

# 変化スリット管の水理と一様スリット管の実験について

正員 荒木 正夫\*

**要旨** 著者の前論文が一様スリット管のみを取扱つているのに対し、本論文は管断面積、スリット幅が一様でない変化スリット管の水理を論じ、その応用性を述べる。

更に、著者が行つた一様スリット管の実験結果と理論計算値との比較を試み、著者の解が比較的良く実験値と一致することを示す。

## I. 序論

著者の前論文「スリット管の水理に関する一考察」<sup>1)</sup>は、一定幅のスリットを有する一様断面形スリット管（このようなスリット管を「一様スリット管」と呼ぶことにする）について、その水理特性を論じたものである。このような一様スリット管は、水理学的には最も一般的に取扱いよいものであるが、一例を図-1に示すように、スリットからの流入量  $q$  はスリット終端より始端に向つて急速に減少するのであって、スリット管が長い場合には、スリット始端からの流入量はほとんど零となることもあり得るのである。従つて諸種の目的に使用する場合、スリットからの流入量を一定にしたり、また極端な場合、スリット終端から始端に向つて流入量を増加したい場合には、一様スリット管ではその目的を達し得ないことは明らかである。

このような目的のためには、スリット管断面形およびスリット幅の両者またはいずれか一方を、変化あるものとすればよいのであって、かゝるスリット管を前述の一様スリット管に対して「変化スリット管」と総称することにする（図-1）。

本論文の前半においては、諸種の場合についてこのような変化スリット管の水理を論じ、また後半においては、一様スリット管について、著者が行つた実験結果と理論解による計算値との比較を試み、それによつて著者の解法の妥当性を吟味するつもりである。

## II. 変化スリット管の定常流の基礎方程式

### 1. 流量方程式

本論文に出てくる記号で、特に定義しないものは、すべて前論文の記号と同一である。また、前(1)式等は前論文の(1)式を意味するものとする。変化スリット管に対してもその基礎方程式は、一様スリット管の場合と同様、前(10)式と等しい次式にて与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{w} + z + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{\alpha V q}{gA} + \frac{\lambda V^2}{2gR} = 0 \quad (1)$$

また、圧力  $p$  も前(13)式と同じく次式で表わされる。

$$\frac{p}{w} = H - z - \frac{\eta}{2g b^2} \left( \frac{dQ}{dx} \right)^2 \quad (2)$$

(1), (2) 及び前(1)式より、 $Q$  についての微分方程式を誘導すると、変化スリット管の流量方程式が得られる。

$$\frac{dQ}{dx} \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{1}{b} \frac{db}{dx} \left( \frac{dQ}{dx} \right)^2 - \frac{2\alpha}{\eta} \frac{b^2}{A^2} Q \frac{dQ}{dx} - \frac{b^2}{\eta A^2} \left( \frac{\lambda}{2R} - \frac{\alpha}{A} \frac{dA}{dx} \right) Q^2 = 0 \quad (3)$$

### 2. 境界条件

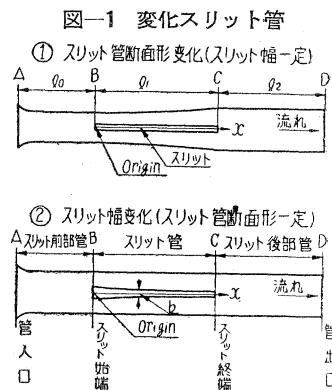
前論文の場合と同じく、境界条件はそれぞれ次式にて表わされる。

(1) スリット始端条件 ( $x=0$ , 断面-B)

$$\left[ \frac{dQ}{dx} \right]_{x=0} = \frac{b_B}{A_B} \sqrt{\frac{\alpha + f_1}{\eta}} Q_B \quad (4)$$

ここに

$$f_1 = f_e + f_b + \lambda_1 \frac{l_0}{R_B} \quad (5)$$



\* 建設技官、建設省土木研究所

(2) スリット終端条件 ( $x=l_1$ , 断面—C)

$$\left[ \left( \frac{dQ}{dx} \right)^2 \right]_{x=l_1} = -\frac{2gb_c^2}{\eta} \left( H - \frac{f_2 Q_c^2}{2gA_c^2} \right) \quad \dots \dots \dots (6)$$

ここに

$$f_2 = f_b' + \lambda_2 \frac{l_2}{R_c} \quad \dots \dots \dots (7)$$

(5), (7) 式に示した  $f_1, f_2$  は、スリット前部管および後部管の断面形が、それぞれ変化しないものとして求めあるが、それらが変化する場合でも簡単に誘導でき、かつ以後の解式はすべてそのまま成立することは明らかである。前各式において  $A_B, b_c$  等のように、サフィックス A, B, C, D を有する記号が現われたが、これらはそれぞれ、断面—A, B, C, D における断面積、スリット幅等を意味するものである。

(4), (6) 式の条件の下に (3) 式を解けばよいが、一般的に解くことは無論できないので、以下 (1) スリット全長にわたつて流入量を一定ならしめるスリット管、と (2) 然らざるスリット管、とに分類して、前者はできるだけ一般的に取扱い、後者はある特定の場合のみを論ずることにする。実用上から見ても、後者はあまり重要な意義を有するものではない。

### III. スリット全長にわたつて流入量 $q$ を一定ならしめるスリット管の解

#### 1. スリット管断面形が変化し、スリット幅一定とする場合 (図-1, ①)

この場合には、断面積  $A$  と動水半径  $R$  との関係が、あらかじめわかつていなければ厳密には解けない。換言すれば、断面形状を円とかク形とかに定めておかなければ解が定まらないので、本節においては、まず代表断面形として円およびク形断面の両者を取扱うが、終りに任意断面形に対する近似解をも求めるこにする。なお (3) 式において、 $R$  を含む項は摩擦項のみで、かつこの項は他項に比してはなはだ小さいのが普通であるから、以下の所論においては、スリット幅が径深に及ぼす影響は無視する。

##### (1) 円形断面

円管の内径を  $D$  とする。題意により  $q=$ 一定とする解を求めるのであるから、当然次式が成立する。

$$Q = Q_B + qx \quad \dots \dots \dots (8)$$

すなわち  $d^2Q/dx^2=0$ 、また  $db/dx=0$  であるから、(3) 式と (8) 式より次式が得られる。

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} - \frac{2}{x + \frac{Q_B}{q}} - \frac{\lambda}{2\alpha R} = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

円形断面であるから、(9) 式を書き改めて

$$\frac{dD}{dx} - \frac{D}{x + \frac{Q_B}{q}} - \frac{\lambda}{\alpha} = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

(10) 式を積分して

$$D = \left( x + \frac{Q_B}{q} \right) \left\{ \frac{q}{Q_B} D_B + \frac{\lambda}{\alpha} \log \left( 1 + \frac{q}{Q_B} x \right) \right\} \quad \dots \dots \dots (11)$$

また (4), (6) 式の両境界条件よりそれぞれ次式が得られる。

$$\frac{q}{Q_B} = \frac{4b}{\pi D_B^2} \sqrt{\frac{\alpha + f_1}{\eta}} \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$\left( \frac{q}{Q_B} \right)^2 = \frac{2gb^2}{\eta} \left\{ \frac{H}{Q_B^2} - \frac{8f_2}{g\pi^2 D_c^4} \left( 1 + \frac{q}{D_B} l_1 \right)^2 \right\} \quad \dots \dots \dots (13)$$

(11), (12), (13) 式により、解は完全に求められたことになる。たとえば  $D_B$  を与えれば、(12) 式より  $q/Q_B$  が求まり、従つて (11) 式より  $D$  が  $x$  の函数として一意的に定められる。更に (13) 式より  $Q_B \propto \sqrt{H}$  として、水深・流量関係も求められる。

本解において特に重要なことは、 $H$  のいかんにかゝわらず  $q=$ 一定が成り立つところであつて、このために実用価値が大きくなる。かつまた  $b=$ 一定であるから、流入量のみならず流入速度  $v$  も一定となるから、排砂管等には特に適していると思われる。

##### (2) ク形断面

ク形断面の高さを  $h$ 、幅を  $B$  とするとき、常に  $h/B=a_*(\text{一定})$  ならしめるものとすれば、(9) 式より上と同様にして次の各式が得られる。

$$B = \left( x + \frac{Q_B}{q} \right) \left\{ \frac{q}{Q_B} B_B + \frac{(1+a_*)\lambda}{2\alpha a_*} \log \left( 1 + \frac{q}{Q_B} x \right) \right\} \quad (14)$$

$$\frac{q}{Q_B} = \frac{b}{A_B} \sqrt{\frac{\alpha+f_1}{\eta}} \quad (15)$$

$$\left( \frac{q}{Q_B} \right)^2 = \frac{2gb^2}{\eta} \left\{ \frac{H}{Q_B^2} - \frac{f_2}{2g A_c^2} \left( 1 + \frac{q}{Q_B} l_1 \right)^2 \right\} \quad (16)$$

### (3) 任意断面形に対する近似解

スリット管が比較的短い場合には、(9)式の第三項  $\lambda/2\alpha R$  はほぼ一定とみなして積分しても、ほとんど結果に影響を及ぼさない。このような仮定の下に、(9)式を積分すれば

$$A = A_B \left( 1 + \frac{q}{Q_B} x \right)^2 e^{-\frac{\lambda}{2\alpha R B} x} \quad (17)$$

境界条件はやはり(15), (16)式にて与えられる。

### 2. スリット管断面形は一定で、スリット幅が変化する場合(図-1, ②)

この場合には前節と同様、 $q=一定$ とする解を求めるのであるから、(8)式がそのまま成立する。従つて  $d^2Q/dx^2 = 0, dA/dx = 0$  であるから(3), (8)式より

$$-\frac{1}{b^2} \frac{db}{dx} = \frac{2\alpha}{\eta A^2} \left( x + \frac{Q_B}{q} \right) + \frac{\lambda}{2\eta RA^2} \left( x + \frac{Q_B}{q} \right)^2 \quad (18)$$

(18)式を積分して

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b_B^2} = \frac{x}{\eta A^2} \left\{ 2\alpha \left( x + 2\frac{Q_B}{q} \right) + \frac{\lambda}{3R} \left( x^2 + 3x \frac{Q_B}{q} + 3\frac{Q_B^2}{q^2} \right) \right\} \quad (19)$$

境界条件を与える二式は(15)式の $b$ を $b_B$ , (16)式の $b$ を $b_C$ , (15), (16)両式の $A_B, A_{C*}$ をいずれも $A$ にておきかえれば得られる。

### 3. スリット管断面形、スリット幅ともに変化する場合

この場合には、管断面形またはスリット幅のいずれかの変化をあらかじめ与えなければ、解が定まらないことは明らかである。まず管断面形の $x$ に関する変化を知つて、 $q=一定$ ならしめる $b$ を求めるには、(3), (8)式より

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b_B^2} = \frac{4\alpha}{\eta} \int_0^x \frac{x + \frac{Q_B}{q}}{A^2} dx + \frac{2}{\eta} \int_0^x \frac{\left( x + \frac{Q_B}{q} \right)^2}{A^2} \left( \frac{\lambda}{2R} - \frac{\alpha}{A} \frac{dA}{dx} \right) dx \quad (20)$$

(20)式に既知の $A, dA/dx, R$ を $x$ の函数として導入すれば解が求められる。この場合の境界条件式は、(15)式の $b$ を $b_B$ , (16)式の $b$ を $b_C$ にておきかえればよい。以上と逆に、 $b$ のある既知の変化を与えて、管断面形を定めることは一般に容易でない。

### IV. スリットからの流入量が一定ならざる変化スリット管の一解例

本章においてはスリット管断面形は不变とすると、(3)式より

$$\frac{dQ}{dx} \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{1}{b} \frac{db}{dx} \left( \frac{dQ}{dx} \right)^2 - \frac{2\alpha}{\eta} \frac{b^2}{A^2} Q \frac{dQ}{dx} - \frac{\lambda b^2}{2\eta RA^2} Q^2 = 0 \quad (21)$$

$b$ は次式で表わされる二次曲線的に変化するものとする。

$$b = \frac{h}{x+k} \quad (22)$$

こゝに $h, k$ は共に正の任意常数である。(22)式は図-1の②に示すような、スリット始端より終端に向つて次第に狭くなるスリット形状をあらわすことができる。

#### 1. 流量方程式の逐次近似解法

##### (1) 流量方程式

$Q$ を $\lambda$ について展開すれば

$$Q = Q_0 + \lambda Q_1 + \lambda^2 Q_2 + \dots \quad (23)$$

(23)式およびその導函数群を(21)式に代入して、 $\lambda$ の同次項を分離すれば

$\lambda$ の零次項

$$(x+k)^2 \frac{d^2Q_0}{dx^2} + (x+k) \frac{dQ_0}{dx} - \beta_0^2 Q_0 = 0 \quad (24)$$

$\lambda$ の一次項

$$\left\{ (x+k)^2 \frac{d^2 Q_1}{dx^2} + (x+k) \frac{dQ_1}{dx} - \beta_0^2 Q_1 \right\} \frac{dQ_0}{dx} = -\frac{h^2}{2\eta RA^2} Q_0^2 \quad \dots \dots \dots (25)$$

ここに

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\eta}} \frac{h}{A} \quad \dots \dots \dots (26)$$

(2) 境界条件、管内圧力、スリットからの流入量

これらはいずれも  $b$  を  $h/(x+k)$  に置きかえれば、一様スリット管の場合と同一である。

## 2. 第一次近似解の誘導 ( $Q_0, p_0, q_0$ )

(24) 式を解いて、 $C, D$  を積分常数とすれば

$$Q_0 = C(x+k)^{\beta_0} + D(x+k)^{-\beta_0} \quad \dots \dots \dots (27)$$

(27) 式およびその導函数群を、前 (26) 式に代入して  $D$  を求めれば

$$D = a_0 C \quad \dots \dots \dots (28)$$

ここに

$$a_0 = \frac{\sqrt{2\alpha} - \sqrt{\alpha + f_1}}{\sqrt{2\alpha} + \sqrt{\alpha + f_1}} k^2 \beta_0 \quad \dots \dots \dots (29)$$

(28) 式を (27) 式およびその導函数に代入して

$$Q_0 = CS(x) \quad \dots \dots \dots (30)$$

$$\frac{dQ_0}{dx} = C \beta_0 T(x) \quad \dots \dots \dots (31)$$

ここに

$$S(x) = (x+k)^{\beta_0} + a_0(x+k)^{-\beta_0} \quad \dots \dots \dots (32)$$

$$T(x) = (x+k)^{\beta_0-1} - a_0(x+k)^{-\beta_0-1} \quad \dots \dots \dots (33)$$

(30), (31) 式を、前 (28) 式に代入すれば  $C$  が定められる。

$$C = A \sqrt{2gH} \phi_0 \quad \dots \dots \dots (34)$$

ここに

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha(l_1+k)^2 T(l_1)^2 + f_2 S(l_1)^2}} \quad \dots \dots \dots (35)$$

(30), (31), (34), 前 (31), 前 (33) 式より次の各式が得られる。

$$Q_0 = A \sqrt{2gH} \phi_0 S(x) \quad \dots \dots \dots (36)$$

$$q_0 = \beta_0 A \sqrt{2gH} \phi_0 T(x) \quad \dots \dots \dots (37)$$

$$\frac{p_0}{w} = H - z - 2\alpha H(x+k)^2 \phi_0^2 T(x)^2 \quad \dots \dots \dots (38)$$

(36), (37), (38) 式が求める第一次近似解である。第二次近似解は (36), (37) 式を (25) 式に代入して積分すれば求められるはずであるが、(25) 式は一般的には初等函数をもつて積分することができない。ただ  $\beta_0 = n$  または  $1/n$  ( $n$  は正の整数) の場合には、容易に積分することができるが、 $n$  に何らかの特定の数値を与えなければ解が定まらないので、一様スリット管の場合のように一般的な解式として示すことはできない。

しかし後章の一様スリット管の実験の所で示すように、通常のスリット管では、第一次近似解で十分まに合う場合が多いのである。

## V 特別な場合の解

本章においては以上の各解について、重要な二、三の特別な場合を取り扱うことになる。

### 1. 管入口からスリットがついている場合

以上の各式において  $f_1 = f_\infty$  とおけばよい。

### 2. 管入口断面が閉めふさがれている場合

(1) スリット管断面形が変化し、スリット幅一定とする場合 ( $q = \text{一定}$ )

この場合、 $q = \text{一定}$ ならしめる解は存在しない。すなわち  $q = \text{一定}$ ならしめるためには、管入口断面を閉めふさぐことができない。

(2) スリット管断面形は一定で、スリット幅が変化する場合 ( $q = \text{一定}$ )

この場合、(19) 式等において  $Q_B = 0, f_1 \rightarrow \infty$  とおけばよい。

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b_B^2} = -\frac{x^2}{\eta A^2} \left( 2\alpha + \frac{\lambda}{3R} x \right) \dots\dots\dots (39)$$

$$\frac{H}{q^2} = \frac{1}{2g} \left( \frac{\eta}{b_c^2} + \frac{f_z l_1^2}{A^2} \right) \dots\dots\dots (40)$$

(3) スリット管断面形、スリット幅ともに変化する場合 ( $q=一定$ )

この場合は、(20)式において  $Q_B \rightarrow 0$  とおけばよい。

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b_B^2} = -\frac{4\alpha}{\eta} \int_0^x \frac{x}{A^2} dx + \frac{2}{\eta} \int_0^x \frac{x^2}{A^2} \left( \frac{\lambda}{2R} - \frac{\alpha}{A} \frac{dA}{dx} \right) dx \dots\dots\dots (41)$$

(41)式と、(40)式の  $A$  を  $A_C$  にておきかえた式、の両式が求める解を与える。

(4) スリットからの流入量が一定ならざる変化スリット管(第IV章)

第IV章の解については、 $f_1 \rightarrow \infty$  とすればよいから

$$[\alpha_0]_{f_1 \rightarrow \infty} = -k^2 \beta_0 \dots\dots\dots (42)$$

$\alpha_0 = -k^2 \beta_0$  とおけば、第IV章の解はすべてそのまま成立する。

なお、これまでスリット管はすべて吸込管として取扱つてきたが、これを噴出管として用いる場合も、 $dQ/dx = -q$  として解けば、以上とほとんど同様にして解を求めることができる。

## VI. 一様スリット管の実験

### 1. 概 要

以上誘導した各式がどの程度信頼性を有するものであるか、また定義した各係数、たとえば  $\alpha$ 、 $\eta$ 、 $\lambda$  等、はいかなる値をとるべきかを吟味するこめに、一様スリット管について実験を行なうこととした。

実験の方法は、循環式の 1m 幅水路の途中に隔壁を設け、この隔壁を通して図-3 に示すような真チュウ製スリット管を、スリットを上向きにして水平に設置した(図-2)。この実験用スリット管の両側に取付けてある 22カ所の圧力測定孔にビニール管をつなぎ、このビニール管を水マノメーターに接続して、管内面圧力を読みとるようにした。管内流速を測るには、スリットと平行に設けた台木上を移動しうるピトー管の先端を、スリットを通して管内に入れることにしたが、ピトー管の振動をおこすおそれがあつて、ロッドの長さをあまり長くすることはできないので、 $H=100$  cm 以上の場合の測定を断念した。出口流量すなわち全流量  $Q_D$  は、水路の最上流端

にある 1m 幅の流量測定セキの越流深より求めた。

スリットを有しない管水路についての予備実験の結果より、まず次のような各係数の値を算定した。 $f_e = 0.04$ ,  $\lambda_1 = 0.005$ ,  $\lambda_2 = 0.005$ ,  $\alpha = 1.02$ 。次にスリット管の実験結果を解析することにより、大よそ次のような値が適当と思われた。 $\lambda = 0.005$ ,  $\eta = 1.15$ 。

図-2 模型実験装置図

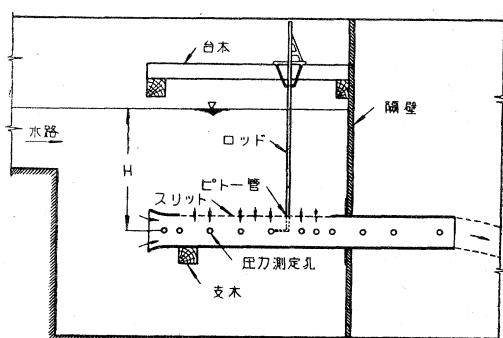


図-3 実験用スリット管

平面図

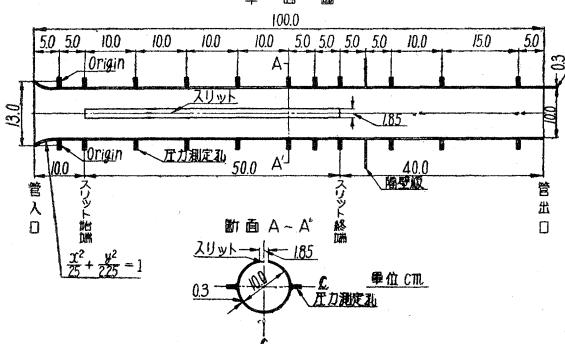


図-4 水深・出口流量関係

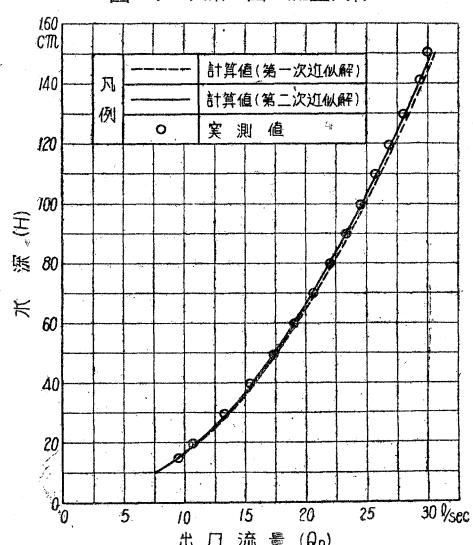


図-5 管内流速

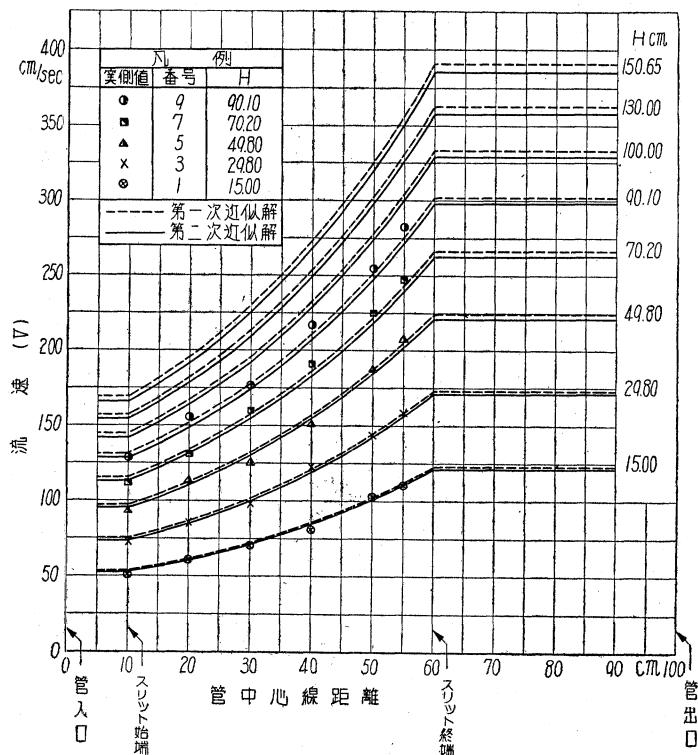
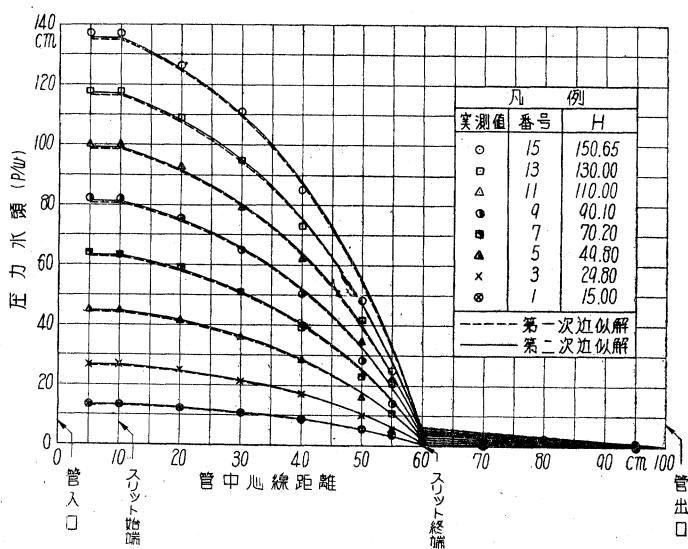


図-6 管内圧力水頭



ところで $b$ はスリット幅そのものではなく、ベナコントラクタの幅をとらなければならないことが、実験の結果より明らかとなつた。実験用スリット管のスリット幅は1.85cmであるから、二次元スリットにおける収縮係数を0.611とすると、 $b = 1.85 \times 0.611 = 1.13\text{ cm}$ となる。

## 2. 実験値と計算値の比較

実験により得られた出口流量、管内流速、管内圧力をそれぞれ図-4, 5, 6に示した。次に、管内流量(流速)、管内圧力、スリットからの流入量について、前(42)、前(43)、前(44)式による第一次近似解の計算値、および前(56)、前(57)、前(58)式を用いての第二次近似解の計算値を、それぞれ図-4, 5, 6, 7に示した。

図-4, 5, 6に見られるように、実測値と計算値との一致は比較的良好である。特に、出口流量と水深との関係は、両者完全に一致したと言いうる。ピトー管による管内流速の測定については、数回の測定ごとに皆かなり差異があつたので、あまり自信のもてる測定値ではなかつたが、比較的差異の少いものの平均値を図-5にプロットした。図-6の圧力測定値はかなり精度の良い測定値であつて、実測値と計算値との傾向に少しく差があるのでわかる。

以上の計算により、この程度のスリット管に対しては、第一次近似解と第二次近似解との差が割合に小さいことがわかつたが、これより推察して場合によつては、第一次近似解のみで十分であることが多いものと思われる。

以上をもつて、スリット管に関する著者の研究を終ることにするが、将来このようなスリット管がしばしば実際に応用されることを望んでやまない。

## 参考文献

- 1) 荒木正夫：スリット管の水理に関する一考察、土木学会誌第41巻3号、昭31-3.

(昭. 31. 3. 16)

図-7 スリットからの流入量

