

三次元有限回転を伴う Timoshenko はりの幾何学的非線形理論

GEOMETRICALLY NONLINEAR THEORY OF TIMOSHENKO'S BEAM
WITH FINITE ROTATIONS IN SPACE

井浦雅司*・平嶋政治**

By Masashi IURA and Masaharu HIRASHIMA

Geometrically nonlinear theory of rods with shear deformations is developed. Particular attention is paid to investigate the coupling of finite rotations due to bending, twist and shearing. A finite rotation vector plays an important role in a formulation of the present problem. When the equilibrium equations and the associated boundary conditions are derived from the principle of virtual work, the magnitude of displacements, rotations, and strains is treated as finite one. The stress-strain relationships proposed herein differ slightly with the existing ones. They yield, however, the well-known and widely accepted constitutive equations expressed by the stress resultants and moments and the generalized strains. The accuracy of the present equilibrium equations is confirmed through comparisons with those obtained by the equilibrium method.

Keywords: Timoshenko beam, finite displacement theory

1. はじめに

棒の力学は、これまでも多くの研究者の注目を集めており、多数の研究結果が報告されている。既往の研究において多く用いられている仮定の1つに、変形前に平面である横断面は、変形後もその形状は不変で平面を保持するというものがあり、これを Timoshenko はりとよんでいる。さらに、変形前に棒軸に垂直であった平面が、変形後も棒軸に対し垂直を保持するという仮定が加わると、これを Bernoulli-Euler はりとよぶ。後者の Bernoulli-Euler はりの幾何学的非線形理論は、さまざまな手法により展開されており、三次元的な有限回転を伴う場合についても、その連成挙動は明確にされている。

一方、Timoshenko はりについては、平面非線形問題の場合について、理論的・数値的研究はこれまで多くなされているものの^{1)~6)}、三次元的な有限回転を伴う幾何学的非線形理論はそれほど議論されてはならず、著者らの知る限り、Reissner^{7),8)}、Simo⁹⁾により展開されているに過ぎない。文献7)において、Reissner はひずみに

ついてある仮定をもうけて Timoshenko はり理論を展開している。文献8)では、上記の仮定を用いず、別の手法で Timoshenko はり理論を展開しているが、変形後の基底ベクトルを誘導する際に、変位の3次項以上を無視しており、その適用範囲には限界がある。Simo は、文献9)において、Timoshenko はり理論の一般論を展開しているだけで、力学的関係式(たとえば、ひずみと変位の関係、せん断変形と独立パラメーターの関係など)については述べていない。このように、既往の研究により、三次元的に有限な回転を伴う Timoshenko はりの幾何学的非線形理論がすでに定式化されているとはいいがたい。以上の研究のほかに、別の手法により棒理論が展開されているものの¹⁰⁾、ここでは、個々の変形が物理的意味をもつような棒理論を展開することとする。

本報告では、基準状態において、棒軸が直線をなす充実断面の Timoshenko はりを対象にして、三次元的に有限な回転を伴う幾何学的非線形理論を展開している。手法としては文献11)の延長であり、回転に関してさらに2個の独立パラメーターを導入し、合計で6個のパラメーターを用いている。ここで用いるモデルは古典理論と同様のものとし、以下の仮定が成り立つものとする。

i) 変形前に平面である横断面は、変形後もその形

* 正会員 工博 東京電機大学助教授 理工学部建設工学科
(〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

** 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科
(〒163 新宿区大久保3-4-1)

状は不変で平面を保持する。

ii) 反り変位は無視する。

iii) 材料は弾性であり、等方・等質とする。

なお、変位・回転・ひずみはそれぞれ有限量として扱われており、本報告の結果を、平面問題に限定すれば既往の厳密な理論式と一致し、さらに、せん断変形の影響を無視すれば厳密な Bernoulli-Euler はりの結果と一致することになる。

本報告では、総和規約を用いており、ラテン文字の添字は 1, 2, 3 を、ギリシャ文字の添字は 1, 2 をとるものとする。

2. 変位場

基準状態において棒軸は直線であると仮定し、右手系の埋め込み座標系として、横断面の主軸に沿って ξ^α 座標を、棒軸に沿って ξ^3 座標を導入する。それぞれの座標に単位基底ベクトル e_m を導入すると、これらは直交ベクトルとなる。さらに、棒軸に沿った基底ベクトル e_3 と一致するように単位基底ベクトル n を導入する。また、横断面内の任意の点における基底ベクトルを a_m とおくと、その定義より $a_m = e_m$ となる (Fig. 1)。

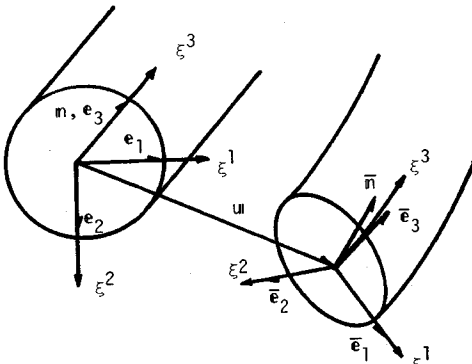


Fig.1 Coordinates and Base Vectors.

変形後、横断面の主軸に沿った単位基底ベクトル e_α は \bar{e}_α に移動するものとし、棒軸に沿った単位基底ベクトルを \bar{e}_3 とすると、ベクトル \bar{e}_m はせん断変形のためにはや直交ベクトルではなくなる。また、次式で定義される単位ベクトル \bar{n} を導入する。

$$\bar{n} = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 \dots\dots\dots (1)$$

このとき、ベクトル \bar{e}_α, \bar{n} は直交ベクトルとなる。

本報告では、せん断変形に関するパラメーターを β_α とし、以下のように定義する。

$$\beta_\alpha = \bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_3 \dots\dots\dots (2)$$

変形後の単位基底ベクトル \bar{e}_3 は、式 (2) より

$$\bar{e}_3 = \beta_\alpha \bar{e}_\alpha + \beta_0 \bar{n} \dots\dots\dots (3)$$

と表わされ、ここに

$$\beta_0 = \sqrt{1 - (\beta_1)^2 - (\beta_2)^2} \dots\dots\dots (4)$$

である。一方、変形後の棒軸の位置ベクトルを微分し、単位化することにより、ベクトル \bar{e}_3 は次式のように表わすこともできる。

$$\bar{e}_3 = \frac{(r+u)_{,3}}{|(r+u)_{,3}|} = u^i \|_3 e_i \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 r は変形前の棒軸の位置ベクトル、 $u (= u^i e_i)$ は棒軸の変位ベクトル、 $()_{,3}$ は ξ^3 に関する微分を示し、さらに、

$$u^\alpha \|_3 = \frac{u^\alpha_3}{\sqrt{G_0}}, \quad u^3 \|_3 = \frac{(1+u^3_3)}{\sqrt{G_0}}$$

$$G_0 = (u^1_3)^2 + (u^2_3)^2 + (1+u^3_3)^2 \dots\dots\dots (6 \cdot a-c)$$

である。

変形後のベクトル \bar{e}_α, \bar{n} は直交ベクトルであるから、有限回転ベクトル $\theta (= \theta^i e_i)$ を用いて、それらは変形前の単位基底ベクトル e_i により次式のように表わされる¹¹⁾。

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \left[1 - \frac{1}{4}(1 + \cos w)(\theta^2)^2 + (\theta^3)^2 \right] e_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 + \cos w) \left(\theta^3 + \frac{1}{2} \theta^1 \theta^2 \right) e_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 + \cos w) \left(-\theta^2 + \frac{1}{2} \theta^1 \theta^3 \right) e_3 \\ \bar{e}_2 &= \frac{1}{2}(1 + \cos w) \left(-\theta^3 + \frac{1}{2} \theta^1 \theta^2 \right) e_1 \\ &\quad + \left[1 - \frac{1}{4}(1 + \cos w)(\theta^3)^2 + (\theta^1)^2 \right] e_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 + \cos w) \left(\theta^1 + \frac{1}{2} \theta^2 \theta^3 \right) e_3 \\ \bar{n} &= \frac{1}{2}(1 + \cos w) \left(\theta^2 + \frac{1}{2} \theta^3 \theta^1 \right) e_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 + \cos w) \left(-\theta^1 + \frac{1}{2} \theta^2 \theta^3 \right) e_2 \\ &\quad + \left[1 - \frac{1}{4}(1 + \cos w)(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 \right] e_3 \\ &\quad \dots\dots\dots (7 \cdot a-c) \end{aligned}$$

ここに、

$$(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 + (\theta^3)^2 = \frac{4(1 - \cos w)}{(1 + \cos w)} \dots\dots\dots (8)$$

である。

本報告で用いる独立パラメーターとしては、棒軸の変位ベクトル u のほかに、横断面の回転に関するものとして、文献 11) と同様に

$$\theta^3 = 2 \tan \frac{1}{2} \alpha^3 \quad (|\alpha^3| < \pi) \dots\dots\dots (9)$$

で定義される α^3 、および、次式で定義されるパラメーターを導入する。

$$\alpha^1 = \frac{1}{2}(1 + \cos w) \left(\theta^2 + \frac{1}{2} \theta^3 \theta^1 \right)$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos w) \left(-\theta^1 + \frac{1}{2} \theta^2 \theta^3 \right) \dots\dots\dots (10 \cdot a, b)$$

ここに、 α^0 は式 (7) からわかるように、 $\alpha^0 = \bar{n} \cdot e_\beta$ となり、それぞれ曲げによる回転に関するパラメーターである。式 (8)~(10) より、有限回転ベクトルの成分 θ^α をパラメーター α^m で表わすと、

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \lambda \left(\alpha^1 \frac{\sin \alpha^3}{1 + \cos \alpha^3} - \alpha^2 \right) \\ \theta^2 &= \lambda \left(\alpha^1 + \alpha^2 \frac{\sin \alpha^3}{1 + \cos \alpha^3} \right) \\ \lambda &= \frac{2}{1 + \alpha_0}, \quad \alpha_0 = \sqrt{1 - (\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2} \dots\dots\dots (11 \cdot a \sim d) \end{aligned}$$

と求まる。これより、変形後のベクトル \bar{e}_α, \bar{n} は、パラメーター α^m により以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{2} (\alpha^1)^2 \right) \cos \alpha^3 - \frac{\lambda}{2} \alpha^1 \alpha^2 \sin \alpha^3 \right\} e_1 \\ &\quad + \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{2} (\alpha^2)^2 \right) \sin \alpha^3 - \frac{\lambda}{2} \alpha^1 \alpha^2 \cos \alpha^3 \right\} e_2 \\ &\quad - (\alpha^1 \cos \alpha^3 + \alpha^2 \sin \alpha^3) e_3 \\ \bar{e}_2 &= - \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{2} (\alpha^1)^2 \right) \sin \alpha^3 + \frac{\lambda}{2} \alpha^1 \alpha^2 \cos \alpha^3 \right\} e_1 \\ &\quad + \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{2} (\alpha^2)^2 \right) \cos \alpha^3 + \frac{\lambda}{2} \alpha^1 \alpha^2 \sin \alpha^3 \right\} e_2 \\ &\quad + (\alpha^1 \sin \alpha^3 - \alpha^2 \cos \alpha^3) e_3 \\ \bar{n} &= \alpha^0 e_\beta + \alpha_0 e_3 \dots\dots\dots (12 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

式 (2) で定義されたせん断変形に関するパラメーター β_α は、本報告で用いる独立パラメーター u^m, α^m により、式 (5), (12) を用いて、

$$\begin{aligned} \beta_1 &= u^1 \|_3 \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{2} (\alpha^1)^2 \right) \cos \alpha^3 - \frac{\lambda}{2} \alpha^1 \alpha^2 \sin \alpha^3 \right\} \\ &\quad + u^2 \|_3 \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{2} (\alpha^2)^2 \right) \sin \alpha^3 - \frac{\lambda}{2} \alpha^1 \alpha^2 \cos \alpha^3 \right\} \\ &\quad - u^3 \|_3 (\alpha^1 \cos \alpha^3 + \alpha^2 \sin \alpha^3) \\ \beta_2 &= -u^1 \|_3 \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{2} (\alpha^1)^2 \right) \sin \alpha^3 + \frac{\lambda}{2} \alpha^1 \alpha^2 \cos \alpha^3 \right\} \\ &\quad + u^2 \|_3 \left\{ \left(1 - \frac{\lambda}{2} (\alpha^2)^2 \right) \cos \alpha^3 + \frac{\lambda}{2} \alpha^1 \alpha^2 \sin \alpha^3 \right\} \\ &\quad + u^3 \|_3 (\alpha^1 \sin \alpha^3 - \alpha^2 \cos \alpha^3) \dots\dots\dots (13 \cdot a, b) \end{aligned}$$

と表わされる。

横断面内の任意点における変位ベクトル U は、仮定 i), ii) より

$$U = u + \xi^\alpha (\bar{e}_\alpha - e_\alpha) \dots\dots\dots (14)$$

と表わされ、式 (12) を代入することにより、変位ベクトル U は 6 個の独立パラメーターにより表わされることになる。

3. 平衡方程式と境界条件式

変形後のベクトル \bar{e}_α, \bar{n} に関する微分公式を求めると、

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{n} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{x}_3 & -\bar{x}_2 \\ -\bar{x}_3 & 0 & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & -\bar{x}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{n} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

と表わすことができ、ここに、

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= -\frac{\lambda}{2} (\alpha^1 \sin \alpha^3 - \alpha^2 \cos \alpha^3) \alpha_{0,3} \\ &\quad + \alpha_{3,3}^1 \sin \alpha^3 - \alpha_{3,3}^2 \cos \alpha^3 \\ \bar{x}_2 &= -\frac{\lambda}{2} (\alpha^1 \cos \alpha^3 + \alpha^2 \sin \alpha^3) \alpha_{0,3} \\ &\quad + \alpha_{3,3}^1 \cos \alpha^3 + \alpha_{3,3}^2 \sin \alpha^3 \\ \bar{x}_3 &= \alpha_{3,3}^3 + \frac{\lambda}{2} (\alpha_{3,3}^1 \alpha^2 - \alpha_{3,3}^2 \alpha^1) \dots\dots\dots (16 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

である。

変形後の横断面内の任意点における基底ベクトルを \bar{a}_m とおくと、

$$\bar{a}_m = (r + u + \xi^\alpha \bar{e}_\alpha)_m \dots\dots\dots (17)$$

と表わされ、ここに ()_m は ξ^m に関する微分を示す。

式 (17) より、 \bar{a}_m は \bar{e}_α, \bar{n} により

$$\begin{aligned} \bar{a}_\alpha &= \bar{e}_\alpha \\ \bar{a}_3 &= (\sqrt{G_0} \beta_1 - \xi^2 \bar{x}_3) \bar{e}_1 + (\sqrt{G_0} \beta_2 + \xi^1 \bar{x}_3) \bar{e}_2 \\ &\quad + (\sqrt{G_0} \beta_0 - \xi^1 \bar{x}_2 + \xi^2 \bar{x}_1) \bar{n} \dots\dots\dots (18 \cdot a, b) \end{aligned}$$

と求まる。

Green のひずみテンソルを ϵ_{ij} とおくと、

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{a}_i \cdot \bar{a}_j - a_i \cdot a_j) \dots\dots\dots (19)$$

と定義され、式 (18) より、それぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_{13} = \epsilon_{31} &= \frac{1}{2} (\sqrt{G_0} \beta_1 - \xi^2 \bar{x}_3) \\ \epsilon_{23} = \epsilon_{32} &= \frac{1}{2} (\sqrt{G_0} \beta_2 + \xi^1 \bar{x}_3) \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{2} \left\{ (\sqrt{G_0} \beta_0 - \xi^1 \bar{x}_2 + \xi^2 \bar{x}_1)^2 + (\sqrt{G_0} \beta_1 - \xi^2 \bar{x}_3)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt{G_0} \beta_2 + \xi^1 \bar{x}_3)^2 - 1 \right\} \\ \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{12} = \epsilon_{21} &= 0 \dots\dots\dots (20 \cdot a \sim d) \end{aligned}$$

第 2 種の Piola-Kirchhoff 応力テンソルを σ^{ij} とおくと、内力による仮想仕事 IVW は次式のように表わすことができる¹²⁾。

$$\begin{aligned} IVW &= \int \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \\ dV &= d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \dots\dots\dots (21 \cdot a, b) \end{aligned}$$

ここで、合応力を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} N &= \int \sigma^3 dA \\ &= \int \sigma^{3i} \bar{a}_i dA \\ &= N^\alpha \bar{e}_\alpha + N^3 \bar{n} \dots\dots\dots (22 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

ここに、

$$N^1 = \int \{ \sigma^{31} + \sigma^{33} (\sqrt{G_0} \beta_1 - \xi^2 \bar{x}_3) \} dA$$

$$N^2 = \int \{ \sigma^{32} + \sigma^{33}(\sqrt{G_0}\beta_2 + \xi^1 \bar{x}_3) \} dA$$

$$N^3 = \int \sigma^{33}(\sqrt{G_0}\beta_0 - \xi^1 \bar{x}_2 + \xi^2 \bar{x}_1) dA$$

$$dA = d\xi^1 d\xi^2 \dots \dots \dots (23 \cdot a \sim d)$$

である。同様に、合モーメントを以下のように定義する。

$$\begin{aligned} M &= \int \xi^\alpha \bar{e}_\alpha \times \sigma^3 dA \\ &= \int \xi^\alpha \bar{e}_\alpha \times \sigma^{3i} \bar{a}_i dA \\ &= M^\alpha \bar{e}_\alpha + M^3 \bar{n} \dots \dots \dots (24 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

ここに、

$$M^1 = \int \sigma^{33}(\sqrt{G_0}\beta_0 - \xi^1 \bar{x}_2 + \xi^2 \bar{x}_1) \xi^2 dA$$

$$M^2 = - \int \sigma^{33}(\sqrt{G_0}\beta_0 - \xi^1 \bar{x}_2 + \xi^2 \bar{x}_1) \xi^1 dA$$

$$\begin{aligned} M^3 &= \int \{ \sigma^{32} + \sigma^{33}(\sqrt{G_0}\beta_2 + \xi^1 \bar{x}_3) \} \xi^1 \\ &\quad - \{ \sigma^{31} + \sigma^{33}(\sqrt{G_0}\beta_1 - \xi^2 \bar{x}_3) \} \xi^2 dA \dots \dots (25 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

である。式(22)、(24)を用いてIVWを書き直し、さらに部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} IVW &= - \int (N_3 \cdot \delta u + Q \cdot e_2 \delta \alpha^1 - Q \cdot e_1 \delta \alpha^2 + Q^3 \delta \alpha^3) d\xi^3 \\ &\quad + [N \cdot \delta u + m \cdot e_2 \delta \alpha^1 - m \cdot e_1 \delta \alpha^2 + M^3 \delta \alpha^3]_{\xi^3=0}^l \\ &\dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

と表わされ、ここに、 l は基準状態における棒軸の長さを示し、さらに、

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\alpha_0} Q^\alpha \bar{e}_\alpha + \frac{\lambda}{2} Q^3 \bar{n} \\ Q^1 &= M_3^1 - \bar{x}_3 M^2 + \bar{x}_2 M^3 - \sqrt{G_0} \beta_0 N^2 + \sqrt{G_0} \beta_2 N^3 \\ Q^2 &= M_3^2 + \bar{x}_3 M^1 - \bar{x}_1 M^3 + \sqrt{G_0} \beta_0 N^1 - \sqrt{G_0} \beta_1 N^3 \\ Q^3 &= M_3^3 + \bar{x}_1 M^2 - \bar{x}_2 M^1 - \sqrt{G_0} \beta_2 N^1 + \sqrt{G_0} \beta_1 N^2 \\ m &= \frac{1}{\alpha_0} M^\alpha \bar{e}_\alpha + \frac{\lambda}{2} M^3 \bar{n} \dots \dots \dots (27 \cdot a \sim e) \end{aligned}$$

である。

一方、外力による仮想仕事は、棒軸に沿って作用する分布外力を $\tilde{P} (= \tilde{P}^i e_i)$ 、部材端に作用する外力を $\underline{P} (= \underline{P}^i e_i)$ とおくと、

$$EVW = \int \tilde{P} \cdot \delta U dV + S_\sigma \left[\int \underline{P} \cdot \delta U dA \right]_{\xi^3=0}^{\xi^3=l} \dots \dots (28)$$

と表わされ、ここに、 S_σ は力学的境界を示す。式(14)を式(28)に代入して整理すると、EVWは、

$$\begin{aligned} EVW &= \int [\tilde{N}^i e_i \cdot \delta u + \tilde{M}_1 \delta \alpha^1 - \tilde{M}_2 \delta \alpha^2 + \tilde{M}_3 \delta \alpha^3] d\xi^3 \\ &\quad + s_\sigma [\underline{N}^i e_i \cdot \delta u + \underline{M}_1 \delta \alpha^1 - \underline{M}_2 \delta \alpha^2 + \underline{M}_3 \delta \alpha^3]_{\xi^3=0}^l \\ &\dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

と表わされ、ここに、

$$\tilde{N}^i = \int \tilde{P}^i dA$$

$$\tilde{M}_{1i} = \int \tilde{P}^i \xi^1 dA$$

$$\tilde{M}_{2i} = \int \tilde{P}^i \xi^2 dA$$

$$\tilde{M}_x = \tilde{M}_{13} \sin \alpha^3 + \tilde{M}_{23} \cos \alpha^3$$

$$\tilde{M}_y = -\tilde{M}_{13} \cos \alpha^3 + \tilde{M}_{23} \sin \alpha^3$$

$$\tilde{T}_{xx} = -\tilde{M}_{11} \cos \alpha^3 + \tilde{M}_{21} \sin \alpha^3$$

$$\tilde{T}_{xz} = -\tilde{M}_{11} \sin \alpha^3 - \tilde{M}_{21} \cos \alpha^3$$

$$\tilde{T}_{yy} = \tilde{M}_{12} \sin \alpha^3 + \tilde{M}_{22} \cos \alpha^3$$

$$\tilde{T}_{yz} = \tilde{M}_{12} \cos \alpha^3 - \tilde{M}_{22} \sin \alpha^3$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 &= \tilde{M}_y + \frac{\lambda}{2} \alpha^1 \left[2 + \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{(\alpha^1)^2}{\alpha_0} \right] \tilde{T}_{xx} - \left(\frac{\lambda}{2} \alpha^2 \right)^2 \cdot \frac{\alpha^1}{\alpha_0} \tilde{T}_{yy} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \alpha^2 \left[1 + \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{(\alpha^1)^2}{\alpha_0} \right] (\tilde{T}_{xz} - \tilde{T}_{yz}) \\ \tilde{M}_2 &= \tilde{M}_x + \frac{\lambda}{2} \alpha^2 \left[2 + \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{(\alpha^2)^2}{\alpha_0} \right] \tilde{T}_{yy} - \left(\frac{\lambda}{2} \alpha^1 \right)^2 \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha_0} \tilde{T}_{xx} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \alpha^1 \left[1 + \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{(\alpha^2)^2}{\alpha_0} \right] (\tilde{T}_{xz} - \tilde{T}_{yz}) \\ \tilde{M}_3 &= \left[1 - \frac{\lambda}{2} (\alpha^1)^2 \right] \tilde{T}_{xz} + \left[1 - \frac{\lambda}{2} (\alpha^2)^2 \right] \tilde{T}_{yz} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \alpha^1 \alpha^2 (\tilde{T}_{xx} + \tilde{T}_{yy}) + \alpha^1 \tilde{M}_x + \alpha^2 \tilde{M}_y \\ &\dots \dots \dots (30 \cdot a \sim 1) \end{aligned}$$

である。なお、部材端における外力項()は、式(30)における \tilde{P}^i を \underline{P}^i におきかえ、上付きの \sim を下付きの \sim にかえることにより得られる。

式(26)、(29)より、Timoshenkoはりの平衡方程式は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} N_3 + \tilde{N}^i e_i &= 0 & (\delta u) \\ Q \cdot e_2 + \tilde{M}_1 &= 0 & (\delta \alpha^1) \\ Q \cdot e_1 + \tilde{M}_2 &= 0 & (\delta \alpha^2) \\ Q^3 + \tilde{M}_3 &= 0 & (\delta \alpha^3) \dots \dots (31 \cdot a \sim d) \end{aligned}$$

力学的および幾何学的境界条件は、

$$\begin{aligned} N &= \underline{N}^i e_i & \text{or } u &= u^* \\ m \cdot e_2 &= \underline{M}_1 & \text{or } \alpha^1 &= \alpha^{1*} \\ m \cdot e_1 &= \underline{M}_2 & \text{or } \alpha^2 &= \alpha^{2*} \\ M^3 &= \underline{M}_3 & \text{or } \alpha^3 &= \alpha^{3*} \dots \dots (32 \cdot a \sim d) \end{aligned}$$

と求まり、ここに、()^{*}は部材端における規定量を示す。

4. 構成方程式

既往の研究においては、構成則を表わすのに、第2種のPiola-Kirchhoff応力テンソルと、それと共役な関係にあるGreenのひずみテンソルが多く用いられ、次のように表わされている。

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl} \epsilon_{kl} \dots \dots \dots (33)$$

ここに、 E^{ijkl} は弾性テンソルである。第2種のPiola-Kirchhoff応力テンソルは

$$\sigma^i = \sigma^{ij} \bar{a}_j \dots \dots \dots (34)$$

と表わされ¹²⁾、基底ベクトル \bar{a}_j が直交ベクトルでないことから、弾性テンソルは複雑な形となることが予想される。そこで、直交座標系を新たに導入することにより、その座標系に関する応力テンソルとひずみテンソルを用いて構成則を表わす研究もある⁵⁾。

本報告では、文献5)と同様の考え方により、次式で定義される応力テンソルを考える。

$$\sigma^3 = \tau^{3\alpha} \bar{e}_\alpha + \tau^{33} \bar{n} \dots \dots \dots (35)$$

新たに導入された応力テンソル τ^{ij} と σ^{ij} との関係式は、

$$\begin{aligned} \tau^{31} &= \sigma^{31} + \sigma^{33}(\sqrt{G_0} \beta_1 - \xi^2 \bar{x}_3) \\ \tau^{32} &= \sigma^{32} + \sigma^{33}(\sqrt{G_0} \beta_2 + \xi^1 \bar{x}_3) \\ \tau^{33} &= \sigma^{33}(\sqrt{G_0} \beta_0 - \xi^1 \bar{x}_2 + \xi^2 \bar{x}_1) \dots \dots \dots (36 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

となる。

次に、 τ^{ij} と共役なひずみテンソル γ_{ij} を考える。まず、
 $\bar{a}_i = \bar{K}_i^\alpha \bar{e}_\alpha + \bar{K}_i^3 \bar{n} \dots \dots \dots (37)$

とおくと、次式が成立する。

$$\sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \delta (\bar{K}_i^\alpha \bar{K}_j^\alpha) \dots \dots \dots (38)$$

ここで、 σ^{ij} の対称性および $\tau^{ij} = \sigma^{im} \bar{K}_m^j$ を用いると、以下の関係式が得られる。

$$\sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} = \tau^{mn} \delta \bar{K}_m^n \dots \dots \dots (39)$$

これより、 τ^{3i} と共役なひずみテンソル γ_{3i} を

$$\begin{aligned} \gamma_{3\alpha} &= \bar{a}_3 \cdot \bar{e}_\alpha - \bar{a}_3 \cdot \bar{e}_\alpha \\ \gamma_{33} &= \bar{a}_3 \cdot \bar{n} - \bar{a}_3 \cdot \bar{n} \dots \dots \dots (40 \cdot a, b) \end{aligned}$$

と定義することとする。

本論文では、棒理論で通常用いられている断面内無応力の仮定を用い、さらに仮定Ⅲ) および式(35)に用いられている基底ベクトル \bar{e}_α 、 \bar{n} は単位直交ベクトルであることから、式(18)、(40)より、以下の構成方程式を用いる。

$$\begin{aligned} \tau^{33} &= E(\sqrt{G_0} \beta_0 - 1 - \xi^1 \bar{x}_2 + \xi^2 \bar{x}_1) \\ \tau^{32} &= G(\sqrt{G_0} \beta_2 + \xi^1 \bar{x}_3) \\ \tau^{31} &= G(\sqrt{G_0} \beta_1 - \xi^2 \bar{x}_3) \\ \sigma^{\alpha\beta} &= 0 \dots \dots \dots (41 \cdot a \sim d) \end{aligned}$$

断面力とひずみの関係は、式(36)、(41)を式(23)、(25)に代入することにより以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} N^1 &= GAk\sqrt{G_0} \beta_1 - GI_2 \bar{x}_3 \\ N^2 &= GAk\sqrt{G_0} \beta_2 + GI_2 \bar{x}_3 \\ N^3 &= EA(\sqrt{G_0} \beta_0 - 1) - EI_1 \bar{x}_2 + EI_2 \bar{x}_1 \\ M^1 &= EI_2(\sqrt{G_0} \beta_0 - 1) - EI_{12} \bar{x}_2 + EI_{22} \bar{x}_1 \\ M^2 &= -EI_1(\sqrt{G_0} \beta_0 - 1) + EI_{11} \bar{x}_2 - EI_{12} \bar{x}_1 \\ M^3 &= GI_1 \sqrt{G_0} \beta_2 - GI_2 \sqrt{G_0} \beta_1 + GJ \bar{x}_3 \dots \dots \dots (42 \cdot a \sim f) \end{aligned}$$

ここに、

$$A = \int dA, I_1 = \int \xi^1 dA, I_2 = \int \xi^2 dA$$

$$I_{12} = \int \xi^1 \xi^2 dA, I_{11} = \int (\xi^1)^2 dA$$

$$I_{22} = \int (\xi^2)^2 dA, J = \int ((\xi^1)^2 + (\xi^2)^2) dA \dots \dots (43 \cdot a \sim g)$$

であり、文献13)に従い、せん断力の定義式に補正係数 k を導入した。なお、本報告では ξ^α 座標は主軸としていることから、 $I_1 = I_2 = I_{12} = 0$ となる。

5. 考 察

(1) 平衡方程式

本報告で得られた平衡方程式(31)は、変分法により得られたものであり、つり合い法により得られる平衡方程式とは形式上、力のつり合い方程式は一致するものの、モーメントのつり合い方程式は一致しない。

式(31・b~d)で表わされるモーメントの平衡方程式を成分表示すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_0} \cdot Q^\alpha (\bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_2) + \frac{\lambda}{2} Q^3 (\bar{n} \cdot \bar{e}_2) + \tilde{M}_1 &= 0 \\ \frac{1}{\alpha_0} \cdot Q^\alpha (\bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_1) + \frac{\lambda}{2} Q^3 (\bar{n} \cdot \bar{e}_1) + \tilde{M}_2 &= 0 \\ Q^3 + \tilde{M}_3 &= 0 \dots \dots \dots (44 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

と表わされる。式(44)を変形すると、

$$\begin{aligned} Q^1 - \tilde{M}_1 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1) + \tilde{M}_2 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2) - \frac{\lambda}{2} \tilde{M}_3 (\bar{e}_1 \cdot \bar{n}) &= 0 \\ Q^2 + \tilde{M}_1 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) - \tilde{M}_2 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) + \frac{\lambda}{2} \tilde{M}_3 (\bar{e}_2 \cdot \bar{n}) &= 0 \\ Q^3 + \tilde{M}_3 &= 0 \dots \dots \dots (45 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

と求まる。分布外力項が変形前の基底ベクトルで定義されていることを考慮し、式(45)の第2項以降の外力項を、それぞれ \bar{e}_α 、 \bar{n} に関する分布モーメントと考えれば、変分法により得られた平衡方程式とつり合い法により得られる平衡方程式とは一致することがわかる。

一方、分布外力の成分を変形後のベクトルに関して、
 $\tilde{P} = \hat{P}^\alpha \bar{e}_\alpha + \hat{P}^3 \bar{n} \dots \dots \dots (46)$

と定義すると、平衡方程式は、

$$\begin{aligned} N_3 + \hat{N}^\alpha \bar{e}_\alpha + \hat{N}^3 \bar{n} &= 0 \quad (\delta u) \\ \frac{1}{\alpha_0} (Q^2 - \hat{M}_{13}) (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2) + \frac{1}{\alpha_0} (Q^1 + \hat{M}_{23}) (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) \\ + \frac{\lambda}{2} (Q^3 + \hat{M}_{12} - \hat{M}_{21}) (\bar{n} \cdot \bar{e}_2) &= 0 \quad (\delta \alpha^1) \\ \frac{1}{\alpha_0} (Q^2 - \hat{M}_{13}) (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1) + \frac{1}{\alpha_0} (Q^1 + \hat{M}_{23}) (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) \\ + \frac{\lambda}{2} (Q^3 + \hat{M}_{12} - \hat{M}_{21}) (\bar{n} \cdot \bar{e}_1) &= 0 \quad (\delta \alpha^2) \\ Q^3 + \hat{M}_{12} - \hat{M}_{21} &= 0 \quad (\delta \alpha^3) \dots \dots \dots (47 \cdot a \sim d) \end{aligned}$$

と求まり、ここに、分布外力項 ($\hat{\quad}$) は式(30)において \tilde{P}^i の代わりに \hat{P}^i を代入し、上付き記号 \sim を上付き記号 $\hat{\quad}$ に代えたものである。ここで、モーメントに関する平衡方程式(47・b~d)を変形整理すると、

$$Q^1 + \hat{M}_{23} = 0$$

$$Q^2 - \hat{M}_{13} = 0$$

$$Q^3 + \hat{M}_{12} - \hat{M}_{21} = 0 \dots\dots\dots (48 \cdot a \sim c)$$

となり、これは分布モーメントとして、

$$\hat{M} = \hat{M}_{23} \bar{e}_1 - \hat{M}_{13} \bar{e}_2 + (\hat{M}_{12} - \hat{M}_{21}) \bar{n} \dots\dots\dots (49)$$

とおいた場合に、つり合い法より得られる平衡方程式と一致する。

式(44)で示されるように、変分法により得られるモーメントの平衡方程式は、独立パラメータの選択方法に依存して、必ずしもつり合い法により得られる平衡方程式と形式上一致しない場合もあるが、内容的には全く同一であることが確認された。

(2) 平面問題

棒材の変形が、 $\xi^1 - \xi^2$ 平面に限定される平面問題を考える。このとき、零でないパラメータは、 $u^1, u^2, \alpha^1, \beta^1$ である。断面力は、 N^1, N^3, M^2 を除きすべて零となる。変形後のベクトルは、既往の研究と比較するために、 $\alpha^1 = \sin \alpha$ とおくと、式(12)より

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \cos \alpha e_1 - \sin \alpha e_3 \\ \bar{n} &= \sin \alpha e_1 + \cos \alpha e_3 \dots\dots\dots (50 \cdot a, b) \end{aligned}$$

となり、ここに、 α は \bar{n} と e_3 とのなす角度を示す (Fig. 2 参照)。

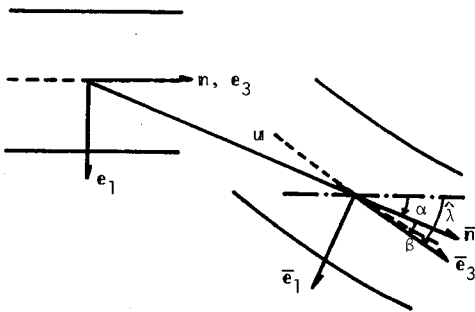


Fig. 2 Base Vectors before and after Deformation.

せん断変形に関するパラメータ β_1 を、 $\beta_1 = \sin \beta$ とおくと、式(13・a)より

$$\sin \beta = \sin(\hat{\lambda} - \alpha) \dots\dots\dots (51)$$

となり、ここに、 β は \bar{n} と \bar{e}_3 とのなす角度を示し、 $\hat{\lambda}$ は \bar{e}_3 と e_3 とのなす角度で、変位成分との間に次式の関係が成立する。

$$\sin \hat{\lambda} = u^1 \parallel_3, \cos \hat{\lambda} = u^2 \parallel_3 \dots\dots\dots (52 \cdot a, b)$$

平衡方程式は、式(31)より

$$\begin{aligned} (N^1 \bar{e}_1 + N^3 \bar{n})_3 + \tilde{N}^1 e_1 + \tilde{N}^3 e_3 &= 0 \\ M_3^2 + \sqrt{G_0} \cos \beta N^1 - \sqrt{G_0} \sin \beta N^3 + \tilde{M}_1 &= 0 \dots\dots\dots (53 \cdot a, b) \end{aligned}$$

となる。

以上の結果は、Timoshenko はりの平面問題について

得られている既往の研究結果と一致している。

(3) Bernoulli-Euler はり

本報告の結果を Bernoulli-Euler はりに適用する場合には、 $\alpha^e = u^e \parallel_3$ とおけばよく、そのとき、 β_α は零となる。独立パラメータは u^i, α^3 の4個となり、式(14)および式(16)で与えられている変位場および変形後の曲率とねじれ率は、文献(11)において初期曲率・ねじれ率を零とおいた場合の結果と一致する。

平衡方程式については、文献(11)では微小ひずみの仮定が用いられているため、ここでは有限ひずみの下における平衡方程式を導く。式(6)より、 α^e の変分をとると、 $\alpha^e = u^e \parallel_3$ より

$$\delta \alpha^e = \frac{1}{\sqrt{G_0}} (e_\beta - u^e \parallel_3 \bar{e}_\beta) \cdot \delta u_{3,\beta} \dots\dots\dots (54)$$

となることから、これを式(26)、(29)に代入すると、以下に示される平衡方程式を得る。

$$\begin{aligned} \left[N^3 \bar{e}_3 + \frac{Q^1}{\sqrt{G_0}} \bar{e}_2 - \frac{Q^2}{\sqrt{G_0}} \bar{e}_1 + \frac{\lambda}{2} \frac{Q^3}{\sqrt{G_0}} (u^1 \parallel_3 e_2 - u^2 \parallel_3 e_1) \right]_3 \\ + \tilde{N}^i e_i + \left[\frac{\tilde{M}_1}{\sqrt{G_0}} (u^1 \parallel_3 \bar{e}_3 - e_1) \right]_3 \\ + \left[\frac{\tilde{M}_2}{\sqrt{G_0}} (e_2 - u^2 \parallel_3 \bar{e}_3) \right]_3 = 0 \\ Q^3 + \tilde{M}_3 = 0 \dots\dots\dots (55 \cdot a, b) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} Q^1 &= M_{33}^1 - \bar{x}_3 M^2 + \bar{x}_2 M^3 \\ Q^2 &= M_{33}^2 + \bar{x}_3 M^1 - \bar{x}_1 M^3 \\ Q^3 &= M_{33}^3 + \bar{x}_1 M^2 - \bar{x}_2 M^1 \dots\dots\dots (56 \cdot a \sim c) \end{aligned}$$

である。

6. おわりに

本報告では、充実断面の Timoshenko はりを対象にして、有限回転を伴う幾何学的非線形理論を展開した。有限回転の取り扱い方には、さまざまな手法があるため、回転に関するパラメータの定義は、研究者により異なっている。その際に重要なことは、Timoshenko はりの基礎方程式を最も簡単に誘導し得るパラメータを選択し、その物理的意味を明確にすることである。その意味で、本論文で用いたパラメータ α^i は、文献(7)、(8)のそれとは異なっているものの幾何学的関係式はすべて陽な形で与えられており、Timoshenko はりの幾何学的非線形理論を展開する上で、有効なパラメータであることが理解されたものと思われる。

最後に有益な意見をいただいた査読者に感謝の意を表す。

参考文献

1) Reissner, E. : On one-dimensional finite-strain beam

- theory : the plane problem, *J. Appl. Math. Phys.*, Vol. 23, pp. 795~804, 1972.
- 2) Sinclair, G.B. : The non-linear bending of a cantilever beam with shear and longitudinal deformations, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 14, pp. 111~122, 1979.
 - 3) Sheinman, I. : Large deflection of curved beam with shear deformation, *Proc. ASCE*, Vol. 108, No. EM4, pp. 636~647, 1982.
 - 4) Iwakuma, T. and Kuranishi, S. : How much contribution does the shear deformation have in a beam theory ?, *Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol. 1, No. 1, pp. 103~113, 1984.
 - 5) Chaisomphob, T., Nishino, F., Hasegawa, A. and Abdel-Shafy, A.G.A. : An elastic finite displacement analysis of plane beams with and without shear deformation, *Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol. 3, No. 1, pp. 157~165, 1986.
 - 6) Ziegler, H. : Arguments for and against Engesser's buckling formulas, *Ing.-Archiv*, Vol. 52, pp. 105~113, 1982.
 - 7) Reissner, E. : On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory, *Studies Appl. Math.*, Vol. 52, pp. 87~95, 1973.
 - 8) Reissner, E. : On finite deformations of space-curved beams, *J. Appl. Math. Phys.*, Vol. 32, pp. 734~744, 1981.
 - 9) Simo, J.C. : A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part 1, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 49, pp. 55~70, 1985.
 - 10) Antman, S.S. : The Theory of Rod, *Handbuch der Physik*, Vol. VIa/2, Springer, Berlin, 1972.
 - 11) Iura, M. and Hirashima, M. : Geometrically nonlinear theory of naturally curved and twisted rods with finite rotations, *Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol. 2, No. 2, pp. 353~363, 1985.
 - 12) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 3rd edition, 1982.
 - 13) Cowper, G.R. : The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *J. Appl. Mech.*, Vol. 33, pp. 335~340, 1966.

(1986. 8. 25・受付)