
招待論文
研究展望

Invited Paper

Review

招待論文

連行概念の統一化と連行係数の評価法

UNIFICATION OF ENTRAINMENT CONCEPT AND FORMULAE OF THE ENTRAINMENT COEFFICIENT

玉井 信行*

By Nobuyuki TAMAI

1. 緒言

密度流現象は水利用の高度化、環境問題への関心の高まりとともに、最近10数年にわたり多くの水理学研究者の興味を引いてきた。密度流現象は塩分・熱・濁質の不均質性が引き起こす現象であるので、これらの不均質性がいかに保持されるか、あるいは、いかに混合が生じて均質な状態に向かうかの過程を知ることが基本的に重要となる。

このように密度流現象においては混合過程がその中核を成すと考えられる。したがって、本論文においては混合あるいは連行概念を中心として密度流分野の現況を眺めることとする。特に、“連行”という表現形式でさまざまな分野で取り扱われてきた混合の強さを表わす指標を、統一的な観点から見直し、混合過程に含まれる物理機構を明らかにすることに意を注いだ。

従来の計測結果はさまざまに条件が異なり、また連行速度として計測された量も幾つかの異なる定義の下に計測が行われている。この原因は連行が関与する現象が多岐にわたると同時に、連行速度の定義が確立されておらず、物質輸送に占める“連行”の役割が明確になっていなかったことにも依るものと考えられる。したがって、本論文においては連行概念を明確化し、その統一的な数学的表現を与えることを目標とした。特に、連行による輸送現象と拡散による輸送現象との関連および差異について、物理機構、数学的表現の両面からの考察を行い、その成果を取りまとめた。

* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科 (〒113 文京区本郷7-3-1)

Keywords: entrainment, stratified flows, entrainment coefficient, mass transport, terminology

次いで、連行現象に関与するさまざまな因子の影響について論じた。連行現象に関与する因子にはさまざまな組合せがみられる。その故もあって、従来の成果では個々の問題に最適な処理がなされ、異なる問題、あるいは異なる代表量で表現されている公式間の相互関係が不明である場合が多かった。本論文においては、連行に与える分子拡散の影響、組織構造あるいは乱れの生成因に基づく影響などについて論じた。

密度差が流体现象を支配する例は水工学、機械工学、気象学、海洋学などの広い分野にわたっているが、それぞれの分野が独自に発展し、同一の概念が異なる術語により表わされている例もある。従来の知見の不備を補い、また本質的な理解を深めるためには、まず、用語の定義を正確に行うことが必要不可欠である。ここでは、当面の対象を水工学分野に絞り、そこで用いられる用語に定義を与え、補遺に掲げた。

2. 密度流現象における連行速度の定式化

(1) 密度流における質量保存則と連続式

a) 一般的な場合

複数の成分から構成される流体の質量は、各成分の質量の和で表わされる。いま単位体積 V 当たりの第 α 成分の質量を成分密度 (partial density) とよび¹⁾、 $\alpha\rho$ で表わす。すると、混合流体の密度 ρ は成分密度の和で表わされるから次式となる。

$$\rho = \sum \alpha\rho \dots\dots\dots (1)$$

成分 α の比率は

$$\alpha c = \alpha\rho / \rho \dots\dots\dots (2)$$

で表わされる。

混合流体に対する速度は、各成分の質量流束の平均値

(barycentric average) として次式で定義される¹⁾。

$$u_i = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} u_{i\alpha} / \rho = \sum_{\alpha} c_{\alpha} u_i \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $u_{i\alpha}$ は第 α 成分の速度成分である。式 (3) に示されるように混合流体の速度は、各成分の速度に密度で重み付けされた平均値である。質量流束により速度を定義するのは均質流体の場合と同一の概念である。

もう 1 つ必要となる量は、各成分の速度と混合流体との相対速度である。これは次式で与えられる。

$${}_a d_i = {}_a u_i - u_i \dots\dots\dots (4)$$

式 (3) より

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} d_i = \sum_{\alpha} c_{\alpha} d_i = 0 \dots\dots\dots (5)$$

である。各成分のすべての性質に対して連続体仮説²⁾が成立するものと仮定すると、各成分に対する質量保存則は次式となる。

$$\partial_a \rho / \partial t + \partial({}_a \rho u_i) / \partial x_i = 0 \dots\dots\dots (6)$$

すべての成分に対する式 (6) の和を取ると、混合流体に対する質量保存則が次式のように得られる。

$$\partial \rho / \partial t + \partial(\rho u_i) / \partial x_i = 0 \dots\dots\dots (7)$$

各成分の構成比率 c_{α} 、および式 (4) を用いて式 (6) を書き直すと次式となる。

$$\partial(\rho_{\alpha} c) / \partial t + \partial(\rho_{\alpha} c u_i) / \partial x_i + \partial(\rho_{\alpha} c {}_a d_i) / \partial x_i = 0 \dots\dots\dots (8)$$

式 (8) の左辺第 2 項に現われる速度は混合流体に対する速度であり、左辺第 3 項は第 α 成分の拡散による輸送を表わす項である。

b) 乱流状態にある 2 成分の混合液

いま水にもう 1 つの物質が溶けている混合液を考える。前項で第 α 成分と混合流体に関する質量保存則が与えられたので、この項の議論は α が N である場合に一般化できる。第 1 成分を水と考え、第 2 の物質の混在により密度が $\Delta \rho$ だけ増大したと考え、次式のように表わす。

$$\rho = {}_1 \rho + {}_2 \rho = \rho_r + \Delta \rho \dots\dots\dots (9 \cdot a)$$

いま、

$${}_2 c = {}_2 \rho / \rho = {}_2 \rho / (\rho_r + \Delta \rho) = c \dots\dots\dots (9 \cdot b)$$

とおく。

いま、溶液濃度はあまり濃くない場合を考えるとする。一般には $\Delta \rho$ は濃度 c の関数であり、

$$\Delta \rho / \rho_r = f(c) \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

である。 $c \ll 1$ として展開の第 1 項のみを取ることになれば、

$$\Delta \rho / \rho_r = \beta c \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

である。 c^2 の項を無視すれば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} {}_1 \rho &= \rho_r - (1 - \beta) {}_2 \rho \\ {}_2 \rho &= c \rho_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10 \cdot c)$$

この場合、混合に伴って溶液の体積が変化しない場合は $\beta = 1$ である。

2 成分混合液の場合には質量保存則として 2 つの式が必要で混合液に対する式 (7) と第 2 成分に対する式 (8) を用いればよい。式 (8) では成分密度に対する表示を直接用いると、具体的な形は次式となる。

$$\partial \rho / \partial t + \partial(\rho u_i) / \partial x_i = 0 \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

$$\partial {}_2 \rho / \partial t + \partial({}_2 \rho u_i) / \partial x_i + \partial({}_2 \rho d_i) / \partial x_i = 0 \dots\dots\dots (11 \cdot b)$$

式 (11 \cdot b) の左辺第 3 項は分子拡散を表わす項である。Fick の仮説を導入すれば次式を得る。ここに k は分子拡散係数である。

$${}_2 \rho d_i = -k \partial {}_2 \rho / \partial x_i \dots\dots\dots (12)$$

いま乱流状態を考え時間平均量に上部の横棒を付し、変動量にプライム記号を付すと、 $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ 、 ${}_2 \rho = \bar{{}_2 \rho} + {}_2 \rho'$ 、 $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ であり、式 (11) は次のように書き直される。ただし、変動量の平均操作を除いては、上部の横棒は省略されている。

$$\partial \rho / \partial t + \partial(\rho u_i) / \partial x_i + \partial(\overline{\rho' u'_i}) / \partial x_i = 0 \dots\dots\dots (13 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \partial {}_2 \rho / \partial t + \partial({}_2 \rho u_i) / \partial x_i + \partial(\overline{{}_2 \rho' u'_i}) / \partial x_i \\ = \partial(k \partial {}_2 \rho / \partial x_i) / \partial x_i \dots\dots\dots (13 \cdot b) \end{aligned}$$

式 (13 \cdot a) を成分密度 ${}_1 \rho$ 、 ${}_2 \rho$ で書き直し、式 (13 \cdot b) を用いて演算すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \partial {}_1 \rho / \partial t + \partial({}_1 \rho u_i) / \partial x_i + \partial(\overline{\rho' u'_i}) / \partial x_i \\ + \partial(k \partial {}_2 \rho / \partial x_i) / \partial x_i = 0 \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここで式 (10 \cdot c) の第 1 式を用いて ${}_1 \rho$ を書き直し、式 (13 \cdot b) の関係を用いると、

$$\rho_r \partial u_i / \partial x_i = -\beta \partial(k \partial {}_2 \rho / \partial x_i) / \partial x_i$$

を得る。さらに、式 (10 \cdot c) の第 2 式を用いれば最終的に次式となる。

$$\partial u_i / \partial x_i = \text{div } \bar{u} = -\beta \partial(k \partial c / \partial x_i) / \partial x_i \dots\dots\dots (15)$$

このように混合液に対する連続式では、混合成分の乱れによる輸送は陽な形では現われず、分子拡散による影響のみが陽な形で残ることになる。これは \bar{u} が質量で重み付けされた定義のため、乱れによる効果も移流速度で表現される $\text{div } \bar{u}$ に含まれていると考えることができる。また前述したように、2 成分の混合に伴って体積の変化が生じないときは $\beta = 1$ であり、希薄溶液では β は 1 に近い値をとることが多い。

なお、混合している成分因子の移流速度と混合液の速度との相対速度を式 (11 \cdot b) の形のままに保存して演算すると、拡散方程式は電信方程式となる¹⁾。しかし、電信方程式の解と Fick 型の拡散方程式の解とはごく初期の特性が少し異なるのみであるので、ここでは通例の Fick 型を用いて拡散項を表わした。

(2) 連行概念の導入

連行という概念は層状をなして流れる流れについて成立する。したがって、ここでも図—1 に示すように上層と下層の 2 層よりなる流れについて議論する。ただし、2 層間の界面は混合しない流体間の場合は明確に定義で

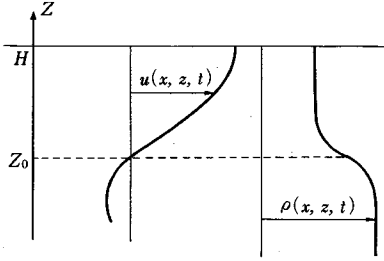


図-1 流れ場の概要

きるが、混合が生ずる流体の場合には密度場あるいは速度場の特性に基づいて、何らかの方法で定義する必要がある(密度界面の定義(補遺)参照)。

図-1の流れには2種類の境界面、すなわち自由表面と界面とがある。この2種類の境界面における運動学的条件について考察する。自由水面 $f(x, z, t) = z - H(x, t) = 0$ は物質面である。したがって、物質面である条件 $\partial f / \partial t + \vec{u} \cdot \text{grad } f = 0$ (16) を満たす。 \vec{u} は速度ベクトルである。式(16)は図-1の流れに対して次のように書き直すことができる。

$$w = \partial H / \partial t + u_H \partial H / \partial x, \quad z = H \text{ において} \dots\dots (17)$$

ここに u_H は $z = H$ における u を示す。

界面 $z = z_0(x, t)$ においては連行現象、すなわち物質の移動がある。すなわち、界面 $z = z_0(x, t)$ 上にあった流体粒子が、界面の移動速度 \vec{u}_0 に $\vec{v}_e = (u_e, w_e)$ だけ足した速度を有するものとする。図-2において黒丸と黒丸とは界面の移動に伴う位置の変化を示し、下層の流体粒子の上層への混入がなければ、 dt 時間後も流体粒子は新しい界面上に止まることになる。しかし、下層から上層への混入が生じていることは、時刻 t において界面上にあった流体粒子が、時刻 $t + dt$ においては界面を離れて、上層側に位置しているはずである。この界面位置の動きとの相対速度を「連行速度」とよぶことにしよう。これが上述の速度ベクトル \vec{v}_e である。

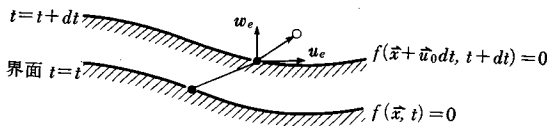


図-2 界面の移動の様式図

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_0(\vec{x}, t) + \vec{v}_e(\vec{x}, t), \quad z = z_0 \dots\dots (18)$$

\vec{x} が時刻 t における界面の座標であるとすると、 $t + dt$ 時刻には $\vec{x} + \vec{u}_0(\vec{x}, t) dt$ も界面である。すなわち、界面の式 $f(\vec{x} + \vec{u}_0(\vec{x}, t) dt, t + dt) = 0$ を Taylor 展開すると次式を得る。

$$\partial f / \partial t + \vec{u}_0 \cdot \text{grad } f = 0$$

式(18)を用いればこの式は $\partial f / \partial t + (\vec{u} - \vec{v}_e) \cdot \text{grad } f$

$$= 0 \text{ となり, } f = z - z_0(x, t) \text{ を代入するとさらに} \\ w = \partial z_0 / \partial t + u_0 \cdot \partial z_0 / \partial x + w_e, \quad z = z_0 \text{ において}$$

$$\dots\dots\dots (19)$$

となる。ここに u_0 は界面の移動速度の x 成分である。

ここで、式(19)に得られた w と w_e の性質について考えてみる。流れの中の運動には種々の変動成分が混在している。しかし、この節で式(19)を導いた過程では時間的な平均値に対する議論を行ってきた。したがって、式(19)は時間的な平均値に対する記述と考えられ、瞬間値を考える場合には式(13)を導いたときのように変動成分が加わることになる。しかしながら、式(13)に示される時間平均量を用いた質量保存則では、こうした乱れの変動の効果は拡散項によってすでに評価されているので、式(19)は時間平均量を示す横棒を省略した表記とみなすことができる。

(3) 平均流方程式

式(13-a)を基準に考えるので、すべての量は時間的な平均値を取り扱う。したがって前節と同じく、ここでも over bar を省略した記法を用いることとする。図-1の場合について、流れの方向には移流が卓越し、拡散項は無視できるものと考え、混合流体に対する質量保存則式(13-a)は次式となる。

$$\partial \rho / \partial t + \partial(\rho u) / \partial x + \partial(\rho w) / \partial z = \partial(K \cdot \partial \rho / \partial z) / \partial z \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 u と w はそれぞれ水平方向と鉛直方向の速度であり、乱流拡散項は Fick の仮説に従って表現できるものとする。 K は総合的な乱流拡散係数であり熱と物質濃度の両者を考えるときには両者の寄与の和で表わされるものとする。

この式を上層 ($z = z_0$ から $z = H$ まで) 内で積分し、自由表面および界面の条件式(17)、(19)を用いると次式を得る。

$$\partial \int_{z_0}^H \rho dz / \partial t + \partial \int_{z_0}^H \rho u dz / \partial x - \rho_0 w_e \\ = K \cdot (\partial \rho / \partial z)|_H - \partial \rho / \partial z|_{z_0} \dots\dots\dots (21)$$

いま、溶解性物質により密度差が生成されているものと考え、空中へ拡散する成分はないので $K \cdot \partial \rho / \partial z|_H = 0$ になる。また、式(20)を上層の平均密度 ρ_0 および平均流速 U_1 で書き直すと次式になる。

$$\partial(\rho_0 h) / \partial t + \gamma \partial(\rho_0 U_1 h) / \partial x \\ = \rho(z_0, t) w_e - K \cdot \partial \rho / \partial z|_{z_0} \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 h は上層厚さであり、

$$\gamma = \int_{z_0}^H (\rho u / \rho_0 U_1) dz / h$$

(4) 連行速度の算定法

式(22)のように、下層から上層への質量輸送は連行速度と乱流拡散とから成り立っていることが明らかと

なった。このとき連行速度 w_e をどのように決定したらよいか、という課題が生ずる。通例、式 (22) の左辺は計測により既知となるが、連行量および拡散量はともに未知量である。そこで、密度流において成り立つ連続式 (15) と式 (22) とを連立させ、連行量と拡散量とを同時に定めるのが妥当と考えられる。

図一に示される二次元運動の場合では連続式は

$$\partial u / \partial x + \partial w / \partial z = -\beta \partial (k \partial c / \partial z) / \partial z \dots \dots \dots (23)$$

である。ここでは主流方向では拡散項の影響を無視した。この式を上層内で積分し、自由表面、界面における条件を用いて、式 (21) に示される演算を同様に実行すると次式を得る。

$$w_e = \partial h / \partial t + \partial (U_1 h) / \partial x - \beta k \partial c / \partial z |_{z_0} \dots \dots \dots (24)$$

このように連行速度 w_e は2つの部分から成り立っていることがわかる。分子拡散が無視できるほど小さい場合には、上層厚さおよび上層平均流速の変化を知れば w_e を求めることができる。これは通常、乱流状態にあたる。一方、分子拡散が無視できないような場合には、 w_e は拡散と乱流による界面変化の和によって表わされることになる。式 (24) の分子拡散項は2成分混合液を念頭に置いて具体的な形が表わされているが、成分が殖えれば同様な形の拡散項が追加されるのは成分密度に対する質量保存則の形式からして容易にわかるところである。式 (24) により連行速度 w_e の定義が与えられる。

式 (24) の連行速度の定義を式 (21) に代入すれば、拡散による輸送量を次のように評価できる。

$$\begin{aligned} & \partial \left[\int_{z_0}^H \rho dz - \rho(z_0, t) h \right] / \partial t \\ & + \partial \left[\int_{z_0}^H \rho u dz - \rho(z_0, t) \int_{z_0}^H u dz \right] / \partial x \\ & = -K \cdot \partial \rho / \partial z |_{z_0} - \rho_r \beta k \cdot \partial c / \partial z |_{z_0} \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

式 (25) の左辺で示されるものが拡散で輸送される量である。層流状態では $K=0$ であり、乱流状態においては $k \ll K$ であるので分子拡散の寄与は無視できる。

次に、典型的な例について式 (24)、(25) の組から連行速度と拡散量とがどのように算出されるかの例を示す。

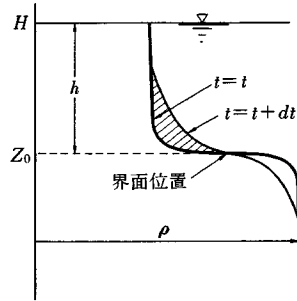
(例1) 拡散現象のみが生ずる場合

上層の平均移流速度はない場合を考える。式 (24) において $U_1=0$ であるから

$$w_e = \partial h / \partial t - \beta k \partial c / \partial z |_{z_0} \dots \dots \dots (26)$$

である。右辺の第1項は上層に乱れがあるとき(たとえば振動格子によるもの)に生ずる界面の移動である(図一5参照)。下層から上層への全質量輸送については式 (25) で算定することができる

$$\begin{aligned} \partial \int_{z_0}^H \rho dz / \partial t = & -K \cdot \partial \rho / \partial z |_{z_0} - \rho_r \beta k \cdot \partial c / \partial z |_{z_0} \\ & \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$



図一三 拡散による密度変化

となる。式 (27) の左辺は図一三の斜線を引いた部分の密度変化に相当し、これが拡散現象により輸送されたことになる。

(例2) 階段状の密度変化の場合

密度分布が階段状に変化した例を図一4に示す。 x 方向の速度はない簡単な場合を考えれば、式 (24) より $w_e = \partial h / \partial t = (h_1 - h_2) / dt \dots \dots \dots (28)$ となる。この場合は界面付近での密度変化は不連続であるので、拡散型による輸送は考えないことにする。式 (24) は上層に着目しているの、図一4の場合には上層厚が減る場合であり、上層に関する w_e は負となる。

拡散量の見積りは式 (25) で行われる。式 (25) の左辺第1項は

$$\partial \int \rho dz / \partial t$$

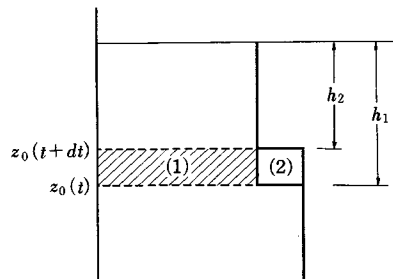
であり、これは図一4で斜線を施した領域(1)の密度変化に負の符号を付したものである。式 (25) の左辺第2項は

$$-\rho(z_0) \cdot \partial h / \partial t$$

であり、界面における密度を上層側の密度とすれば斜線部の領域に対応するので

$$-K \cdot \partial \rho / \partial z |_{z_0} - \rho_r \beta k \cdot \partial c / \partial z |_{z_0} = 0 \dots \dots \dots (29)$$

となる。式 (29) は不連続な界面では拡散型による輸送を考えない、という前提と合致する結果を与えている。一方、 $\rho(z_0)$ を界面下側の下層の密度に等しいと考えれば図一4の(2)の領域に相当する拡散が生じたことに



図一四 移流のみによる密度変化

なる。

一般の場合には上述の2つの例の中間の現象が生じ、拡散型による輸送と移流型による輸送とが混在することになる。

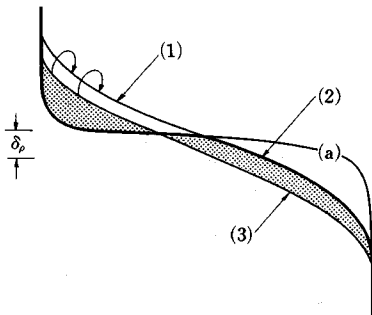
3. 連行現象に影響する諸因子とその評価法

(1) 連行に及ぼす分子拡散の評価

密度界面での混合現象を次の3つに分類して考えることとする。

【移流型】 シアーによる界面の不安定性によって生じた界面波の碎波や、界面に生じた組織渦により界面から離脱した流質が、流動層内の乱流により流動層全体にわたって拡散する形態の混合。密度界面の位置の変化を生じさせる（Ⅰ型）。

【微細乱流型】 小規模乱流による界面付近の混合形態であり、それ自体では密度の分布形状は変化するものの密度界面の位置の変化を生じさせない。狭義の意味での乱流拡散にあたる（Ⅱ型）。

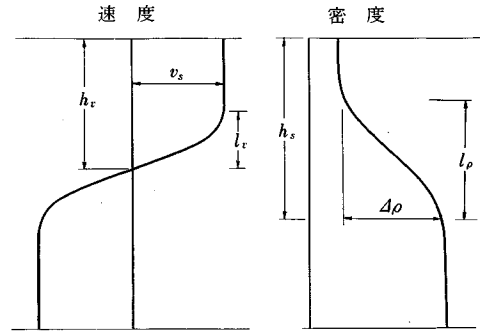


図—5 拡散による界面の変位

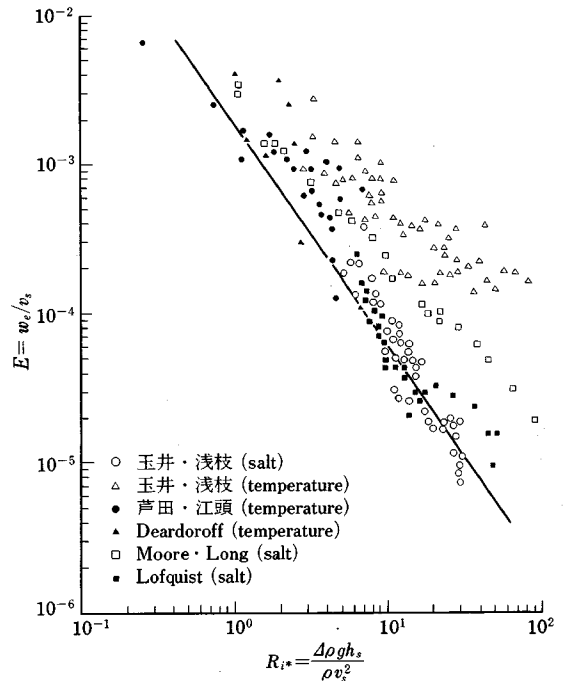
【拡散型】 分子拡散に代表される伝導型での流質の輸送形態。伝導率の大きな熱などではこの伝導型による輸送量は大きい（Ⅲ型）。

このうち、Ⅱ型、Ⅲ型においては、こうした現象が単独に生じたのであれば密度界面の位置の変化をもたらすことはないが（図—5の（1））、現実には上層もしくは下層の流動層は乱流状態にあり、Ⅱ型、Ⅲ型による混合によって密度界面より上部に形成される密度勾配の緩やかな部分は、乱流拡散によって一様化され、再び元の密度勾配と同程度のものとなる（図—5の（2）、太線）。そして上層に拡散された流質が移動した後に拡散作用によって新たに形成される密度界面の位置は、溶質の拡散（乱流拡散も含む）輸送速度に応じて変化を生ずる（図—5の（3））。したがって、結果として界面位置の変化を生じさせる。

a) 連行係数と層平均リチャードソン数の関係についての従来の成果



図—6 密度、流速分布の模式図



図—7 連行係数とリチャードソン数

界面での混合を評価するパラメーターとして平均水理量で記述した公式は比較的使いやすいので、層平均リチャードソン数が一般的によく用いられている。本論文では図—6に示すように、密度分布より決定した層厚 h_s 、密度差 $\Delta\rho$ および流速分布より決定した v_s を用いた。連行係数 E 、層平均リチャードソン数を次のように定義する。

$$E = w_e/v_s, \quad R_{i*} = \Delta\rho gh_s / \rho v_s^2 \dots\dots\dots (30)$$

ここに w_e は連行速度である。 E を R_{i*} に対して整理したのが図—7である³⁾⁻⁷⁾。図—7の△印、●印、▲印のデータは温度2成層による実験によるものであり、 R_{i*} が増加するに従って他のデータ群から大きく離れる。

R_{i*} の小さい領域では界面は不安定で、界面での混合

は、内部波の碎波によるⅠ型および乱れによるⅡ型の混合が主で、Ⅲ型の寄与は実質的には無視し得る。また塩分の場合は温度と比べて伝導率が2オーダー小さいので、Ⅲ型の寄与はかなり小さい。したがって塩分を用いて行われた R_{i*} が小さな領域での結果は、Ⅰ、Ⅱ型の混合を評価したものといえる。Ⅰ～Ⅲ型までの連行は互いに相加的であると考え、 $E = E_I + E_{II} + E_{III}$ と表わす。Ⅰ型とⅡ型が卓越する場合の経験則は次式で与えられる⁸⁾。

$$E_I + E_{II} = 2 \times 10^{-3} R_{i*}^{3/2} \dots\dots\dots (31)$$

式(31)は図-7における実線を表わしており、実験値との一致度は満足できるものであり、実線と実験値との偏差は熱により密度差を生じさせた実験で顕著である。

b) 分子拡散の効果を含んだ連行係数

連行速度は式(24)に与えられる。右辺の第1項と第2項は乱れによってもたらされる混合の結果として観測される量を示しており、本項の分類に従えば移流型(Ⅰ型)と微細乱流型(Ⅱ型)の場合である。したがって、式(24)を書き直す

$$E = w_e/v_s = E_I + E_{II} - 1/v_s \cdot k \partial c / \partial z |_{z_0} \dots\dots\dots (32)$$

ここでは簡単のため $\beta = 1$ と考えることとし、 c は混入成分密度の混合液の密度に対する比を表わす数値である。密度が変化する領域の厚みを l_0 とすれば、 $\partial c / \partial z$ が負の方向への輸送が生ずるから、差分表示を考えると次式を得る。

$$-1/v_s \cdot k \partial c / \partial z |_{z_0} = k / (v_s l_0) = P_e^{-1}$$

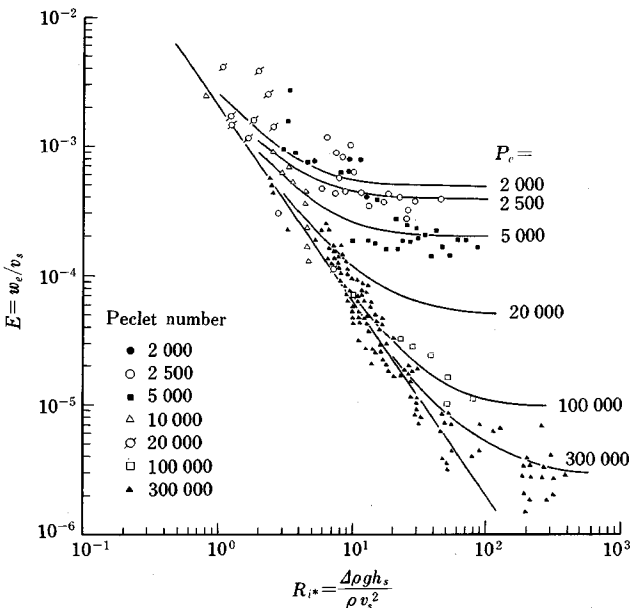


図-8 拡散型の連行係数を含んだ総連行係数とリチャードソン数

ここに、 P_e はペクレ数であり、 k は温度による成層の場合には温度伝導率を用い、塩分による成層の場合には温度による変化を考慮した塩分の拡散係数を用いる。したがって式(31)を用いれば、式(32)は次のように書き直すことができる。

$$E = w_e/v_s = 2 \times 10^{-3} R_{i*}^{3/2} + P_e^{-1} \dots\dots\dots (33)$$

図-8は図-7のデータをペクレ数によって分類し、シンボルを違えて示したものである⁹⁾。図中の実線は、各シンボルのペクレ数の代表値を用いて式(33)を示したものである。各シンボルはおのおの実線の周りに分布しており、Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ型の総和を表わした式(33)は実験データをよく説明しているといえる。 R_{i*} の大きな領域での図-7の実線からのずれはⅢ型の連行を評価することにより説明できることが知られた。またペクレ数の小さな温度成層では、温度伝導率が大きいため拡散型の E_{III} が R_{i*} の小さな領域においても無視できない寄与をしていることもわかる。2.で導かれた連行速度は、このように分子拡散の寄与も含んでおり、ペクレ数によりその効果が定量的に算定でき、幅広い成層条件に対してよい予測値を与えることがわかった。

(2) 連行係数に関する経験式

連行速度が最初に注目されたのは、噴流において噴流領域内の流量が流下方向に徐々に増加してゆく現象であったと考えられる¹⁰⁾。密度界面を通しての物質および流体の輸送量が、流動している層の水理量の決定に重要な役割を果たしている現象は、それ以後もブルーム、密度噴流、内部跳水、選択取水、塩水くさびなどの広い範囲においてみられ、代表速度との比である連行係数の取扱いが関心を集めてきた。

ここでは、乱流状態の下で行われた多くの実験を概観し、乱れの発生因、代表尺度が異なる場合の相互関係について取りまとめる。

a) 2層流、吹送流、振動格子乱流を中心とした実験式

このような流れに対して提案された実験公式を類型別に掲げる。比較的早い時期には式(31)に示される須賀・高橋⁸⁾のものがある。これは元の形では

$$E_m = w_e/U_m, R_{im} = \epsilon g h / U_m^2, \epsilon = \Delta\rho/\rho \dots\dots\dots (34)$$

に対して与えられ、

$$E_m = 2.0 \times 10^{-3} \cdot R_{im}^{3/2} = A \cdot R_{im}^{-3/2} \dots\dots\dots (35)$$

である ($10^{-1} < R_{im} < 3 \times 10$)。ここに、 U_m は上層の平均流速、界面は密度分布から決められ、 h は上層厚であり図-6の h_s と同じである。図-8に示される実験値と式(31)との適合度からみて、 U_m を上層内の一様流速となった部分の流速 v_s 。

と置き換えても結果はほとんど変わらないことがわかる。

次に、乱れの発生因が異なる場合を通じての統一的な解釈を行おうと試みたものに Asaeda・Tamai¹¹⁾ のものがある。ここでは独立した粗度を付した水平摺動板により乱れが引き起こされ、振動乱流格子および2層せん断流型の両者の水理量が測定された。乱流量を用いて整理された結果は、Turner¹²⁾ の振動乱流格子による結果ともほぼ一致し次式となった。

$$E_t = w_e/w', R_{tm} = \epsilon g l/w'^2 \dots\dots\dots (36 \cdot a)$$

$$E_t = 1.0 \cdot R_{tm}^{3/2} \dots\dots\dots (36 \cdot b)$$

ここに、 w' は鉛直方向の乱れの速度の2乗平均値の平方根、 l は乱れの積分スケールである ($2 < R_{tm} < 8 \times 10$)。また、この実験で得られた結果および Lofquist⁴⁾、須賀・高橋⁸⁾、芦田・江頭¹³⁾、和田・片野¹⁴⁾、Ellison・Turner¹⁵⁾ 等の実験値を式 (34) の水理量を用いて整理すると、式 (35) が成立することが確かめられた ($10^{-1} < R_{tm} < 10^2$)。したがって、式 (35) と式 (36) は同一の内容を別な表記法で表わしていることがわかり、乱れの発生因に応じて測定しやすい水理量を選んで連行速度を評価すればよいことになる。

この考えをさらに広い範囲に拡張したものとして浦ら¹⁶⁾の研究がある。この場合には吹送流、あるいは流動層の乱れ強度を変化させた実験^{17)~19)} も含まれている。ここで得られた結果は式 (36) と類似であり、

$$E_n = w_e/w', R_{tm} = \epsilon g l/w'^2 \dots\dots\dots (37 \cdot a)$$

$$E_n = 0.7 \cdot R_{tm}^{3/2} \dots\dots\dots (37 \cdot b)$$

である。ここに、 w' は水平方向の乱れ速度の2乗平均値の平方根である ($5 < R_{tm} < 5 \times 10^2$)。式 (37・b) を平均流速形に書き直すと、式 (35) の A は

$$A = 0.7 T_f, T_f = (w'/U_m)(l/h)^{3/2} \dots\dots\dots (38)$$

となる。浦らは乱れ強度が判明している資料^{19), 20)} を用い、式 (38) が $T_f > 1.4 \times 10^{-3}$ で成立することを確かめた。 $T_f < 1.4 \times 10^{-3}$ では $A = \text{const.} = 1.0 \times 10^{-3}$ であった。

このように振動格子の乱れによる連行と吹送流および2層流の連行とが共通な表示で書き表わされるのは、連行が界面波の碎波と大規模な組織渦に依って生じ、微細な乱れが界面に作用して界面に混合層を形成する過程が両者で類似しているためと考えられる。

b) 密度噴流を中心とした実験式

二次元表面層密度噴流における連行係数を論じたものに室田・中辻²¹⁾の研究がある。ここではa)では触れなかった2種類の代表尺度について述べる。Chu・Vanvari²²⁾は浮力流速の断面内積分値 $N = \int_{z_0}^H (\Delta\rho/\rho) g u dz$ が流下方向に保存されるので、放流口での N の値 N_0 と、水表面流速 u_H を用いてリチャードソン数 R_{iB} を定義している。すなわち、

$$R_{iB} = N_0/u_H^3 \dots\dots\dots (39)$$

である。 $E_B = w_e/u_H$ と R_{iB} との関係は、放出時の密度フルード数が7~24程度の Chu・Vanvari、椿・小松²³⁾等の例では資料のまとまりはよいが、放出口密度フルード数が1.8~6の室田・中辻の実験では散乱が大きくなった。

他の1つのリチャードソン数は速度勾配が存在する層厚 l_v を用いるものである。室田らは $l_v = u_H/(-\partial u/\partial z)_{\text{max}}$ でこれを定義した。リチャードソン数は

$$R_{iv} = (\Delta\rho/\rho) g l_v/u_H^3 \dots\dots\dots (40)$$

である。せん断層リチャードソン数 R_{iv} に対して、同一の速度を代表値として用いた連行係数 $E_v = w_e/u_H$ の変化は、

$$E_v \propto R_{iv}^{-1}, R_{iv} > 0.12 \text{ に対し} \dots\dots\dots (41)$$

であり ($0.12 < R_{iv} < 0.4$)、この関係は Asaeda・Tamai¹¹⁾ が $10^{-1} < R_{iv} < 6 \times 10$ の範囲で得た関係式と勾配は一致している。 $R_{iv} = 0.12$ は、混合層に大規模かつ組織立った渦構造や不規則な乱れ変動が観測される上限であるので^{24), 25)}、この点を境にせん断流の卓越領域と浮力が卓越する領域とに区分され、乱れの構造が異なることが推測される²¹⁾。

(3) 連行係数の理論的誘導

二次元の密度流運動において用い得る基礎方程式は、微分形式において連続式、2方向の運動量保存則、浮力流束の保存則、平均流のエネルギー式の5つである。未知量は2方向の速度、浮力、圧力、レイノルズ応力、浮力と乱れの相関項であり、未知量の数の方が多し。これを流動層内で積分して積分型の表示を得るのが通常の手法であり、この段階での基礎式は流量変化の式、流れ方向の運動量保存則、流れ方向の浮力流束の保存則、エネルギー保存則の4つとなる。積分の過程においては、種々の水理量の断面内の分布は相似関数で表現できると仮定するのが普通である。積分形式における未知量は断面内の流下方向の代表流速、代表浮力、流動層厚、レイノルズ応力の主要項(1つ)、連行係数の5つであり、未知量の数の方が1つ多い。

連行係数の関数形を理論的に求めようとするときには、上述の特徴からわかるようにもう1つの関係式を追加する必要がある。連行係数を理論的に論じた最初は椿・小松²³⁾であろう。彼らは追加すべき方程式として乱れエネルギーの保存則を用いた。また表面密度噴流における乱れ計測より、乱れエネルギーや混合距離の断面最大値がリチャードソン数の関数として流れ方向に減少すると考えた。すなわち、乱れエネルギーと混合距離が成層状態により影響を受けるとした。

$$E_B = w_e/u_H = f(R_{iB})$$

の関数形はかなり複雑であるのでここには載せないが、

$0 < R_{is} < 0.3$ の噴流域で実験結果をよく再現できた。特徴としては $R_{is} = 0.339$ において $E_B = 0$ である。このように椿・小松の理論は密度噴流域に対しては優れた結果を与えるが、難点を挙げると式形が非常に複雑なことがある。

次いで行われた試みに Jirka²⁶⁾ のものがある。彼は無流面までの水深 h_v 、水表面での浮力 B_H 、水表面流速 u_H を用いたリチャードソン数 $R_{is} = B_H h_v / u_H^3$ が、無次元距離に関しては一義的な変化をすると仮定して、連行係数と R_{is} の関数を導いた。基礎式の不足に対しては、レイノルズ応力を u_H^2 で除したものが相似関数で表わされるものとした。さらに、浮力はレイノルズ応力に影響を与えるものとして、モーニン・オブコフ長の概念を導入して E と R_{is} との間の関数形を定めた。関数に含まれる係数等は密度噴流の実験に適合するように定められたが、 R_{is} の有限値では $E = 0$ とはならず、 $R_{is} \rightarrow \infty$ で $E = 0$ となる式形を採用しており、噴流域外への拡張の可能性は残された。

室田・中辻²¹⁾ は Jirka と同様な展開を行い、内容の一部を修正した。浮流束の保存則の取扱いを厳密化するとともに、レイノルズ応力の分布形に新しい観測結果²⁵⁾ を用いた。得られた関数形は次式である。

$$E_v = w_e / u_H = [5.61 \times 10^{-3} (1.48 - R_{is})] \div [(R_{is}^2 - 0.778 R_{is} + 3.83) \times R_{is}^2] \dots\dots\dots (42 \cdot a)$$

$$R_{is} = B_H h_v / u_H^3 \dots\dots\dots (42 \cdot b)$$

表層密度流において流下方向に保存される運動量 M_0 と浮流束 P_0 を用いた定式化が行われた²⁷⁾。このとき無次元化のための代表長さ l_n 、代表流量 q_n は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} l_n &= M_0 / P_0^{2/3} = h_0 F_0^{2/3} (1 + F_0^{-2} / 2) \\ q_n &= M_0 / P_0^{1/3} = q_0 F_0^{1/3} (1 + F_0^{-2} / 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

ここに、 F_0 は放出密度フルード数であり、添字 0 は放出口での値を示す。

リチャードソン数は無次元流動層厚 $h_* = h / l_n$ および無次元単位幅流量 $q_* = q / q_n$ により次のように与えられる。

$$R_{in} = (q_* / h_*)^{-4/3} \dots\dots\dots (44)$$

連行係数は Jirka の理論を修正した形で次式となる。

$$E_m = 0.06 (1 - 1 / \sqrt{1 + 6.5 R_*^2 / R_{in}^2}) \dots\dots\dots (45)$$

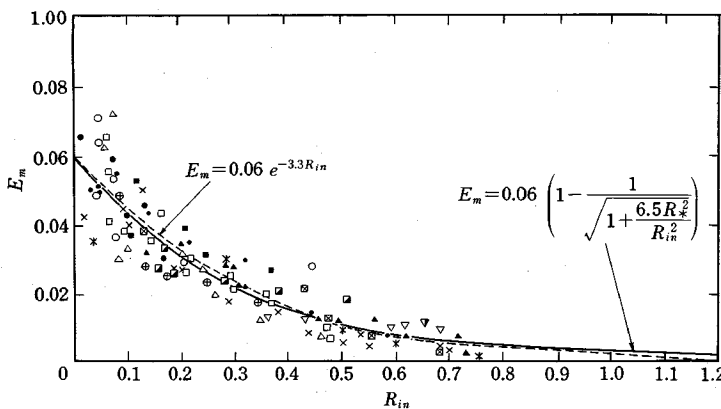
ここに、 E_m は流動層の平均流速に対する連行係数である。 R_* は勾配型の臨界リチャードソン数であり、理論値は $1/4$ であるが式 (45) が実験値と一致するためには 0.14 がよい。式 (45) と実験値との比較を図-9 に示す。式 (45) の近似式としては $E_m = 0.06 \exp(-3.3 R_{in})$ であり。

連行の概念は流動層の流量増加を出発点としていたので、無流面を通しての流体の輸送から連行係数を規定すべきとの提案がある²⁸⁾。これは密度噴流域から強い成層状態までを含む幅広いリチャードソン数に対して適用が可能な理論であり、粘性の効果も考慮されているが、従来の資料の大半が密度分布に基づく界面により整理されているため、検証は今後の課題である。

4. 総括と今後の課題

(1) 本論文においては連行現象の概念に統一的解釈を与えるとともに、混合流体における各成分の運動が連続体仮説に従う、という前提から出発して、連行速度の定義を演繹的に導いた。得られた連行速度の定義は分子拡散による寄与と移流型による寄与との和で構成されており、広い範囲にわたり適用が可能であるとともに、これらの両者の寄与を定量的に表わすことが可能となった。

また、混合流体および成分物質に関する質量保存則を連立して用いて、全質量輸送に占める移流型と拡散型による輸送量の割合をそれぞれ独自に求め得る方法を示した。



Experimental Data	
Chu & Vanvari (1976)	R_{i0}
□	0.0110
●	0.0071
⊗	0.0220
■	0.0232
Tsubaki & Komatsu (1978)	
○	0.00177
○	0.00346
⊗	0.00613
Murota & Nakatsuji (1984)	
△	0.004
▲	0.017
▽	0.033
▽	0.059
Ellison & Turner (1959)	
× × ×	

図-9 Jirka の修正式と実験結果との比較²⁷⁾

(2) 連行は乱流による輸送と分子拡散による輸送との和から成る。連行係数に及ぼす分子拡散の効果は、ペクレ数に逆比例することが理論的に導かれ、熱を用いた実験により幅広い範囲のペクレ数に対して成立することが確認された。

(3) 連行係数をリチャードソン数のベキで表現する経験則に関し、さまざまな代表量を用いた関係式の間の比較を行った。ベキ乗則の範囲においては、流動の種類により適用する公式を2つに分類するのが妥当である。その1つは、2層流、吹送流、振動格子乱流であり、もう1つは密度噴流である。

(4) 2層流、吹送流、振動格子乱流においては、流動量の平均水理量を用いた式(35)と乱れ量を用いた式(36・b)あるいは式(37・b)とは等価なものと考えられる。密度噴流域におけるベキ乗則としては式(41)が適用性が高いと考えられる。

(5) 連行係数を理論的に求める手法のレビューを行った。浮力の効果を混合距離を通して表現するアプローチとレイノルズ応力の表現を直接的に修正するアプローチがある。得られた解と実験値との適合性にはそれほど大きな差異はないが、後者の方式で得られる関数形の方が簡単である。理論解の成立の適否はもっぱら密度噴流に対して論じられている。

(6) 密度噴流から強く成層した状態までを含む広いリチャードソン数の領域に対して連行係数を理論的に求める試みが紹介された。新しい実験資料により、新たな進展が望まれる。

(7) 成層流での乱流、密度界面付近での組織構造についての研究が進展しており、連行に与える効果が定量化されることが期待される。

本論文をまとめるにあたっては、「密度流現象における連行概念の統一化とその応用」の研究グループ(文部省科学研究費補助金総合研究(A)59350034, 代表者:玉井)の成果を参照した。研究分担者は長岡技術科学大学 早川典生,九州大学 小松利光,北海道大学 吉田静男,豊橋技術科学大学 中村俊六,京都大学防災研究所 江頭進治,大阪大学 中辻啓二,東京大学 浅枝 隆の諸氏であり、これらの分担者諸氏の尽力および努力に深甚なる謝意と敬意を表する。

補 遺

用語	[定 義]
英語の用語	
密度流 density current	重力場における流体運動において、空間的な密度の差異が重要な役割を果たす流れ。

成層流
stratified flow

密度界面
density interface

混合層
mixed layer
せん断混合層
mixing layer

中間密度層
intermediate density layer

連行
entrainment

連行速度
entrainment velocity

(注) 海洋学では、密度差により生ずる海流のことを密度流とよぶ。

種々の原因で層をなしている流体の流れを示し、特に密度が要因となって成層している場合には、成層密度流とよぶ。

(注) 連続的および不連続的な密度変化をともに含む。

成層密度流における密度の不連続面をさす。混合しない液体間の密度界面は自明であるが、混合可能な流体においては密度勾配最大の位置、局所リチャードソン数の急変点、鉛直方向の密度フラックスが極値をとる点などで仮想的な界面を定義する。仮想的な界面を用いて議論を進める場合には、冒頭にその定義を明記する必要がある。

(注) 内部境界面という用語も存在するが、最近では密度界面という用語の方が一般に用いられる。

成層密度流において、混合によって密度がほぼ一様に達した層。

自由せん断乱流において周囲流体との干渉の下に速度分布が定まる層。周囲流体との間に密度差が存する場合には、速度と密度の両者が対象となる。従来、混合層とよばれたこともある。

成層密度流において、混合層間、もしくは混合層と周囲流体との間に存在する、中間的な密度を有する層。

速度、温度、濃度、濁度などが異なる層の間に生ずる質量の輸送現象をいう。乱流状態のときは、層の流動体積の変更を伴う成分と、分子拡散による寄与との和である。

(注) 質量は通例、速度の大きな層へと輸送されると考える。最近では、相互の輸送量を考える、相互連行の概念も提出されている。

2層間の物質輸送量を表現する速度。定義された界面(密度流では密度界面を用いることが多い)を単位時間、単位面積当たりある向きに通過する質量の時間平均値を代表密度で割った値。

	(注) 2層間の物質輸送は、拡散と連行との両者によって行われる。連行現象は均質流体の中でも生ずる(たとえば、噴流)。このときは質量輸送量の変化ではなく、流量の変化から連行速度が定められる。代表的な記号 w_e 。		
連行係数 entrainment coefficient	連行速度と連行を引き起こしている代表流速との比。 (注) 代表的な記号 E	パフ puff	と同義である。周囲流体より大きな密度をもつ流体を連続的に噴出するときは、負の密度噴流 (negative buoyant jet) とよぶ。 注: forced convection は流れの存在する場に生じた対流を示す。 運動量の瞬間的な噴出に伴う流体運動。
密度フルード数 densimetric Froude number	密度流において代表長さ L 、代表速度 V 、層間の代表密度差 $\Delta\rho$ 、基準密度 ρ_0 、重力加速度 g とするとき $V/\sqrt{(\Delta\rho/\rho_0)gL}$ で表わされる無次元量。慣性力と浮力との比を示し、成層密度流においては密度フルード数 $F_d=1$ が臨界値を示す。 $F_d>1$ は密度流的な射流、 $F_d<1$ は密度流的な常流である。 (注) 内部フルード数という用語 (internal Froude number の訳) も存在する。i. F. n. は Rouse らにより 1950 年代に用いられ、その後 1960 年代になって d. F. n. が Streeter によって用いられ始めた。現在は一般に後者が用いられる。代表的な記号 F_d	サーマル thermal	浮力が瞬間的に供給されることによって生ずる流体運動。
		密度パフ buoyant puff	周囲流体との間に密度差を有するパフ。
		内部跳水 internal hydraulic jump	密度流的な射流から常流へ遷移するときに2層流の界面位置が急激に変化する現象。 (注) 密度フルード数という用語に合わせて密度跳水とよぶ考えもあるが、現時点では内部跳水という用語が最も適当である。
		内部波 internal gravity wave	連続密度成層中に生じる重力波。
		界面波 interfacial wave	単一な、不連続とみなせる境界面に生じる波。 (注) 広義には自由表面の波を含むが、これには表面波という用語が慣用的に用いられる。
全域リチャードソン数 overall Richardson number	対象とする流れ場の代表量を用いて定義されたリチャードソン数。 (注) 代表的な記号 R_{10}	内部セイシュ internal seiche	閉鎖性水域の密度界面に誘起された重複振動。
層平均リチャードソン数 overall Richardson number の特別な例	成層密度流において層内で平均された量を用いて定義されたリチャードソン数。密度フルード数の2乗の逆数にあたる。	フロント front	密度の異なる周囲流体中へ明瞭な界面を有しながら侵入する流体塊の先端部。 (注) フロントあるいは後続する流体の運動を gravity current という。
		近接領域 near field	水域に冷却水などを放流する場合において、放流水の有する運動量がその広がりを支配する領域。
噴流 jet	運動量の連続的な噴出に伴う流体運動。	遠方領域 far field	水域に冷却水などを放流する場合において、周囲水の流れ、乱れなどが放流水の広がりを支配する領域。
ブルーム plume	浮力が連続的に供給されることにより生ずる流体運動。	希釈倍率 dilution rate	ある点での濃度を c 、基準濃度を c_0 とするとき、 c_0/c で、定義される量。これを簡潔に希釈率とよぶ場合もある。 (注) 代表的な記号 s
密度噴流 buoyant jet	周囲流体との間に密度差を有する噴流。 (注) 主にアメリカで使用される buoyant jet の和訳。主にイギリス系の国で使用される forced plume		

参 考 文 献

- 1) Kirwan, A. D., Jr. : A review of mixture theory with applications in physical oceanography and meteorology, *J. Geophys. Research*, Vol. 90, No. C2, pp. 3265~3283, 1985.
- 2) たとえば, Batchelor, G. K. : *An Introduction to Fluid Dynamics*, 615 p., Cambridge Univ. Press, 1967.
- 3) 玉井信行・浅枝 隆・渡辺幸喜・菅 和利 : 低レイノルズ数の成層密度流における混合, 第40回土木学会年次学術講演会概要集, II, pp. 337~338, 1985.
- 4) Lofquist, K. : Flow and stress near an interface between stratified liquids, *The Physics of Fluids*, Vol. 3, No. 2, pp. 158~175, 1960.
- 5) Deardorff, J. W. and Wills, G. E. : Dependence of mixed-layer entrainment on shear stress and velocity jump, *J. Fluid Mech.*, Vol. 115, pp. 123~149, 1982.
- 6) Moore, M. J. and Long, R. R. : An experimental investigation of turbulent stratified shear flow, *J. Fluid Mech.*, Vol. 49, pp. 635~655, 1971.
- 7) 芦田和男・江頭進治 : 密度躍層のある場における濁水の挙動に関する研究 (3), 京大防災研究所年報, 第20号B, pp. 437~450, 1977.
- 8) 須賀堯三・高橋 晃 : 淡塩二層流の連行係数, 第31回土木学会年次講演会概要集, II, pp. 383~384, 1976.
- 9) Tamai, N. and Asaeda, T. : Role of molecular diffusivity on mass and heat transport at a density interface, *Preprints, 3rd Int. Symp. on Stratified Flows*, Vol. 1, 1987.
- 10) Tollmien, W. : Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge, *ZAMM*, pp. 468~478, 1926.
- 11) Asaeda, T. and Tamai, N. : Turbulent entrainment in stratified flows, *Proc. 3rd Int. Symp. on Stochastic Hydraulics*, pp. 445~456, 1980.
- 12) Turner, J. S. : The influence of molecular diffusivity on turbulent entrainment across a density interface, *J. Fluid Mech.*, Vol. 33, pp. 639~656, 1968.
- 13) 芦田和男・江頭進治 : 非一様密度場における濁度物質の拡散と貯留機構, 第20回水理講演会論文集, pp. 173~178, 1976.
- 14) 和田 明・片野尚明 : 工業用水の取水問題, 第15回海岸工学講演会論文集, pp. 297~306, 1968.
- 15) Ellison, T. H. and Turner, J. S. : Turbulent entrainment in stratified flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 6, pp. 423~448, 1959.
- 16) 浦 勝・椿東一郎・松永信博・並川 正 : 密度界面における連行に及ぼす乱れの寄与, 第29回水理講演会論文集, pp. 401~406, 1985.
- 17) 加藤 始・池田高則 : 下層二層流の実験 (1), 第28回海岸工学講演会論文集, pp. 520~529, 1981.
- 18) 加藤 始・中野 晋・池田高則 : 下層二層流の実験 (2), 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 540~544, 1982.
- 19) 加藤 始・中野 晋・池田高則 : 下層二層流についての実験的研究, 港湾技術研究所報告, 第21巻, 第1号, pp. 31~56, 1982.
- 20) 浦 勝・廣畑浩司 : 二成層場の吹送流の乱流構造と連行現象, 第31回海岸工学講演会論文集, pp. 650~654, 1984.
- 21) 室田 明・中辻啓二 : 二次元表層密度噴流における連行特性に関する研究, 土木学会論文集, 第351号/II-2, pp. 97~106, 1984.
- 22) Chu, V. H. and Vanvari, M. R. : Experimental study of turbulent stratified shearing flow, *Proc. ASCE, HY6*, pp. 691~706, 1972.
- 23) 椿東一郎・小松利光 : 2次元表層密度噴流における流れの特性と連行現象, 土木学会論文報告集, 第273号, pp. 69~81, 1978.
- 24) 室田 明・中辻啓二・藪内生死 : 二次元表層密度噴流における大規模渦運動に関する実験的研究, 土木学会論文報告集, 第339号, pp. 109~118, 1983.
- 25) 室田 明・中辻啓二・戸上拓也 : 二次元表層密度噴流の初期発生過程に及ぼす成層効果について, 土木学会論文報告集, 第342号, pp. 115~123, 1984.
- 26) Jirka, G. H. : Turbulent buoyant jets in shallow fluid layers, *Turbulent Buoyant Jets and Plumes*, Pergamon Press edited by W. Rodi, pp. 69~119, 1982.
- 27) 有田正光・Jirka, G. H.・玉井信行 : 二次元表層放出密度流の流動形態と混合に関する研究, 土木学会論文集, 第375号/II-6, pp. 61~67, 1986.
- 28) 有田正光・Jirka, G. H. : 二層流の連行および界面抵抗係数, 第31回水理講演会論文集, pp. 479~484, 1987.

(1987.2.19・受付)