}\phi_j + M_{j2}\phi_{j+1}, \quad \bar{\phi} = M_{j1}\bar{\phi}_j + M_{j2}\bar{\phi}_{j+1} \dots\dots\dots (53)$$

式 (53) を式 (24) に代入すると

$$\begin{aligned} \phi(i) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \left[\phi(j) \left\{ \int_{\Gamma_{j-1}} M_{j-1,2} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) d\Gamma \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\Gamma_j} M_{j,1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) d\Gamma \right\} \right] \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \left[\bar{\phi}(j) \left\{ \int_{\Gamma_{j-1}} M_{j-1,2} \left(\ln \frac{1}{R} \right) d\Gamma \right. \right. \end{aligned}$$

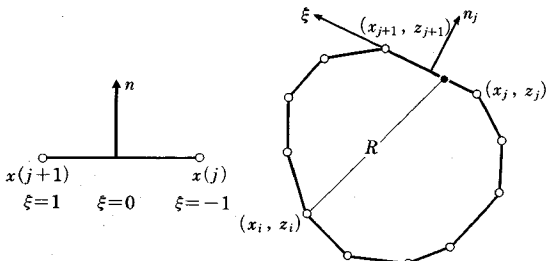


図-9 座標系の変換

図-10 境界の分割近似

$$+ \int_{r_j} M_{j,1} \left(\ln \frac{1}{R} \right) d\Gamma \Big] \dots \dots \dots (54)$$

ここで点 (x_i, z_i) , (x_j, z_j) および ξ の関係は $i \neq j$ の場合、図-10 のようで、 ξ を変数として式 (54) を書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi(i) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \left[\phi(j) \left\{ \int_{-1}^1 M_{j-1,2} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \frac{l_{j-1}}{2} d\xi \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-1}^1 M_{j,1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \frac{l_j}{2} d\xi \right\} \right] \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \left[\bar{\phi}(j) \left\{ \int_{-1}^1 M_{j-1,2} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \frac{l_{j-1}}{2} d\xi \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-1}^1 M_{j,1} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \frac{l_j}{2} d\xi \right\} \right] \dots \dots \dots (55) \end{aligned}$$

したがって式 (25) の代わりに

$$\begin{aligned} \bar{E}_{ij} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-1}^1 M_{j+1,2} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \cdot \frac{l_{j+1}}{2} \cdot d\xi \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 M_{j,1} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \cdot \frac{l_j}{2} \cdot d\xi \right] \\ E_{ij} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-1}^1 M_{j-1,2} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \cdot \frac{l_{j-1}}{2} \cdot d\xi \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 M_{j,1} \left(\ln \frac{1}{R} \right) \cdot \frac{l_j}{2} \cdot d\xi \right] \dots \dots \dots (56) \end{aligned}$$

とおくと式 (26) が成り立つ。ここで

$$R = \sqrt{(x-x_i)^2 + (z-z_i)^2} = \left[\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{2} \xi + \frac{x_{j+1}+x_j}{2} - x_i \right)^2 + \left(\frac{z_{j+1}-z_j}{2} \xi + \frac{z_{j+1}+z_j}{2} - z_i \right)^2 \right]^{1/2}$$

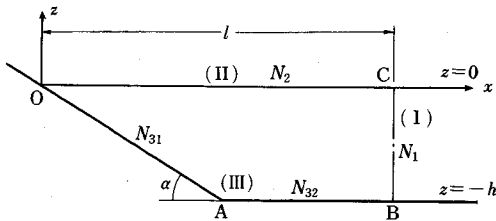


図-11 斜面の計算領域

$$l_j = [(x_{j+1}-x_j)^2 + (z_{j+1}-z_j)^2]^{1/2} \dots \dots \dots (57)$$

以下この計算法を用いて、斜面での波形の変形の計算法と結果の概略を述べると、まずある時刻での波を定常状態の微小振幅波として計算して、その波形を $t=0$ の波形として有限振幅波の計算に移り、以後有限振幅波の計算を続ける。

図-11に示すように斜面 OA と一定水深 h の水底より成る海域の原点から $x=l$ の位置に仮想面 CB を設定し、波は右方から入射し、斜面で反射するとする。まず振幅 a_0 の微小振幅定常波が入射するときを考え、時間因子 $\exp(i\omega t)$ を用い、ポテンシャル $\Phi(x, z; t)$ を式 (35) の形とし、領域 (I) の ϕ を次の形におく。

$$\begin{aligned} \phi_1(x, z) = [e^{ikx} + K_r e^{-ikx}] \cdot C(z), \\ C(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \dots \dots \dots (58) \end{aligned}$$

K_r は反射率で $|K_r|=1$ であるが位相角は 0 とは限らない。したがって BC 上では

$$\begin{aligned} \phi(l, z) = (1+K_r) \cdot C(z), \quad \bar{\phi}(l, z) = ik(1-K_r) \cdot C(z) \\ \dots \dots \dots (59) \end{aligned}$$

このとき、自由表面の境界条件には式 (36) を用い、水面波形とその上での ϕ と $\bar{\phi}$ を求めておく。有限振幅波の計算には、式 (6) の関係を用いて式 (4), (5) を次の形におく。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \dots \dots \dots (60)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[(\Phi_n)^2 + (\bar{\Phi}_n)^2 \right] + g\xi = 0 \dots \dots \dots (61)$$

時刻を k , 計算点を j で表わして上式を差分化すると

$$\begin{aligned} (\xi^{k+1})_j = (\xi^k)_j + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{\cos \beta^{k+1}} \cdot (\Phi_n^{k+1})_j + \frac{1}{\cos \beta^k} \cdot (\bar{\Phi}_n^k)_j \right] \\ \dots \dots \dots (62) \end{aligned}$$

$$(\Phi_n^{k+1})_j = \frac{1-c}{b} (\Phi^{k+1})_j + \frac{c}{b} (\Phi^{k+1})_{j-1} - \frac{a}{b} \dots \dots \dots (63)$$

上式で

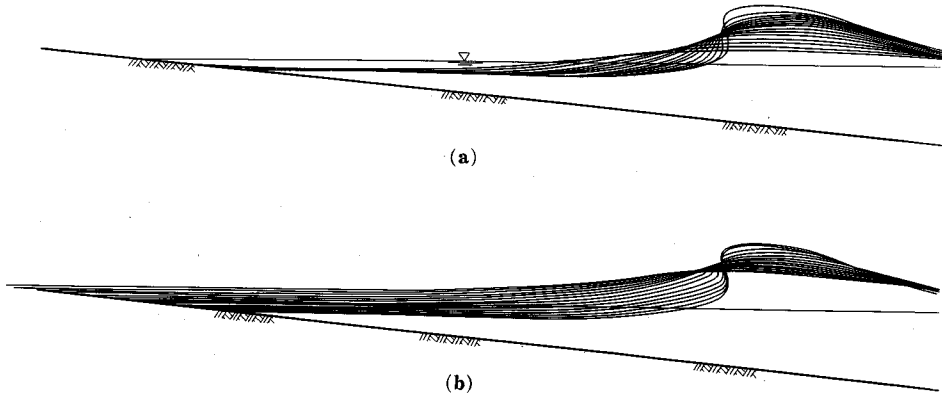


図-12 斜面における波の変形 ($\sigma^2 h/g=0.800$, $h/L=0.292$, $\alpha_0/h=0.060$, $H_0/L_0=0.0197$)

$$\left. \begin{aligned} a &= (\Phi^k)_j - g \Delta t \cdot (\zeta^k)_j - g \cdot \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \cdot \frac{(\Phi^k)_j}{\cos \beta^k} \\ b &= -\frac{g}{2} (\Delta t)^2 \cdot \frac{1}{\cos \beta^{k+1}} \cdot \frac{\Delta t}{2} (\Phi^k)_j \\ c &= -\frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{1}{\Delta s} \cdot [(\Phi^k)_j - (\Phi^k)_{j-1}] / \Delta s \end{aligned} \right\} \dots\dots (64)$$

また式 (10) は境界線 (I) に沿って次の関係を与えるものとする。

$$(\Phi^{k+1})_j = d + e(\Phi^k)_j, \dots\dots\dots (65)$$

上式で

$$\left. \begin{aligned} d &= (\Phi^k)_j + (\Phi^k)_j \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\sigma}{-k} \\ e &= \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\sigma}{-k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (66)$$

図-11では $OC = l = L$ (1 波長) とし、 $\Delta s = L/60$ に取り、仮想面 BC と自由表面 OC 上の分割点数をそれぞれ $N_1 = 10$, $N_2 = 60$, 斜面 OA と水底面 AB 上では、 $\sigma^2 h/g = 0.8, 0.12, 0.13$ に対し $N_{31} = 32, 44, 46$ および $N_{32} = 28, 16, 14$, また時間隔 $\Delta t = T/120$ (T は周期) として計算を行っている。図-12は $\sigma^2 h/g = 0.80$, $h/L = 0.292$, $a_0/h = 0.060$, $H_0/L_0 = 0.0197$, 斜面勾配 1/10 に対する水面波形の計算値を示したもので、(a) は波が岸に向かって進行しているとき、(b) は岸から離れているときを示している。

この計算は水底摩擦その他の影響は考慮されていないから、実際現象との多少の相異は避けられない。著者らは $\sigma^2 h/g = 0.800$, $H_0/L_0 = 0.01971$; $\sigma^2 h/g = 0.800$, $H_0/L_0 = 0.01807$; $\sigma^2 h/g = 1.200$, $H_0/L_0 = 0.0261$; $\sigma^2 h/g = 1.300$, $H_0/L_0 = 0.0231$ の場合について計算を行い、砕波高、砕波位置などを実験値と比較し、良好な一致を得ていることを示している。類似の計算を、Kim et al.²¹⁾ も行っている。

6. 結 び

以上述べた領域分割法と境界要素法の特徴は、前者が領域のポテンシャル関数の形を決めてから、隣接の流体域を力学的につないでいくのに対し、後者は領域の形と境界条件だけで一挙に解を得るという点で対照的といえるかもしれないが、さらに有限要素法^{13), 16), 17), 24)} と比べると後者は流体域全部にわたるポテンシャルを求めねばならない点で、境界要素法との相異は際立っているし、計算手続きは複雑である。しかし境界要素法はポテンシャル運動に限定されるという基本的限界があるため、乱れや摩擦の効果を含む運動に対しては、第一次的な近似解を与えるにとどまるといえる。波運動の場合は乱れなどの効果は一般に第 2 次的な重要度にとどまるから、将来は第 2 段階の計算で有限要素法を組み入れることを考えねばならないであろう。なお波の問題を含めて、各

分野での境界要素法の応用については文献 22) などに詳しい。

参 考 文 献

- 1) John, F. : On the motion of floating bodies, I. II., Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 2, pp.13~57, 1949; Vol. 3, pp. 45~100, 1950.
- 2) Hwang, L. S. and Tuck, E. O. : On the oscillations of harbours of arbitrary shape, J. F. M. Vol. 42, part 3, pp. 447~464, 1970.
- 3) Lee, J. J. : Wave-induced oscillations in harbours of arbitrary geometry, J. F. M. Vol. 45, part 2, pp. 375~394, 1971.
- 4) 井島武士 : 最近の波浪理論における境界値問題の解法とその応用, 水工学シリーズ, 71-B-1, 土木学会水理委員会, pp. B-1-1~B-1-31, 1971.
- 5) 井島武士・田淵幹修・湯村やす : 有限水深の波による矩形断面物体の運動と波の変形, 土木学会論文集, 第 202 号, pp. 33~48, 1972.
- 6) 井島武士・田淵幹修・湯村やす : 有限水深の波による円柱状浮体の運動, 土木学会論文集, 第 206 号, pp. 71~84, 1972.
- 7) Ijima, T., Chou, C. R., Yumura, Y. : Wave scattering by permeable and impermeable breakwater of arbitrary shape, Proc. 14th International Coastal Engng. Conf. Part III, pp. 1886~1905, 1974.
- 8) 井島武士・周 宗仁・吉田明德 : グリーンの公式による有限水深の波の 2 次元境界値問題の解法, 九大工学集報, Vol. 48, No. 6, 1975.
- 9) 井島武士・吉田明德・湯村やす : 有限水深域の波による楕円および矩形物体の運動と波の変形, 土木学会論文集, 第 244 号, pp. 91~105, 1975.
- 10) Ijima, T., Chou, C. R. and Yoshida, A. : Method of analysis for two-dimensional water wave problem; Proc. 15th International Coastal Engng. Conf. part III, pp. 2717~2736, 1976.
- 11) 井島武士・周 宗仁 : グリーンの公式による 2 次元水面波の境界値問題の解析, 土木学会論文報告集, 第 252 号, pp. 57~71, 1976.
- 12) 井島武士・吉田明德・山本督夫 : 任意断面浮体の 2 次元係留運動と波の変形, 土木学会論文集, 第 272 号, pp. 53~63, 1978.
- 13) 倉田克彦・井島武士 : 波動問題への有限要素法の適用, 第 26 回海岸工学論文集, 1978.
- 14) Ijima, T. and Nagata, S. : Numerical Analysis of Transient Finite Amplitude Waves by Boundary Integral and Perturbation Expansion, Coastal Engng. in Japan, Vol. 26, pp. 25~44, 1980.
- 15) 井島武士・吉田明德・北山 斉 : 斜め入射波に対する港堤の反射効果に関する数値解析, 第 29 回海岸工学論文集, 1981.
- 16) Mattioli, F. : Element integral approach for water waves, Computers and Fluids, Vol. 9, pp. 181~203, 1981.
- 17) 瀧川 清 : 有限要素法解析による浅海波の変形特性に関

- する研究 (京都大学提出学位論文), 1982.
- 18) 吉田明德・北山 齊・鈴木康正・溝内俊一：不等水深の湾内副振動解析, 第30回海岸工学論文集, pp.153~157, 1983.
- 19) 井島武士・上床隆彦・牛房幸光：空気嚢袋群による波の遮断機構 (2次元解析による考察), 第31回海岸工学論文集, 1983.
- 20) 井島武士：周辺積分法による水面波境界値問題の数値解析法, 第19回水工学に関する夏期研修会講義集 (B), 水理委員会, pp. B-2-1~B-2-21, 1983.
- 21) Kim, S.K., Lin, P. L. F. and Liggett, J. A. : Boundary integral equation solution for solitary wave equation, propagation and Run-up, Coastal Engng., 7, Elsevier Science pub. B. V. Amsterdam, pp.299~317, 1983.
- 22) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C. : Boundary Element Techniques (Theory and Application in Engng.) 境界要素解析—理論と応用, 田中正隆訳, 丸善, 1983.
- 23) 周 宗仁・宓 羅航：斜面上碎波波形之数値計算研究, 第8回海洋工程研討会, 台北, pp.261~279, 1984.
- 24) 倉田克彦：円柱構造物に働く流体力に関する基礎的研究 (大阪市立大学提出学位論文), 1985.
- 25) 第四港湾建設局調査設計事務所：鹿児島港防波堤斜め入射波水理実験報告書, 1985.
- 26) 榎園正人：境界要素法解析, 培風館, 1985.
- 27) Uwatoko, T., Ijima, T., Ushifusa, Y. and Kojima, H. : Investigation on the Improvement of Wave Interception Effect of Sea-Balloon Breakwater, Resch Rept. Oita Tech. College, No.23, 1987.
- 28) 小島治幸・吉田明德・井島武士：透過性防波堤における入射波向の影響について, 九大工学集報, Vol.60, No.3 (投稿中).
- なおポテンシャル関数に関するグリーンの定理の証明などについては, 寺沢寛一著“自然科学者のための数学概論”に詳細の解説があるので参照されたい.

(1987.1.31・受付)