

## Voigt型粘弾性体無限帯板の過渡応力波伝播

## TRANSIENT STRESS WAVES IN AN INFINITE VOIGT-VISCOELASTIC SLAB

石川清志\*

By Kiyoshi ISHIKAWA

The transient stress waves in an infinite viscoelastic slab subjected to plane strain are investigated. The solution based upon displacements which satisfy directly the equations of motion for a Voigt solid and the initial and boundary conditions is given by the method using Stokes theorem for the case of arbitrary shock loads. The shock loads are assumed to be applied on the face or in the interior of the slab. The displacements are represented in terms of Fourier transforms and eigenfunctions. The eigenfunctions are derived from the equations of motion for an elastic solid and satisfy the orthogonality relation induced by the corresponding boundary conditions.

*Keywords*: transient wave, viscoelastic wave, wave propagation, stress wave

## 1. ま え が き

弾性体の動的問題には変位ポテンシャルを導入したいくつかの変位関数解析がある。たとえば、変位を1個のスカラーポテンシャルと3個のベクトルポテンシャル(Helmholtzの定理)で表わしたものの<sup>1)</sup>、あるいは動的問題における Galerkin 関数, Neuber-Papkovich 関数で表示したものが<sup>2), 3), 11)</sup>。これらはいずれも連立方程式で表わされた Navier の式(変位で表わした運動方程式)を直接解くことなく、変位ポテンシャルを導入することによって連立性を排除し、弾性問題が波動方程式を解く問題に置き換えられるのが特徴で、主として二、三次元弾性問題に限定して適用されるものである。

また、偏微分方程式からの常微分化には積分変換が多く用いられ、特に時間に対しては Fourier 変換および Laplace 変換がその主要を占めている<sup>4), 5), 14)</sup>。しかしながら、これらの積分変換を導入した解析は、像の解が比較的簡潔に得られるのに対して、原の解に戻す逆変換の積分が直接積分することもあるいは数値積分することもあり、きわめて困難である<sup>4)</sup>。積分変数を複素変数で置き換え、陽な解が得られるような路線積分法を用いている。

本書の目的は連立方程式で表わされた二次元粘弾性体の運動方程式を境界条件および初期条件で直接的に解く解析法の提案である。これは Voigt 体とした無限帯板に対して、変位ポテンシャルを用いずに、Stokes が熱伝導解析に用いた理論<sup>6), 7)</sup>を二次元粘弾性体動的問題に応用したもので、変位は Fourier 変換(位置に対して)と変数分離の固有関数を導入して表わし、固有関数の直交性<sup>8)</sup>を利用して Voigt 体の運動方程式を直接展開して解く一般性のある解析法である。外力は帯板の表面あるいは内部に作用するものとし、時間に任意な衝撃荷重とする。ただし、内部荷重は線荷重を基本にして、荷重の作用線上を仮想境界とし、帯板を同じ力学定数の二層に分割して定義し、この仮想境界の連続条件<sup>9)</sup>を満足するように誘導して表わす。

## 2. 解析理論

Voigt<sup>10)</sup>の定義に従えば、粘弾性体の運動方程式は Lamé 定数( $\lambda, \mu$ )で表わされた Navier の式に対して、 $\lambda, \mu$ をそれぞれ $(\lambda + \lambda' \partial/\partial t)$ ,  $(\mu + \mu' \partial/\partial t)$ の演算子で置き換えたものである<sup>4)</sup>。

$$\left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 u + \left[ \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \right]$$

\* 正会員 信州大学技官 工学部土木工学科  
(〒380 長野市若里 500)

$$\text{grad div } \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\mathbf{u}$  は直交座標  $(x, y, z)$  に対する変位ベクトル  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ 、 $\nabla^2$  は Laplace 演算子、 $(\lambda, \mu)$  は粘性係数、 $\rho$  は質量密度、 $t$  は時間である。

粘弾性論において、 $(\lambda, \mu)$  と  $(\lambda', \mu')$  の間にかなる関係が存在するかはこれらの性質を研究するうえでの1つの課題であるが、理論解析で採用されている関係としては次式

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda'}{\mu'} \dots\dots\dots (2)$$

を用いている場合が多いとされている<sup>7)</sup>。

ここでは問題を簡単化するために  $w=0$  とした二次元ひずみ問題とし、物体は幅  $2h$  の無限帯板とする。座標原点は帯板の中央にとり、式(2)の関係および次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{h} \quad (|\xi| < \infty), & \eta &= \frac{y}{h} \quad (|\eta| < 1) \\ \tau &= \frac{c_2}{h} t \quad (0 < \tau), & b &= \frac{\lambda}{\mu}, & \varepsilon &= \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{c_2}{h} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $c_2$  は横波伝播速度 ( $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ ) である。そして、内部荷重は、Fig. 1 に示すような  $\eta = \bar{\eta}$  に分布する線荷重と仮定し、この線荷重はせん断荷重  $p_\xi$  と直荷重  $p_\eta$  から構成されるものとする。線荷重が作用することにより、帯板は  $\eta = \bar{\eta}$  を仮想境界とした同じ力学定数からなる2つの層に便宜分割して表わすことにする。以上のことから、各層に対する運動方程式は式(1)から次式に書き換えられる。

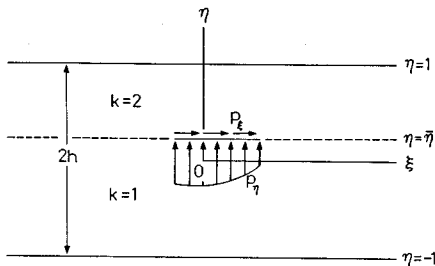


Fig. 1 A Set of Internal Line Loads.

$$\left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left[ \bar{\nabla}^2 \bar{\mathbf{u}}_k + (1+b) \text{grad div } \bar{\mathbf{u}}_k \right] = \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}_k}{\partial \tau^2} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{u}}_k$  は直交座標  $(\xi, \eta)$  に対する変位ベクトル  $\bar{\mathbf{u}}_k = (u_k, v_k)$ 、 $\bar{\nabla}^2 = \partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2$  である。また、添字  $k$  は層番号で次の領域を表わす。

$$\left. \begin{aligned} k=1: & -1 < \eta < \bar{\eta} \\ k=2: & \bar{\eta} < \eta < 1 \end{aligned} \right\}, \quad |\xi| < \infty \dots\dots\dots (5)$$

応力と変位の関係は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\eta k} &= \frac{h}{\mu} \sigma_{xyk} = \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left( \frac{\partial u_k}{\partial \eta} + \frac{\partial v_k}{\partial \xi} \right) \\ \sigma_{\eta k} &= \frac{h}{\mu} \sigma_{yyk} = \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left[ (2+b) \frac{\partial v_k}{\partial \eta} + b \frac{\partial u_k}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\sigma_{\xi\eta}$ 、 $\sigma_\eta$  はそれぞれせん断応力、直応力である。なお、これ以外の応力は境界条件および仮想境界の連続条件に直接現われないため省略した。

帯板の境界条件は

$$\xi \rightarrow \pm \infty : u_k, v_k, \frac{\partial u_k}{\partial \xi}, \text{ etc.}, = 0 \dots\dots\dots (7)$$

とし、 $\eta = \pm 1$  では種々の条件が与えられるが、ここでは次式を例にとる。

$$\left. \begin{aligned} \eta=1: & \left[ \begin{array}{c} \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_\eta \end{array} \right]_{k=2} = - \left[ \begin{array}{c} Q_\xi(\xi, \tau) \\ Q_\eta(\xi, \tau) \end{array} \right] \\ \eta=-1: & \left[ \begin{array}{c} \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_\eta \end{array} \right]_{k=1} = - \left[ \begin{array}{c} -Q_\xi(\xi, \tau) \\ Q_\eta(\xi, \tau) \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

これは  $\eta=0$  で対称な荷重状態で、 $Q_\xi$ 、 $Q_\eta$  はそれぞれ表面せん断荷重、圧縮直荷重である。そして、仮想境界  $\eta = \bar{\eta}$  における連続条件<sup>9)</sup>は次式で表わされる。

$$\eta = \bar{\eta} : \left[ \begin{array}{c} u \\ v \\ \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_\eta \end{array} \right]_{k=2} = \left[ \begin{array}{c} u \\ v \\ \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_\eta \end{array} \right]_{k=1} - \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ p_\xi(\xi, \tau) \\ p_\eta(\xi, \tau) \end{array} \right] \dots\dots\dots (9)$$

さらに、初期条件は

$$\left. \begin{aligned} \tau=0: & \left[ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right]_k = \left[ \begin{array}{c} U(\xi, \eta) \\ V(\xi, \eta) \end{array} \right]_k \\ & \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right]_k = \left[ \begin{array}{c} \dot{U}(\xi, \eta) \\ \dot{V}(\xi, \eta) \end{array} \right]_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $U_k$ 、 $V_k$  は初期変位、 $\dot{U}_k$ 、 $\dot{V}_k$  は初期速度である。

関数  $S(\xi)$  の Fourier 変換およびその逆変換は次式で定義する。

$$\tilde{S}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) e^{-i\gamma\xi} d\xi, \quad S(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\gamma) e^{i\gamma\xi} d\gamma \dots\dots\dots (11)$$

式(4)を Fourier 変換し、式(7)で解けば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \eta^2} - \gamma^2 (2+b) \bar{u}_k \right. \\ \left. + i\gamma(1+b) \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \eta} \right] &= \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial \tau^2} \\ \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left[ (2+b) \frac{\partial^2 \bar{v}_k}{\partial \eta^2} - \gamma^2 \bar{v}_k \right. \\ \left. + i\gamma(1+b) \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \eta} \right] &= \frac{\partial^2 \bar{v}_k}{\partial \tau^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

同様に、式(8)、(9)、(10)は次式に書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} \eta=1 : & \left[ \begin{array}{c} \bar{\sigma}_{\varepsilon\eta} \\ \bar{\sigma}_\eta \end{array} \right]_{k=2} = - \left[ \begin{array}{c} \bar{Q}_\varepsilon(\gamma, \tau) \\ \bar{Q}_\eta(\gamma, \tau) \end{array} \right] \\ \eta=-1 : & \left[ \begin{array}{c} \bar{\sigma}_{\varepsilon\eta} \\ \bar{\sigma}_\eta \end{array} \right]_{k=1} = - \left[ \begin{array}{c} -\bar{Q}_\varepsilon(\gamma, \tau) \\ \bar{Q}_\eta(\gamma, \tau) \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

$$\eta=\bar{\eta} : \left[ \begin{array}{c} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\sigma}_{\varepsilon\eta} \\ \bar{\sigma}_\eta \end{array} \right]_{k=2} = \left[ \begin{array}{c} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\sigma}_{\varepsilon\eta} \\ \bar{\sigma}_\eta \end{array} \right]_{k=1} - \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \bar{p}_\varepsilon(\gamma, \tau) \\ \bar{p}_\eta(\gamma, \tau) \end{array} \right] \dots(14)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau=0 : & \left[ \begin{array}{c} \bar{u} \\ \bar{v} \end{array} \right]_k = \left[ \begin{array}{c} \bar{U}(\gamma, \eta) \\ \bar{V}(\gamma, \eta) \end{array} \right]_k, \\ & \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \begin{array}{c} \bar{u} \\ \bar{v} \end{array} \right]_k = \left[ \begin{array}{c} \bar{\dot{U}}(\gamma, \eta) \\ \bar{\dot{V}}(\gamma, \eta) \end{array} \right]_k \end{aligned} \right\} \dots\dots(15)$$

ただし、 $\bar{\sigma}_{\varepsilon\eta}$ ,  $\bar{\sigma}_\eta$  は式 (6) から次式のものである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varepsilon\eta k} &= \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left( \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial \eta} + i\gamma \bar{v}_k \right) \\ \bar{\sigma}_{\eta k} &= \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left[ (2+b) \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \eta} + i\gamma b \bar{u}_k \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(16)$$

式 (12) の連立方程式を解くにあたり、 $\bar{u}_k$ ,  $\bar{v}_k$  は次の級数で表わされるものと仮定する。

$$\left[ \begin{array}{c} \bar{u} \\ \bar{v} \end{array} \right]_k = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left[ \begin{array}{c} \phi_m(\eta) \\ \psi_m(\eta) \end{array} \right]_k \dots\dots(17)$$

ただし、関数  $\phi_m$ ,  $\psi_m$  は次の微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \phi_{mk}}{d\eta^2} + [\omega_m^2 - (2+b)\gamma^2] \phi_{mk} + i\gamma(1+b) \frac{d\phi_{mk}}{d\eta} &= 0 \\ (2+b) \frac{d^2 \psi_{mk}}{d\eta^2} + (\omega_m^2 - \gamma^2) \psi_{mk} + i\gamma(1+b) \frac{d\psi_{mk}}{d\eta} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(18)$$

および、次の境界条件および連続条件

$$\left. \begin{aligned} \eta=1 : & \left[ \begin{array}{c} \bar{\Phi}_m \\ \bar{\Psi}_m \end{array} \right]_{k=2} = 0 \\ \eta=-1 : & \left[ \begin{array}{c} \bar{\Phi}_m \\ \bar{\Psi}_m \end{array} \right]_{k=1} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(19)$$

$$\eta=\bar{\eta} : \left[ \begin{array}{c} \phi_m \\ \psi_m \\ \bar{\Phi}_m \\ \bar{\Psi}_m \end{array} \right]_{k=2} = \left[ \begin{array}{c} \phi_m \\ \psi_m \\ \bar{\Phi}_m \\ \bar{\Psi}_m \end{array} \right]_{k=1} \dots\dots(20)$$

を満足するものである。ここで、 $\bar{\Phi}_{mk}$ ,  $\bar{\Psi}_{mk}$  は次式のものである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}_{mk} &= \frac{d\phi_{mk}}{d\eta} + i\gamma\psi_{mk} \\ \bar{\Psi}_{mk} &= (2+b) \frac{d\psi_{mk}}{d\eta} + i\gamma b\phi_{mk} \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

式 (12) には時間に対する 1 階微分演算子が存在し、時間関数を  $e^{i\omega_m\tau}$  と仮定した変数分離では一般に  $\omega_m$  が複素数<sup>4)</sup> となり、複素根を求める解析となり、数値計算上の処理が煩雑となる。これを避けるために、式 (12) の

位置 ( $\eta$ ) に対する微分演算子が Navier の式と同型であることに注目し、式 (18) の解を正規関数にとれば式 (12) を解くことが可能である。すなわち、式 (18) は Navier の式 ( $\varepsilon=0$  とした式 (12) の方程式) に  $\bar{u}_k = \phi_{mk} e^{i\omega_m\tau}$ ,  $\bar{v}_k = \psi_{mk} e^{i\omega_m\tau}$  を適用したものに相当し、 $\omega_m$  は任意定数で弾性体の円振動数とみることでもできる。式 (21) の  $\bar{\Phi}_m$ ,  $\bar{\Psi}_m$  は式 (17) を式 (16) に代入して得られる位置の関数で、弾性体のせん断応力、直応力を表わすもので、Voigt 体のせん断応力および直応力は次式で表わされることになる。

$$\left[ \begin{array}{c} \bar{\sigma}_{\varepsilon\eta} \\ \bar{\sigma}_\eta \end{array} \right]_k = \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \varepsilon \frac{d}{d\tau}\right) A_m \left[ \begin{array}{c} \bar{\Phi}_m(\eta) \\ \bar{\Psi}_m(\eta) \end{array} \right]_k \dots\dots(22)$$

したがって式 (19) は応力自由の境界条件である。

式 (18) において、次の積分を行うと、式 (19) および式 (20) から

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^{\bar{\eta}} (\phi_{m1}\phi_{n1} - \psi_{m1}\psi_{n1}) d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 (\phi_{m2}\phi_{n2} - \psi_{m2}\psi_{n2}) d\eta &= 0, \\ \omega_m \neq \omega_n & \dots\dots(23) \end{aligned} \right\}$$

が得られる。この直交条件は、Dolph<sup>5)</sup> が Timoshenko

はりの横振動解析に用いた理論を応用したもので、式 (19) 以外の境界条件、たとえば第 2, 3 種の境界値問題に対しても成立する。式 (23) を利用すれば、式 (17) の  $A_m$  は次式で表わすことができる。

$$A_m = \frac{1}{f_m} \left\{ \int_{-1}^{\bar{\eta}} (\bar{u}_1\phi_{m1} - \bar{v}_1\psi_{m1}) d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 (\bar{u}_2\phi_{m2} - \bar{v}_2\psi_{m2}) d\eta \right\} \dots\dots(24)$$

ここで、

$$f_m = \int_{-1}^{\bar{\eta}} (\phi_{m1}^2 - \psi_{m1}^2) d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 (\phi_{m2}^2 - \psi_{m2}^2) d\eta \dots\dots(25)$$

式 (12) の連立方程式において、次の組合せの級数展開を考える。

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left[ \begin{array}{c} (2+b)\bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{array} \right] &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m \left[ \begin{array}{c} \phi_m \\ \psi_m \end{array} \right]_k \\ \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[ \begin{array}{c} \bar{u}_k \\ (2+b)\bar{v}_k \end{array} \right] &= \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left[ \begin{array}{c} \phi_m \\ \psi_m \end{array} \right]_k \\ i\gamma(1+b) \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \begin{array}{c} \bar{v}_k \\ \bar{u}_k \end{array} \right] &= \sum_{m=1}^{\infty} D_m \left[ \begin{array}{c} \phi_m \\ \psi_m \end{array} \right]_k \end{aligned} \right\} \dots\dots(26)$$

そして、次の項は単に

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[ \begin{array}{c} \bar{u}_k \\ \bar{v}_k \end{array} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^2 A_m}{d\tau^2} \left[ \begin{array}{c} \phi_m \\ \psi_m \end{array} \right]_k \dots\dots(27)$$

となる。すると、式 (12) は次式となる。

$$\frac{d^2 A_m}{d\tau^2} + B_m - C_m - D_m = 0 \dots\dots(28)$$

ただし、 $B_m$ ,  $C_m$ ,  $D_m$  は式 (23) を利用すれば次式に得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 B_m &= \frac{\gamma^2}{f_m} \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left\{ \int_{-1}^{\bar{\eta}} [(2+b)\bar{u}_1\phi_{m1} - \bar{v}_1\phi_{m1}]d\eta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\bar{\eta}}^1 [(2+b)\bar{u}_2\phi_{m2} - \bar{v}_2\phi_{m2}]d\eta \right\} \\
 C_m &= \frac{1}{f_m} \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left\{ \int_{-1}^{\bar{\eta}} \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial \eta^2} \phi_{m1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (2+b) \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial \eta^2} \phi_{m1} \right] d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial \eta^2} \phi_{m2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (2+b) \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial \eta^2} \phi_{m2} \right] d\eta \right\} \\
 D_m &= \frac{i\gamma(1+b)}{f_m} \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left\{ \int_{-1}^{\bar{\eta}} \left[ \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \eta} \phi_{m1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \eta} \phi_{m1} \right] d\eta + \int_{\bar{\eta}}^1 \left[ \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \eta} \phi_{m2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \eta} \phi_{m2} \right] d\eta \right\}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

これら右辺の積分を行い、式(18)、(24)の関係を用いて整理すれば、式(28)は次式に書き換えられる。

$$\frac{d^2 A_m}{d\tau^2} + \varepsilon \omega_m^2 \frac{dA_m}{d\tau} + \omega_m^2 A_m = G_m(\tau) \dots\dots\dots(30)$$

ここで、 $G_m(\tau)$ は

$$\begin{aligned}
 G_m(\tau) &= \frac{1}{f_m} \left\{ \left[ \bar{\sigma}_{\varepsilon n1} \phi_{m1} - \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \bar{u}_1 \Phi_{m1} - \bar{\sigma}_{\tau n1} \phi_{m1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \bar{v}_1 \Psi_{m1} \right]_{-1}^{\bar{\eta}} + \left[ \bar{\sigma}_{\varepsilon n2} \phi_{m2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \bar{u}_2 \Phi_{m2} - \bar{\sigma}_{\tau n2} \phi_{m2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \bar{v}_2 \Psi_{m2} \right]_{\bar{\eta}}^1 \right\} \dots\dots\dots(31)
 \end{aligned}$$

さらに、この右辺は式(13)、(14)および式(19)、(20)から次式に書き換えられる。

$$\begin{aligned}
 G_m(\tau) &= \frac{1}{f_m} \left\{ \bar{p}_d(\gamma, \tau) \phi_{m1}(\bar{\eta}) - \bar{p}_n(\gamma, \tau) \phi_{m1}(\bar{\eta}) \right. \\
 &\quad \left. - \bar{Q}_d(\gamma, \tau) [\phi_{m2}(1) + \phi_{m1}(-1)] \right. \\
 &\quad \left. + \bar{Q}_n(\gamma, \tau) [\phi_{m2}(1) - \phi_{m1}(-1)] \right\} \dots\dots\dots(32)
 \end{aligned}$$

ただし、この結果は、仮想境界( $\eta = \bar{\eta}$ )で変位が連続  $\bar{u}_2 = \bar{u}_1$ 、 $\bar{v}_2 = \bar{v}_1$  であるから、これらの変位速度も連続  $\partial \bar{u}_2 / \partial \tau = \partial \bar{u}_1 / \partial \tau$ 、 $\partial \bar{v}_2 / \partial \tau = \partial \bar{v}_1 / \partial \tau$  であるとした。式(30)の方程式に対する初期条件は式(15)から次式となる。

$$\tau = 0 : A_m = E_m, \quad \frac{dA_m}{d\tau} = F_m \dots\dots\dots(33)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned}
 E_m &= \frac{1}{f_m} \left\{ \int_{-1}^{\bar{\eta}} [\bar{U}_1(\gamma, \eta) \phi_{m1} - \bar{V}_1(\gamma, \eta) \phi_{m1}] d\eta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\bar{\eta}}^1 [\bar{U}_2(\gamma, \eta) \phi_{m2} - \bar{V}_2(\gamma, \eta) \phi_{m2}] d\eta \right\} \\
 F_m &= \frac{1}{f_m} \left\{ \int_{-1}^{\bar{\eta}} [\bar{U}_1(\gamma, \eta) \phi_{m1} - \bar{V}_1(\gamma, \eta) \phi_{m1}] d\eta \right.
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. + \int_{\bar{\eta}}^1 [\bar{U}_2(\gamma, \eta) \phi_{m2} - \bar{V}_2(\gamma, \eta) \phi_{m2}] d\eta \right\} \dots\dots\dots(34)$$

式(30)を式(33)で解けば  $A_m$  は決定される<sup>7)</sup>。

式(18)、(19)および(20)を満足する  $\phi_{mk}$ 、 $\psi_{mk}$  は次のように誘導される。式(18)の連立方程式において、 $\psi_{mk}$  を消去して  $\phi_{mk}$  のみの方程式は

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + \left( \frac{\omega_m^2}{2+b} - \gamma^2 \right) \right] \left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + (\omega_m^2 - \gamma^2) \right] \phi_{mk} = 0 \dots\dots\dots(35)$$

逆に、 $\phi_{mk}$  を消去して  $\psi_{mk}$  のみで表わせば次式

$$\left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + \left( \frac{\omega_m^2}{2+b} - \gamma^2 \right) \right] \left[ \frac{d^2}{d\eta^2} + (\omega_m^2 - \gamma^2) \right] \psi_{mk} = 0 \dots\dots\dots(36)$$

が得られ、微分演算子は式(35)と同型になる。ここで、 $\omega_m^2 = \zeta_m^2 / c_1^2$  とおけば  $\omega_m^2 / (2+b) = \zeta_m^2 / c_1^2$  と表わされ、式(35)、(36)は  $\zeta_m$  を円振動数とした動的問題における Galerkin 関数の波動方程式<sup>11)</sup>とみることができる。ただし、 $c_1$  は縦波伝播速度 ( $c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ ) である。式(35)、(36)の解は次のケースによって関数形が異なる。

$$\left. \begin{aligned}
 (i) \quad & \sqrt{2+b} < \frac{\omega_m}{\gamma} & (iv) \quad & 1 = \frac{\omega_m}{\gamma} \\
 (ii) \quad & \sqrt{2+b} = \frac{\omega_m}{\gamma} & (v) \quad & 1 > \frac{\omega_m}{\gamma} \\
 (iii) \quad & 1 < \frac{\omega_m}{\gamma} < \sqrt{2+b}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

ここでは(i)の場合の解を誘導する。他の場合も同様に誘導されるので省略する。式(35)、(36)の一般解は次式で表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_{mk} &= i[\cos \alpha_m \eta \sin \alpha_m \eta \cos \beta_m \eta \sin \beta_m \eta] M_{mk} \\
 \psi_{mk} &= [\sin \alpha_m \eta \cos \alpha_m \eta \sin \beta_m \eta \cos \beta_m \eta] M'_{mk}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

ここで、

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\omega_m^2}{2+b} - \gamma^2}, \quad \beta_m = \sqrt{\omega_m^2 - \gamma^2} \dots\dots\dots(39)$$

$M_{mk}$ 、 $M'_{mk}$  はそれぞれ  $4 \times 1$  の積分定数である。 $M_{mk}$  と  $M'_{mk}$  の関係は式(38)を式(18)の第1式に代入すれば得られる。すなわち

$$M'_{mk} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_m}{\gamma} \\ \frac{\alpha_m}{\gamma} \\ \frac{\gamma}{\beta_m} \\ -\frac{\gamma}{\beta_m} \end{bmatrix} M_{mk} \dots\dots\dots(40)$$

また、この関係は式(38)を式(18)の第2式に代入しても同じ結果が得られる。式(40)は式(35)、(36)の解  $\phi_{mk}$ 、 $\psi_{mk}$  がそれぞれ独立したものでなく、ある種の

関係をもつことを意味しており、このことは Galerkin 関数の省略性<sup>11), 12)</sup>と同じ内容を表わしている。式 (40) を式 (38) の第 2 式に代入すれば、式 (18) の一般解は次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} \phi_m \\ \psi_m \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \cos \alpha_m \eta & \gamma \sin \alpha_m \eta \\ -\alpha_m \sin \alpha_m \eta & \alpha_m \cos \alpha_m \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_m \cos \beta_m \eta & -\beta_m \sin \beta_m \eta \\ \gamma \sin \beta_m \eta & \gamma \cos \beta_m \eta \end{bmatrix} M_{mk} \dots (41)$$

式 (41) を式 (21) に代入すれば  $\Phi_{mk}$ ,  $\Psi_{mk}$  は定義され、式 (20) の連続条件から

$$M_{m2} = M_{m1} \dots (42)$$

となるのが明らかである。 $M_{m2}$  あるいは  $M_{m1}$  は式 (19) の境界条件によって決定される。式 (41), (42) から明らかのように、 $\phi_m$ ,  $\psi_m$  は  $k$  に依存して区別する必要がなく、全体 ( $|\eta| < 1$ ) に汎通する関数として扱ってよいことになる。すなわち

$$\phi_m, \psi_m (|\eta| < 1) = \begin{cases} \phi_{m1}, \psi_{m1} & (-1 < \eta < \bar{\eta}) \\ \phi_{m2}, \psi_{m2} & (\bar{\eta} < \eta < 1) \end{cases} \dots (43)$$

結局、式 (18), (19) および (20) を満足する  $\phi_m$ ,  $\psi_m$  は次の 2 つのセットに分けて表わすことができる。

set I (longitudinal mode) :

$$\begin{bmatrix} \phi_m \\ \psi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma \cos \alpha_m \eta & \beta_m \cos \beta_m \eta \\ \alpha_m \sin \alpha_m \eta & \gamma \sin \beta_m \eta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\beta_m^2 - \gamma^2) \sin \beta_m \\ 2 \gamma \alpha_m \sin \alpha_m \end{bmatrix} \dots (44)$$

ただし、 $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  を構成する  $\omega_m$  は次式の根をとる。

$$4 \gamma^2 \alpha_m \beta_m \tan \alpha_m + (\beta_m^2 - \gamma^2)^2 \tan \beta_m = 0 \dots (45)$$

set II (transverse mode) :

$$\begin{bmatrix} \phi_m \\ \psi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \sin \alpha_m \eta & -\beta_m \sin \beta_m \eta \\ \alpha_m \cos \alpha_m \eta & \gamma \cos \beta_m \eta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (\beta_m^2 - \gamma^2) \cos \beta_m \\ 2 \gamma \alpha_m \cos \alpha_m \end{bmatrix} \dots (46)$$

ただし、 $\omega_m$  は次式の根をとる。

$$4 \gamma^2 \alpha_m \beta_m \cot \alpha_m + (\beta_m^2 - \gamma^2)^2 \cot \beta_m = 0 \dots (47)$$

さらに、式 (42) の結果から、式 (32) の  $G_m$  および式 (34) の  $E_m$ ,  $F_m$  は次式に書き換えられる。

$$G_m(\tau) = \frac{1}{f_m} \{ \tilde{P}_\epsilon(\gamma, \tau) \phi_m(\bar{\eta}) - \tilde{P}_\eta(\gamma, \tau) \psi_m(\bar{\eta}) - \tilde{Q}_\epsilon(\gamma, \tau) [\phi_m(1) + \phi_m(-1)] + \tilde{Q}_\eta(\gamma, \tau) [\psi_m(1) - \psi_m(-1)] \} \dots (48)$$

$$\left. \begin{aligned} E_m &= \frac{1}{f_m} \int_{-1}^1 [\tilde{U}(\gamma, \eta) \phi_m - \tilde{V}(\gamma, \eta) \psi_m] d\eta \\ F_m &= \frac{1}{f_m} \int_{-1}^1 [\tilde{\dot{U}}(\gamma, \eta) \phi_m - \tilde{\dot{V}}(\gamma, \eta) \psi_m] d\eta \end{aligned} \right\} \dots (49)$$

ただし、 $f_m$  は式 (25) から

$$f_m = \int_{-1}^1 (\phi_m^2 - \psi_m^2) d\eta \dots (50)$$

となる。なお、 $U$ ,  $V$  および  $\dot{U}$ ,  $\dot{V}$  は帯板全体 ( $|\xi| < \infty$ ,  $|\eta| < 1$ ) に対する初期変位および初期速度である。

以上により、Fourier 変換された変位 ( $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ) は式 (17) から次式で表わされることになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \begin{bmatrix} \phi_m(\eta) \\ \psi_m(\eta) \end{bmatrix}, \quad (|\eta| < 1) \dots (51)$$

これを Fourier 逆変換すれば変位は得られる。式 (44) ~ (47) の結果は変位ポテンシャル関数を導入した解析結果<sup>15)</sup>と一致するものである。

### 3. 数値計算例

ここでは次の 2 種類の対称集中荷重 ( $\xi = \eta = 0$  について) について数値計算を行う。すなわち、式 (8) および (9) について次式

#### (1) 表面圧縮集中荷重 (loading I)

$$\left. \begin{aligned} Q_\xi &= p_\xi = p_\eta = 0 \\ Q_\eta(\xi, \tau) &= \begin{cases} P(\tau) & (\xi = 0) \\ 0 & (\xi \neq 0) \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots (52)$$

#### (2) 内部せん断集中荷重 (loading II)

$$\left. \begin{aligned} Q_\xi &= Q_\eta = p_\eta = 0 \\ p_\xi(\xi, \tau) &= \begin{cases} P(\tau) & (\xi = 0) \\ 0 & (\xi \neq 0) \end{cases}, \quad \bar{\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (53)$$

とする。そして、 $P(\tau)$  は次式の矩形 pulse<sup>13)</sup> 型の衝撃荷重とする。

$$P(\tau) = \begin{cases} P_0 & (0 < \tau < \bar{\tau}) \\ 0 & (\bar{\tau} < \tau) \end{cases} \dots (54)$$

ここで、 $\bar{\tau}$  は荷重  $P_0$  の荷重時間を表わす。また、初期条件は静止 ( $\tau = 0 : U = V = \dot{U} = \dot{V} = 0$ ) を与える。対称荷重であるから、set I の  $\phi_m$ ,  $\psi_m$  を取り扱えばよい。

式 (11) の Fourier 逆変換は積分領域 ( $|\gamma| < \infty$ ) を

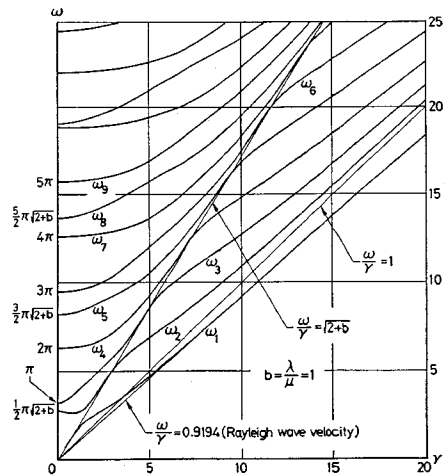


Fig. 2 Roots  $\omega_m$  of Transcendental Eq. (45) Corresponding to  $\gamma$ .

( $0 < \gamma < \infty$ ) に置き換えることができる。この積分を Simpson 数値積分で行うとすれば、数値積分の積分間隔に対応して  $\gamma$  を設定し、この  $\gamma$  に依存する式 (45) の根  $\omega_m$  は Newton 法を利用することによって求められる。Fig. 2 は  $b = \lambda/\mu = 1$  とした場合の  $\gamma$  に依存する  $\omega_m$  の形態を表わしたものである。この結果は、Poisson 比が異なるものの Miklowitz<sup>14)</sup> の振動数スペクトルの形態と合致するもので、 $\gamma$  の極限值 ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) に対して、 $\omega_1$  は Rayleigh の伝播速度  $\omega/\gamma = 0.9194$ 、 $\omega_m$  ( $m \geq 2$ ) は横波の伝播速度  $\omega/\gamma = 1$  になる特徴をもつ<sup>15)</sup>。

数値計算では次のデータ

$$b = \frac{\lambda}{\mu} = 1, \quad \varepsilon = 0, \quad 0.0005, \quad \bar{\tau} = 0.01 \dots \dots \dots (55)$$

を用いる。ただし、 $\varepsilon = 0$  は特別な場合で弾性体を表わす。Fig. 3, 4 は式 (52)、Fig. 5, 6 は式 (53) の荷重状態に対する  $\eta$  および  $\xi$  軸方向に伝播する応力波の形態を表わしたものである。これらは、 $\bar{\tau} = 0.01$  とした負荷時間のきわめて短い矩形 pulse 集中荷重の作用点付近から、まず縦波の伝播速度 ( $\omega/\gamma = \sqrt{2+b} = 1.73$ ) に依存した立ち上がりが鋭い入射 pulse 形に近い応力の尖頭部が誘起発生し、これに引きつづいて横波の伝播速度 ( $\omega/\gamma = 1$ ) をもつ尖頭部も誘起され、順次減衰しながら伝播する。特に、 $\varepsilon = 0.0005$  では、集中荷重の作用点付近で誘起した応力は急激にその強さが減退し、鋭い尖頭部もなくなり時間的に緩慢な変化を示す。これは、 $m$  による展開次数の低次項が支配的となり、粘性項によって高

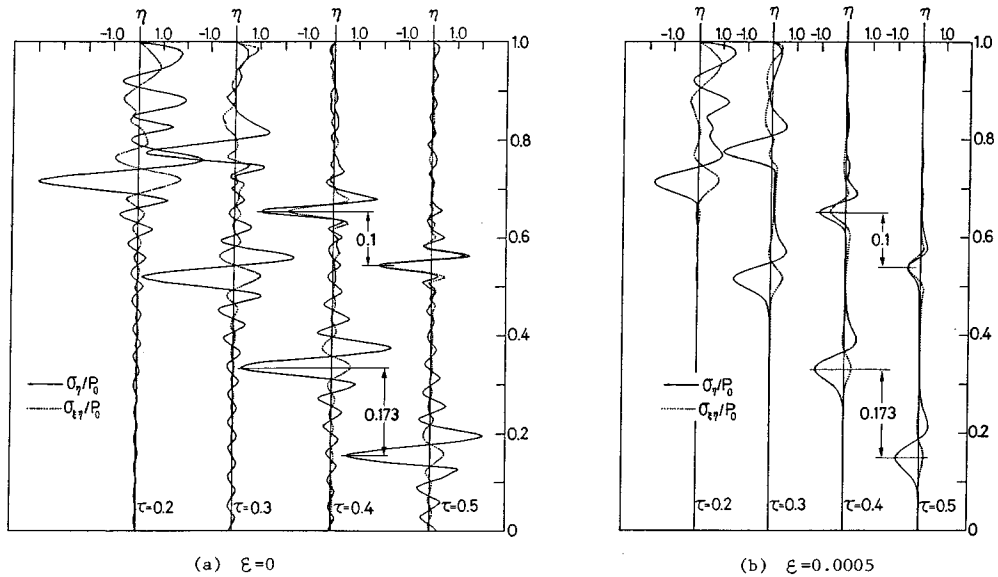


Fig. 3 Variation of Stress Waves along  $\xi = 0.2$  with Time for the Case of the Loading I.

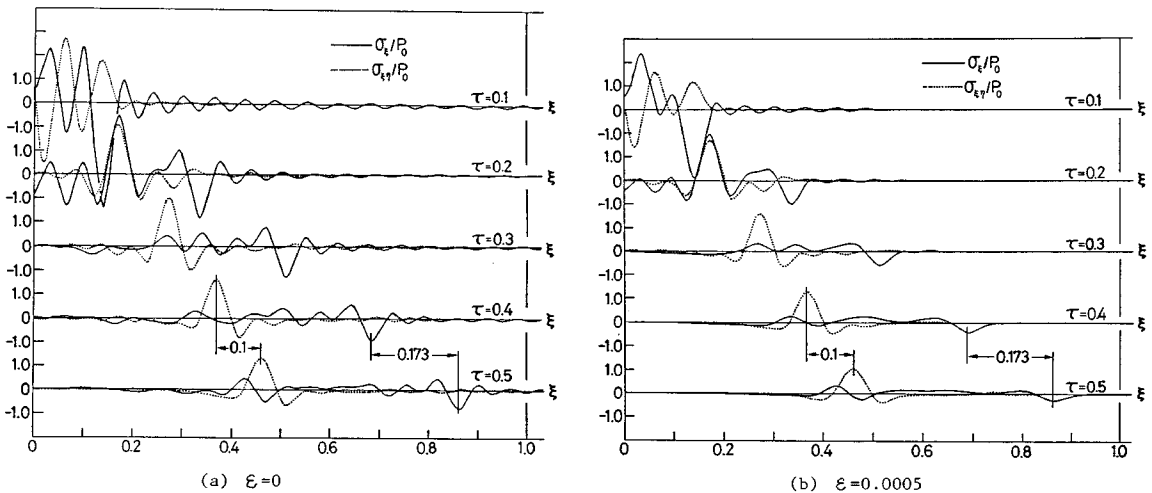


Fig. 4 Variation of Stress Waves along  $\eta = 0.9$  with Time for the Case of the Loading I.

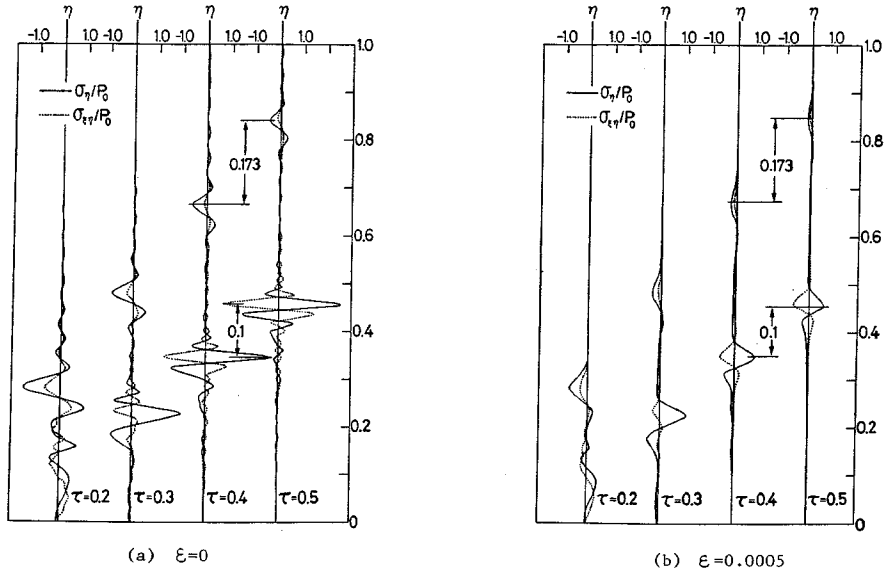


Fig. 5 Variation of Stress Waves along  $\xi=0.2$  with Time for the Case of the Loading II.

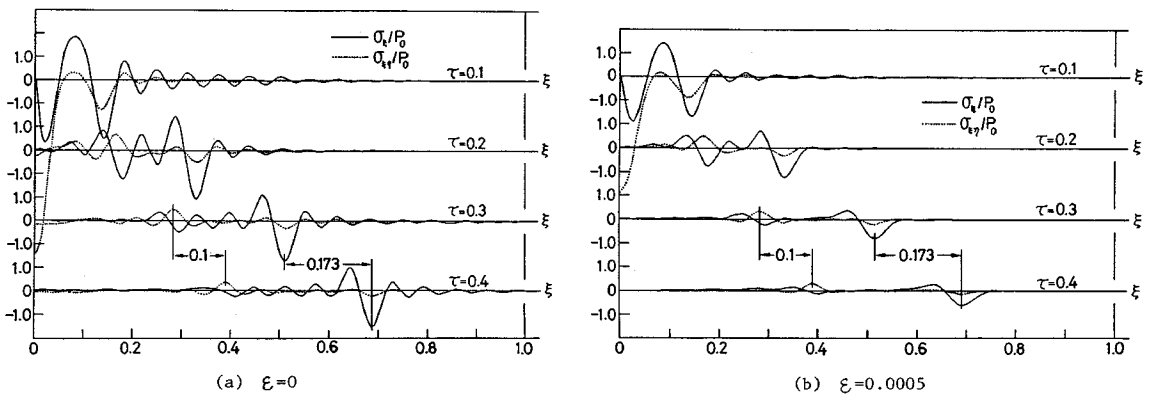


Fig. 6 Variation of Stress Waves along  $\eta=0.1$  with Time for the Case of the Loading II.

次項の影響を受けないことによる。なお、これらの結果は Fourier 逆変換の積分上限値  $\gamma=100.0$ 、積分間隔  $\Delta\gamma=0.2$ 、固有関数の展開次数  $m=100$  として得たものである。また、図中の応力  $\sigma_\varepsilon$  は次式

$$\sigma_\varepsilon = \frac{h}{\mu} \sigma_{xx} = \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left[ (2+b) \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] \dots (56)$$

のものである。

Fig. 7 は Fourier 逆変換の積分上限値、積分間隔、および固有関数の展開次数に対する解の変動を表わしたものである。ただし、(b)  $\bar{\tau}=\infty$  は式 (54) において  $P(\tau)=P_0$  ( $0 < \tau$ ) を意味するものである。(a)  $\bar{\tau}=0.01$  の場合、積分上限値、積分間隔、および固有関数の展開次数によって解は変動し、数値計算上の限界がある。しかし、全体的にみて、得られた解には極端な変動が現われず、解は積分上限値等の漸増に対して収束する傾向が

みられる。一方、(b)  $\bar{\tau}=\infty$  の場合、積分上限値等の漸増に対して、応力  $\sigma_n$  がいくらか変動するものの、変位は  $\gamma=50.0$ 、 $\Delta\gamma=0.4$ 、 $m=50$  程度でほぼ収束するとみてもよいであろう。一般に、極端な不連続関数として表わされる集中荷重を連続な Fourier 積分によって表示する場合は分布荷重等に対比して収束性が劣り、高位の積分上限値をとる必要がある。また、負荷時間がきわめて短い矩形 pulse が入射した場合、これによって誘起される応力は入射 pulse 形に近い立ち上がり鋭い尖頭部をもち、高次の固有関数展開を必要とする。

#### 4. 変位固定の境界条件

第 2 種境界値問題に現われる次の境界条件

$$\eta = \pm 1 : \begin{bmatrix} \phi_m \\ \psi_m \end{bmatrix} = 0 \dots (57)$$

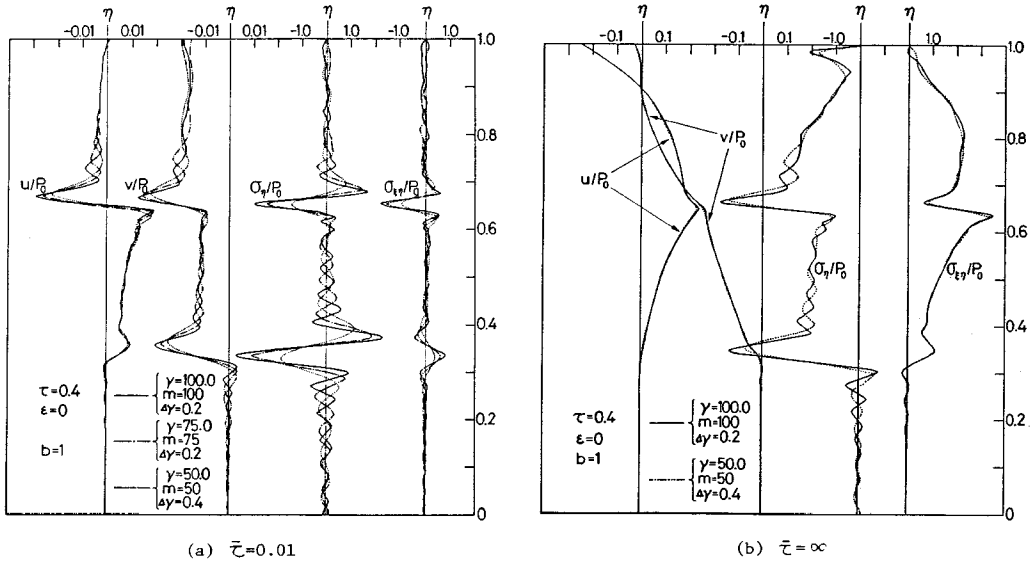


Fig. 7 Comparison of Displacement and Stress Distributions along  $\xi=0.2$  for the Upper Limits of Fourier Integral and Eigenfunction Expansion (for the case of loading I).

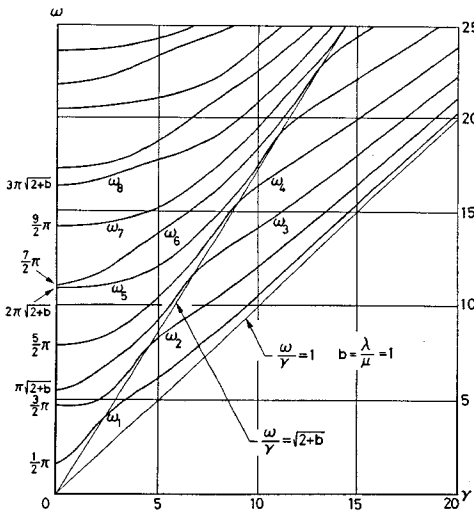


Fig. 8 Roots  $\omega_m$  of Transcendental Eq. (59) Corresponding to  $\gamma$ .

に対する固有関数  $\phi_m, \psi_m$  は次式で表わされる。

$$(1) \sqrt{2+b} < \frac{\omega_m}{\gamma}$$

set I (longitudinal mode):

$$\begin{bmatrix} \phi_m \\ \psi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma \cos \alpha_m \eta & \beta_m \cos \beta_m \eta \\ \alpha_m \sin \alpha_m \eta & \gamma \sin \beta_m \eta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_m \cos \beta_m \\ \gamma \cos \alpha_m \end{bmatrix} \dots\dots\dots (58)$$

ただし、 $\omega_m$  は次式の根をとる。

$$\alpha_m \beta_m \tan \alpha_m + \gamma^2 \tan \beta_m = 0 \dots\dots\dots (59)$$

set II (transverse mode):

$$\begin{bmatrix} \phi_m \\ \psi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \sin \alpha_m \eta & -\beta_m \sin \beta_m \eta \\ \alpha_m \cos \alpha_m \eta & \gamma \cos \beta_m \eta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_m \sin \beta_m \\ \gamma \sin \alpha_m \end{bmatrix} \dots\dots\dots (60)$$

ただし、 $\omega_m$  は次式の根をとる。

$$\alpha_m \beta_m \cot \alpha_m + \gamma^2 \cot \beta_m = 0 \dots\dots\dots (61)$$

Fig. 8 は  $b = \lambda/\mu = 1$  とした場合の  $\gamma$  に依存した式 (59) の根  $\omega_m$  を表わしたものである。この場合、 $\gamma$  の極限值 ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) に対する  $\omega_m$  ( $m \geq 1$ ) は横波の伝播速度  $\omega/\gamma = 1$  になる特徴をもつ。

### 5. あとがき

本研究は基礎方程式が連立方程式で表わされる Voigt 体二次元動的問題に対して Stokes の理論を応用し、その有用性を提案するものである。解析法の主な特徴を要約すると次のとおりである。

(1) 変位ポテンシャルは主として二、三次元弾性問題に限定して適用されるものである。本解析法は、運動方程式を境界条件および初期条件で直接的に解くことから、変位ポテンシャルを導入できない問題、たとえば、曲げたわみとせん断回転角が連成する Timoshenko はり問題のような異なる物理成分と連立して表わされ、しかもポテンシャルを導入しても連立性が排除できない場合に対しても拡張が可能で一般性があること。

(2) Voigt 体の運動方程式には時間に対する 1 階微分演算子が存在し、これにより時間関数を  $\epsilon^{i\omega m \tau}$  と仮定



した変数分離では一般に  $\omega_m$  が複素数となり、複素根を求める解析となり、数値計算処理が非常に困難となる。また、時間に対して Fourier あるいは Laplace 変換を導入した解析では、像の解が簡潔に得られるのに対して、この逆変換の積分がきわめて困難である。逆変換は複素線積分で与えられ、これを複素平面における特異点を避けた閉曲線に沿う一周路線積分に置き換え留数求和を求める煩雑な解析となる。本解析法はすべて実数解析の範囲で解決できること。これは、弾性体の振動方程式の解をもととした固有関数、すなわち、式 (18) の解を正規関数にとり、この関数の直交性を利用して Voigt 体の運動方程式を展開し境界条件および初期条件のもとで直接解かれる。しかも、弾性体の解には馴じみやすく、種々の知られた関係を使うこともできる利点がある。

(3) 外力は位置および時間に任意な式形で与えられ、帯板の表面は無論、内部の任意点にも負荷させることができる。

**謝 辞**：本研究を行うにあたり、信州大学工学部 夏目正太郎助教授から多大な支援を受けた。ここに記して深甚なる謝意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) Love, A. E. H. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Cambridge at the University Press, pp. 47, 1927.
- 2) Iacovache, M. : A generalization of Galerkin's method for the elasticity equation system (in Rumanian), Bul. st. Acad. RPR, ser. A, 1, 6, 592, 1949.
- 3) Sternberg, E. and Eubanks, R. A. : On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation, Quart. Appl. Math., Vol. 15, pp. 149~153, 1957.
- 4) Ewing, W. M., Jardetzky, W. S. and Press, F. : Elastic Waves in Layered Media, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, pp. 24~73, pp. 272~278, 1957.
- 5) Churchill, R. V. : Operational Mathematics, 2nd ed. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1958.
- 6) Erdelyi et al. : Tables of Integral Transforms, Vol. I, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1954.
- 7) Hidaka, K. : Randwertaufgabe in Beziehung zur Wärmeleitung bei nichtkonstanten Koeffizienten, Geophys. Mag., Vol. V, No. 4, S. 331.
- 8) Hidaka, K. : Anwendung der Stokes'schen Methode auf die Theorie der winderzengten Meeresströmungen, Mem. Imp. Marine Observ, Vol. V, pp. 51, 1932.
- 9) 西村源六郎 : 振動工学, 誠文堂新光社, pp. 131~133, pp. 309~311, pp. 470, 1969.
- 10) Dolph, C. L. : On the Timoshenko theory of transverse beam vibrations, Quart. Appl. Math., Vol. 12, pp. 175~187, 1954.
- 11) Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, pp. 137, 1959.
- 12) Voigt, W. : Ueber innere Reibung fester Körper, Ann. Physik, Vol. 47, pp. 671~693, 1892.
- 13) Fung, Y. C. : Foundations of Solid Mechanics (大橋ほか訳 : 固体の力学 / 理論, 培風館, pp. 185~236, 1976).
- 14) 長谷川久夫 : 二次元弾性問題の変位関数のある性質, 機械学会論文集, No. 41, pp. 3494~3496, 1975.
- 15) Pestel, E. C. and Leckie, F. A. : Matrix Methods in Elasto Mechanics, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, pp. 32~34, 1963.
- 16) Miklowitz, J. : Transient compressional waves in an infinite elastic plate or elastic layer overlying a rigid half-space, Journal of Appl. Mech., Vol. 29, No. 1, Trans. ASME, pp. 53~60, 1962.
- 17) Flugge, W. edited : Handbook of Engineering Mechanics, 1st ed., McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, pp. 64-11~64-18, 1962.

(1986. 4. 10・受付)