

副座標による Beam Theoryについて

正員 石川時信*

要旨 Beam Theory に副座標を用うればハリや剛構の計算を簡単にする上に多大の利益があることを論証したものである。

1. 概説

構造物は Beam の剛結体と見るべきもので、Beam Theory は Mohr の角変化と位変との法則や Castigliano の最小動の原理にしても、いずれも断面二次モーメントを分母とする分数式の積分をするを要し、その分子は荷重や反力が直接にひきおこす片持パリモーメントの集合であるから、その各の片持パリモーメントに図-1 のように副座標 $\tau y, \lambda y, \mu y$ 等を与える、それ等の副座標にはさまれるハリの部分の断面二次モーメントには積分しやすいような自由なる函数を選び積分を容易にし、Beam Theory に対する基本的代数式を与えておき、かつ積分の数値图表を作製しておけば構造物実地設計計算が合理的に、かつ平易迅速になされる。次に副座標を用いるために必要な諸要項を略述する。

(1) 座標の表示

本文においては前述のように副座標を用いるのであるから一連の代数式中に座標または原点を異にした文字が現われるが、その場合はその文字の属する座標または原点を表示することが絶対的必要条件となる、従つてその座標または座標の原点を表示する文字を便宜上添字とすることによってその座標をたとえば $I_x, I_\lambda, \alpha_A, \delta_G$ 等のように表示することにした。

(2) 積分回数の表示

積分は定積分を用いるのであるが、その回数を示すのに添字 1, 2, 3, ……等を用いる。たとえば α_2, r_1 のように表示した。

(3) 積分順位の表示

積分後の変数の次数の順位は積分前の変数の次数の順位に従う関係があるので積分前の変数の次数の零次、一次、二次、三次、四次に従つてそれぞれ数学的序列を表わす文字 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ 等をもつて積分結果を表わし積分後の変数の次数をはつきりさせ、かつ計算途上における次数の誤りを直ちに発見できる一助とした。 $\alpha_1 - \alpha_2$ 等。

(4) 積分後の座標

Beam Theory においてはハリ端条件は Beam の両端においてのみ考えられ、従つて副座標上においてはハリ端条件は考えられず、主座標 xy 上においてのみハリ端条件が考えられるわけで、従つて副座標上の積分はその計算を右端まで完了した時はその結果を必ず主座標に移す必要がある。

(5) 積分記号その他

記述を簡単にするために特に定積分記号を用いないこともある。また $dx, d\tau, dr$ 等を区別しないこともあり、 $dxdx$ を dx^2 とすることもある。たとえば $\int_0^x \frac{x}{I_x} dx = \int \frac{x}{I_x} dx, \int_0^\lambda \frac{\lambda}{I_\lambda} d\lambda = \int \frac{\lambda}{I_\lambda} d\lambda$ 等。

(6) 座標の区別

従来のように xy の单一座標すべてを表現するのではなく、別に副座標を設けて、必要な表現をするのであるから座標の区別は常に念頭におく必要がある。

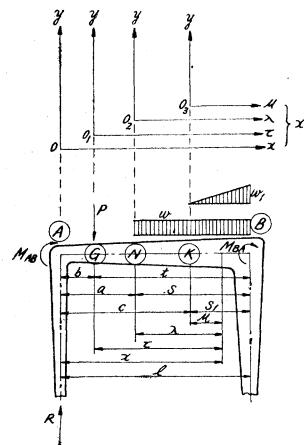
以上のような表現方法によるとときは、図-1においては ⑩⑪ 間の 1 点に x 点を選べば x 点の左側においては曲げモーメントは、

$$M = M_{AB} + Rx - P\tau - \frac{1}{2}w\lambda^2 - \frac{1}{6}\frac{w_1\mu^3}{S_1}$$

であるから、片持パリモーメント $P\tau, w\lambda^2/2, w_1\mu^3/6S_1$ にそれぞれ副座標 $\tau y, \lambda y, \mu y$ を与え、片持パリモーメントはそれぞれ τ の函数、 λ の函数、 μ の函数でありとし、それぞれの座標にはさまれるハリの部分の断面二次モーメントもまた τ の函数、 λ の函数、 μ の函数であるとし、前記の表示法に従えば、

$$I_x = I_\tau = I_\lambda = I_\mu$$

図-1 荷重及び副座標



あるいは、一つの変数のみについて、

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x = I_A f_A(x) \\ I_\tau = I_G f_G(\tau) \\ I_\lambda = I_N f_N(\lambda) \\ I_\mu = I_K f_K(\mu) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \int \frac{1}{I_x} dx \\ \beta_1 = \int \frac{x}{I_x} dx \\ \gamma_1 = \int \frac{x^2}{I_x} dx \\ \delta_1 = \int \frac{x^3}{I_x} dx \\ \varepsilon_1 = \int \frac{x^4}{I_x} dx \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \iint \frac{1}{I_x} dx^2 \\ \beta_2 = \iint \frac{x}{I_x} dx^2 \\ \gamma_2 = \iint \frac{x^2}{I_x} dx^2 \\ \delta_2 = \iint \frac{x^3}{I_x} dx^2 \end{array} \right.$$

の表現を用いれば、他の変数 τ, λ, μ についても同様の表現が用いられる。

2. 副座標による基本的代数式

(1) Mohr の角変化と変位の法則による場合

図-1において反力 R , 集中荷重 P , 等布荷重 w , 直線変化荷重 w_1 が直接におこす片持バーモーメントの集合を M とすれば、

$$M = M_{AB} + R x - P \tau - \frac{1}{2} w \lambda^2 - \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1} \mu^3$$

しかるに一方において $d^2y/dx^2 = M/EI$ なる関係があるから概説の要項に従えば、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{E} \left\{ \frac{M_{AB}}{I_x} + \frac{Rx}{I_x} - \frac{P\tau}{I_\tau} - \frac{1}{2} \frac{w\lambda^2}{I_\lambda} - \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1} \frac{\mu^3}{I_\mu} \right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta_A + \frac{1}{E} \left\{ M_{AB} \int \frac{1}{I_x} dx + R \int \frac{x}{I_x} dx - P \int \frac{\tau}{I_\tau} d\tau - \frac{1}{2} w \int \frac{\lambda^2}{I_\lambda} d\lambda - \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1} \int \frac{\mu^3}{I_\mu} d\mu \right\} = \theta_B \dots \dots \dots (1)$$

$$y = d_A + \theta_A l + \frac{1}{E} \left\{ M_{AB} \iint \frac{1}{I_x} dx^2 + R \iint \frac{x}{I_x} dx^2 - P \iint \frac{\tau}{I_\tau} d\tau^2 - \frac{1}{2} w \iint \frac{\lambda^2}{I_\lambda} d\lambda^2 - \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1} \iint \frac{\mu^3}{I_\mu} d\mu^2 \right\} = d_B \dots \dots \dots (2)$$

この再式は概説の表示法によれば、

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_A + \frac{1}{E} \left(M_{AB} \alpha_{1A} + R \beta_{1A} - P \beta_{1G} - \frac{1}{2} w \gamma_{1N} - \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1} \delta_{1K} \right) = \theta_B \dots \dots \dots (1a) \\ d_A + \theta_A l + \frac{1}{E} \left(M_{AB} \alpha_{2A} + R \beta_{2A} - P \beta_{2G} - \frac{1}{2} w \gamma_{2N} - \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1} \delta_{2K} \right) = d_B \dots \dots \dots (2a) \end{array} \right.$$

これすなわち Mohr の角変化と変位の法則による場合の基本的代数式である。

(2) Castigiano の最小値の原理による場合(図-1)

x 点を⑩⑪間の一点に選べば、断面二次モーメントは各座標において大きさ共通にして、函数関係は異なる。すなわち Mohr の法則の場合のようにして、

$$\begin{aligned} M &= M_{AB} + Rx - P\tau - \frac{1}{2} w \lambda^2 - \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1} \mu^3, \quad \frac{\partial M}{\partial R} = x = a + \tau = b + \lambda = c + \mu, \\ \frac{\partial M}{\partial R} &= M_{AB}x + Rx^2 - P(a\tau + \tau^2) - \frac{1}{2} w(b\lambda^2 + \lambda^3) - \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1}(c\mu^3 + \mu^4) \\ \frac{\partial W}{\partial R} &= \int \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial R} dx \\ &= \frac{1}{E} \left\{ M_{AB} \int \frac{x}{I_x} dx + R \int \frac{x^2}{I_x} dx - P \left(a \int \frac{\tau}{I_\tau} d\tau + \int \frac{\tau^2}{I_\tau} d\tau \right) - \frac{1}{2} w \left(b \int \frac{\lambda^2}{I_\lambda} d\lambda + \int \frac{\lambda^3}{I_\lambda} d\lambda \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1} \left(c \int \frac{\mu^3}{I_\mu} d\mu + \int \frac{\mu^4}{I_\mu} d\mu \right) \right\} \\ &= \frac{1}{E} \left\{ M_{AB} \beta_{1A} + R \gamma_{1A} - P(a\beta_{1G} + \gamma_{1G}) - \frac{1}{2} w(b\gamma_{1N} + \delta_{1N}) - \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1}(c\delta_{1K} + \varepsilon_{1K}) \right\} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

(3) Wilson 教授のタワミ角式⁽¹⁾の形式の場合

(1a), (2a) 式を解いて、

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{AB} = \frac{E}{A_0} \{ (l\beta_{1A} - \beta_{2A})\theta_A + \beta_{2A}\theta_B - \beta_{1A}d \} - C_{AB} \dots \dots \dots (1b) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} M_{BA} = -\frac{E^*}{A_0} \{ \beta_{2A}\theta_A + (l\alpha_{2A} - \beta_{2A})\theta_B - \alpha_{2A}d \} - C_{BA} \dots \dots \dots (2b) \end{array} \right.$$

此の両式は部材の一端ヒンジの場合は、

これすなわち Wilson 教授の型式の場合の基本的代数式である。

ただし、(1 b)～(2 c) 式において、

$$\left\{ \begin{array}{l} d = d_B - d_A \\ A_0 = \alpha_{1A}\beta_{2A} - \alpha_{2A}\beta_{1A} \\ C_{AB} = \frac{1}{A_0} \left[P(\beta_{1A}\beta_{2G} - \beta_{2A}\beta_{1G}) + \frac{1}{2}w(\beta_{1A}\gamma_{2N} - \beta_{2A}\gamma_{1N}) + \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1} (\beta_{1A}\delta_{2K} - \beta_{2A}\delta_{1K}) \right] \\ C_{BA} = \frac{1}{A_0} \left[P\{A_0t - \alpha_{2A}\beta_{2G} + (l\alpha_{2A} - \beta_{2A})\beta_{1G}\} + \frac{1}{2}w\{A_0S^2 - \alpha_{2A}\gamma_{2N} + (l\alpha_{2A} - \beta_{2A})\gamma_{1N}\} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{6} \frac{w_1}{S_1} \{A_0S^3 - \alpha_{2A}\delta_{2K} + (l\alpha_{2A} - \beta_{2A})\delta_{1K}\} \right] \end{array} \right.$$

(4) H. Cross 教授²⁾ のモーメント分配法の形式の場合 (図-2a)

前記の Wilson 教授の型式はタフミ角式の正負の符号及び記号を替えて、(1 b), (2 b) より、

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{ab} = -\frac{E}{A_0} \{ (\ell \beta_{1a} - \beta_{2a}) \theta_a + \beta_{2a} \theta_b \} - C_{ab} \\ M_{ba} = -\frac{E}{A_0} \{ (\ell \alpha_{2a} - \beta_{2a}) \theta_b + \beta_{2a} \theta_a \} + C_{ba} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1d) \\ (2d) \end{array}$$

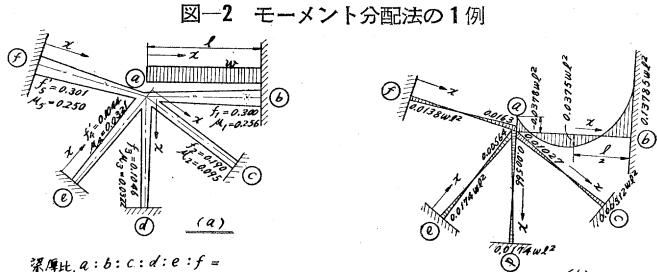
あるいは、

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{ab} = k_{ab} \{ g_{ab}\theta_a + j_{ab}\theta_b \} - C_{ab} \\ M_{ba} = k_{ab} \{ g'_{ab}\theta_b + j_{ab}\theta_a \} + C_{ba} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1e) \\ (2e) \end{array}$$

ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{ab} = - \frac{E}{A_0} \\ g_{ab} = (l \beta_{1a} - \beta_{2a}) \\ g'_{ab} = (l \alpha_{2a} - \beta_{2a}) \\ j_{ab} = \beta_{2a} \end{array} \right.$$

この(1e), (2e)式を図-2に適用すれば、



$$\left. \begin{array}{l} M_{ab} = k_{ab} g_{ab} \theta_a - C_{ab} \\ M_{ac} = k_{ac} g_{ac} \theta_a \\ M_{ad} = k_{ad} g_{ad} \theta_a \\ M_{ae} = k_{ae} g'_{ae} \theta_a \\ M_{af} = k_{af} g'_{af} \theta_a \end{array} \right\} \dots\dots\dots (3 \text{ a}) \quad \begin{array}{l} \text{深厚比} q:b:c:d:e:f = \\ 2:4:2:1:1:4 \\ \text{比例} I_a:I_b:I_c:I_d:I_e:I_f = \\ 8:64:8:1:1:64 \end{array}$$

$$\Sigma M=0 \text{ より, } (k_{ab}g_{ab} + k_{ac}g_{ac} + k_{ad}g_{ad} + k_{ae}g'_{ae} + k_{af}g'_{af})\theta_a - C_{ab} = 0$$

$$\theta_a = \frac{1}{k_{ab}g_{ab} + k_{ac}g_{ac} + k_{ad}g_{ad} + k_{ae}g'_{ae} + k_{af}g'_{af}} C_{ab} = \frac{1}{\Sigma kg} C_{ab}$$

従つて、(1e), (2e) 式より

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{ab} = \frac{k_{ab}g_{ab}}{\Sigma kg} C_{ab} - C_{ab} = f_1 C_{ab} - C_{ab} \\ M_{ac} = \frac{k_{ac}g_{ac}}{\Sigma kg} C_{ab} = f_2 C_{ab} \\ M_{ad} = \frac{k_{ad}g_{ad}}{\Sigma kg} C_{ab} = f_3 C_{ab} \\ M_{ae} = \frac{k_{ae}g'_{ae}}{\Sigma kg} C_{ab} = f_4' C_{ab} \\ M_{af} = \frac{k_{af}g'_{af}}{\Sigma kg} C_{ab} = f_5' C_{ab} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{ba} = \frac{k_{ab}j_{ab}}{\Sigma kg} C_{ab} + C_{ba} = \mu_1 C_{ab} + C_{ba} \\ M_{ca} = \frac{k_{ac}j_{ac}}{\Sigma kg} C_{ab} = \mu_2 C_{ab} \\ M_{da} = \frac{k_{ad}j_{ad}}{\Sigma kg} C_{ab} = \mu_3 C_{ab} \\ M_{ea} = \frac{k_{ae}j_{ae}}{\Sigma kg} C_{ab} = \mu_4 C_{ab} \\ M_{fa} = \frac{k_{af}j_{af}}{\Sigma kg} C_{ab} = \mu_5 C_{ab} \end{array} \right.$$

以上の2組の式中 $f_1, f_2, f_3, f'_4, f'_5$ がモーメント分配率, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ が分配到達率と称せられ, a 部材の a 節点の固定モーメント C_{ab} が各部材の a 端に分配され, また他の固定端 b, c, d, e, f に到達分配される。一様断面のときは, $g=g'=4, j=2, C_{ab}=C_{ba}=wl^2/12, k=EI/l=EK, f=f'=K/\Sigma K, \mu=K/2\Sigma k, r=\mu/f=1/2$ となる。

3. 門型剛節構への適用例

(1) Mohr の角変化と変位の法則による場合

(図-3)

この場合は各部材における曲げモーメントの式に対して前掲 (1 a), (2 a)式を適用すればよく、結果は、

$$H = \frac{Ph\left(\beta_{1G} - \frac{t}{l}\beta_{1B}\right)}{\beta_{2A} - h\beta_{1A} - h^2\alpha_{1B} - (h\alpha_{2C} - \beta_{2C})} \dots \dots \dots (4)$$

(2) Castigliano の最小働く原理による場合

(図-3)

この場合は(3)式を各部材の曲げモーメントの式に適用すればよく結果は、

$$H = - \frac{Ph\left(\beta_{1G} - \frac{t}{l}\beta_{1B}\right)}{\gamma_{1A} + h^2\alpha_{1B} + h^2\alpha_{1C} - 2h\beta_{1C} + \gamma_{1C}} \quad \dots \quad (5)$$

(3) Wilson 教授の形式の場合 (図-3)

この場合は前掲 (1 b), (2 b), (1 c), (2 c) 式を各部材に記号を合わせて適用すればよく、

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} &= EI_A \left(\frac{h^2}{h \beta_{1A} - \beta_{2A}} \theta_B - \frac{h}{h \beta_{1A} - \beta_{2A}} d \right) \dots \dots \dots (1) \\ M_{BC} &= \frac{EI_B}{A_0} \{ (l \beta_{1B} - \beta_{2B}) \theta_B + \beta_{2B} \theta_C \} - C_{BC} \dots \dots \dots (2) \\ M_{CB} &= \frac{EI_B}{A_0} \{ \beta_{2B} \theta_B - (l \alpha_{2B} - \beta_{2B}) \theta_C \} - C_{CB} \dots \dots \dots (3) \\ M_{CD} &= EI_C \left(\frac{h^2}{\beta_{2C} - h \alpha_{2C}} \theta_C - \frac{h}{\beta_{2C} - h \alpha_{2C}} d \right) \dots \dots \dots (4) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

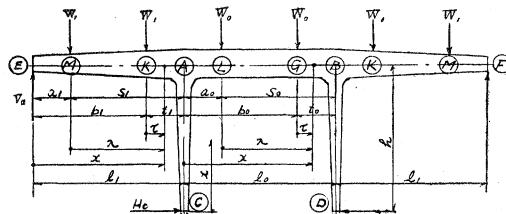
これ等の式中未知数は θ_B , θ_C , d にして, $M_{BA}=M_{BC}$, $M_{BC}=M_{CB}$, $M_{CB}=M_{CD}$ の 3 条件式より求めることができる。

4. 三径間剛節構への適用例

(1) Mohr の角変化と変位の法則による場合 (図-4)

$$H_C = \frac{EB - AD}{E^2 - AC} \quad \dots \dots \dots \quad (7) \qquad V_E = \frac{D - HC}{E} \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

図-4 三径間剛節構の 1 例



$$\begin{aligned}
 & \text{梁厚比 } C = A_e : E : M : K : A_s : L : G = 1/2 : 2 : 25 : 35 : 4 : 4 : 4 \\
 & \text{断面係数 } I_c = \frac{A}{4} \cdot \frac{I_g}{4} = \frac{I_g}{16}, I_x = I_{AK} : I_L : I_g = 1 : 8 : 8 ; 15.625 : 42.875 : 64 : 64 : 64 \\
 & \frac{I_g}{4} = \frac{A}{E} = 2, \frac{A}{M} = 1.600, \frac{A}{L} = 11428.5, \frac{I_g}{L^2} = 8, \frac{I_g}{I_c} = 15.625, \frac{I_g}{T_c} = 42.875 \\
 & \frac{I_g}{L} = 64, I_c = 2038.5^{cm^4}, I_{AK} = 16/221, I_E = 16/221, I_{g1} = 16/381 \\
 & I_{AK} = 86.734, I_E = 129.78^{cm^4}, l_1 = l_2 = h = 16 \text{ cm}, w_1 = 6 \text{ cm}, w_2 = 8 \text{ cm} \\
 & a = a_0 - \frac{t_1}{2}, b = b_0 - \frac{t_2}{2}, S = s_0 - \frac{3}{2}l_1, t = t_0 - \frac{1}{2}l_1, \text{ 材料屈服度 } 15\%
 \end{aligned}$$

ただし、

$$A = \frac{1}{2} l_1^2 \alpha_{1A} + l_1 \beta_{1E} - \beta_{2E}$$

$$B = W_1 \left\{ \frac{l_1}{2} (S_1 + t_1) \alpha_{1A} + l_1 (\beta_{1M} + \beta_{1K}) - (\beta_{2M} + \beta_{2K}) \right\} - \frac{W_0}{2} l_1 \{ (t_0 + S_0) \beta_{1A} / l_0 - (\beta_{1L} + \beta_{1G}) \}$$

$$C = \frac{1}{2} h^2 \alpha_{1A} + h \beta_{1C} - \beta_{2C}$$

$$D = \frac{1}{2} W_1 h (S_1 + t_1) \alpha_{1A} - \frac{1}{2} W_0 h \{ (t_0 + S_0) \beta_{1A} / l_0 - (\beta_{1L} + \beta_{1G}) \}$$

$$E = \frac{1}{2} h l_1 \alpha_{1A}$$

あるいはこれ等 A, B, C, D, E の式を (7) 式に代入すれば、

$$H_C = - \frac{W_1 \left\{ \frac{1}{2} h l_1^2 \alpha_{1A} (r_{1M} + r_{1K} - r_{1E}) \right\} - W_0 \left\{ \frac{1}{2} h r_{1E} (\beta_{1L} + \beta_{1G} - \beta_{1A}) \right\}}{\frac{1}{2} \alpha_{1A} (l_1^2 r_{1C} + h^2 r_{1E}) + r_{1C} r_{1E}} \quad (7a)$$

(2) Castigliano の最小働く原理の場合 (図-4)

$$\left\{ \begin{array}{l} V_E = - \frac{BC + DE}{A} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_C = \frac{h}{C} \left[\{ V_E l_1 - W_1 (S_1 + t_1) \} \alpha_{1A} + W_0 \{ \beta_{1A} - (\beta_{1L} + \beta_{1G}) \} \right] \end{array} \right. \quad (11)$$

ただし、

$$A = (2 r_{1E} + l_1^2 \alpha_{1A}) (2 r_{1C} + h^2 \alpha_{1A}) - (h l_1 \alpha_{1A})^2 \quad (1)$$

$$B = -2 W_1 \left\{ a \beta_{1M} + r_{1M} + b \beta_{1K} + r_{1K} + \frac{1}{2} l_1 \alpha_{1A} (S_1 + t_1) \right\} + W_0 l_1 \{ \beta_{1A} - (\beta_{1L} + \beta_{1G}) \} \quad (2)$$

$$C = 2 r_{1C} + h^2 \alpha_{1A} \quad (3) \quad (12)$$

$$D = h \left[W_1 \alpha_{1A} (S_1 + t_1) - W_0 \{ \beta_{1A} - (\beta_{1L} + \beta_{1G}) \} \right] \quad (4) \quad (12)$$

$$E = h l_1 \alpha_{1A} \quad (5) \quad (12)$$

5. α , β , r , δ 及び ϵ_1 の数値図表

前掲の諸式中の α , β , r , δ および ϵ_1 の値は考えられたるハリの両端のハリ厚の比 $[B/A]$, および I の比 $[I_B/I_A]$ またはハリの途中の I の変化を与うことによりあらかじめ図表化しておきハリや剛節構の計算をなす場合に採用すべき性格のものであるから、その図表作製方法の1例を述べる。

(1) I の変化を e^{mx} とする場合

この場合はハリ両端のハリ厚の比 $[B/A]=2$ とし両端の I の比はハリ厚の比の3乗に比例するものとすれば $[I_B/I_A]=8=e^{2 \cdot 0.07944}=e^{mI} \Rightarrow 2.07944=ml \Rightarrow 1/m=0.48090l$ 従つて途中の変化を e^{mx} として積分すれば、次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \int_0^l \frac{1}{e^{mx}} dx = -\frac{1}{m} \left(e^{-ml} - 1 \right) = \frac{1}{m} \left(1 - \frac{1}{e^{ml}} \right) = 0.48090l \left(1 - \frac{1}{8} \right) = 0.42076l \\ \alpha_2 = \frac{1}{m} (l - \alpha_1) = 0.48090l(l - 0.42076l) = 0.278555l^2 \\ \alpha_3 = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} l^2 - \alpha_2 \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} l^2 - 0.278555l^2 \right) = 0.106488l^3 \\ \alpha_4 = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{6} l^3 - \alpha_3 \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{6} l^3 - 0.106488l^3 \right) = 0.028933l^4 \\ \alpha_5 = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{24} l^4 - \alpha_4 \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{24} l^4 - 0.028933l^4 \right) = 0.006124l^5 \end{array} \right.$$

また積分の公式より

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = l \alpha_1 - \alpha_2 = 0.420760l^2 - 0.278555l^2 = 0.142205l^2 \\ \beta_2 = l \alpha_2 - 2 \alpha_3 = 0.278555l^3 - 2 \times 0.106488l^3 = 0.065579l^3 \\ (r_1 = l^2 \alpha_1 - 2l \alpha_2 + 2 \alpha_3 = (0.420760 - 2 \times 0.278555 + 2 \times 0.106488)l^3 = 0.076626l^3) \\ (r_2 = l^2 \alpha_2 - 4l \alpha_3 + 6 \alpha_4 = (0.278555 - 4 \times 0.106488 + 6 \times 0.028933)l^4 = 0.026201l^4) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \delta_1 = l \gamma_1 - r_2 = (0.076626 - 0.026201)l^4 = 0.050425l^4 \\ \delta_2 = l^3 \alpha_2 - 6l^2 \alpha_3 + 18l \alpha_4 - 24 \alpha_5 = (0.278555 - 6 \times 0.106488 + 18 \times 0.028933 - 24 \times 0.006124)l^5 = 0.013453l^5 \\ \epsilon_1 = l \delta_1 - \delta_2 = (0.050425 - 0.013453)l^5 = 0.036972l^5 \end{array} \right.$$

この $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ は表-1 にあり、また本表の値を図示して曲線を描き半ばの $[B/A]$ に対する値を求めるために図-5 がある。

(2) I の変化を $e^{m'x}$ とする場合

この場合は両端 I はハリ厚の 2 乗に比例するものとし $[I_B/I_A] = 2^2 = 4 = e^{1.38629} = e^{m'l} \therefore 1.38629 = m'l$

$\therefore 1/m' = 1/1.38629$ として (1) の e^{mx} の場合の公式より計算し、その結果は表-1 および 図-6 にある。

(3) I の変化を $(1 \pm cx)^3$ および $(1 \pm c'x)^2$ とする場合

この両者の場合の結果は表-1 および 図-7, 8 にある。

図-5 $I_x = I_A e^{mx}$ の場合の

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ 曲線

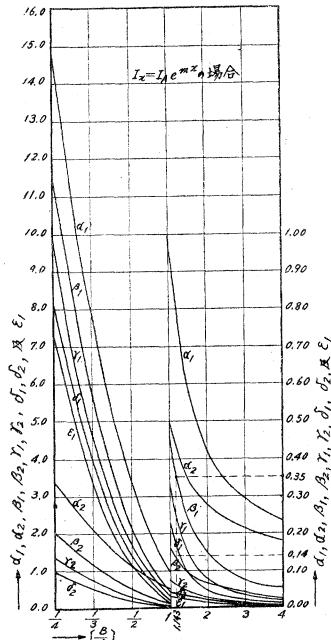
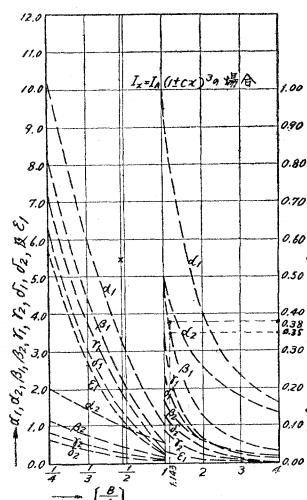


図-7 $I_x = I_A (1 \pm cx)^3$ の場合
の $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ 曲線



6. A_0, C_{AB}, C_{BA} 其他図表

Wilson 教授のタフミ角式の形式の式中の A_0 ならびに荷重項 C_{AB} , C_{BA} および H. Cross 教授のモーメント分配法中の θ_{AB} の係数, θ_{BA} の係数は表-1 に概算数値がある。またこの C_{AB} , C_{BA} を図示したものは図-10 である。

図-6 $I_x = I_A e^{m'x}$ の場合の
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ 曲線

7. 応用例

前掲 (4), (5), (6) 式中の α, β, γ 等に表-1 の値を代入してえられた結果は図-11 にある。

また (10), (11) 式に表-1 を代入した結果は図-12 にある。

ただ左右対称の門形構の鉛直部材の両端のハリ厚の比が 1 ~ 3 の場合の変断面の場合の曲げモーメントと一様断面の場合の曲げモーメントとを比較した結果は表-2 および図-13 にあり、15~85% の相異があり安全の点において軽々に付し難いことがわかる。

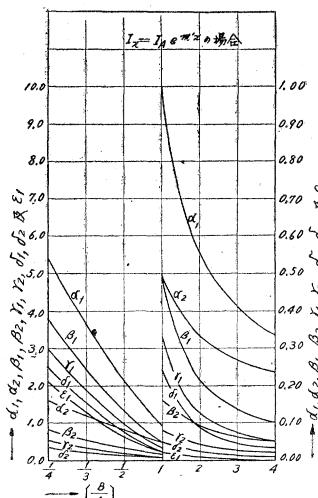


図-8 $I_x = I_A (1 \pm c'x)^2$ の場合
の $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ 曲線

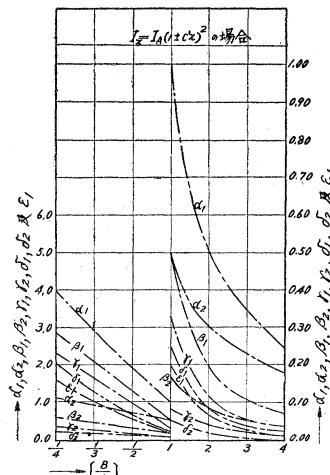


図-9 種々なる I_x に対する
 A_0 曲線

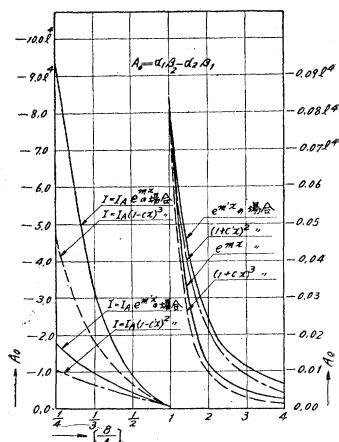


表 - 1

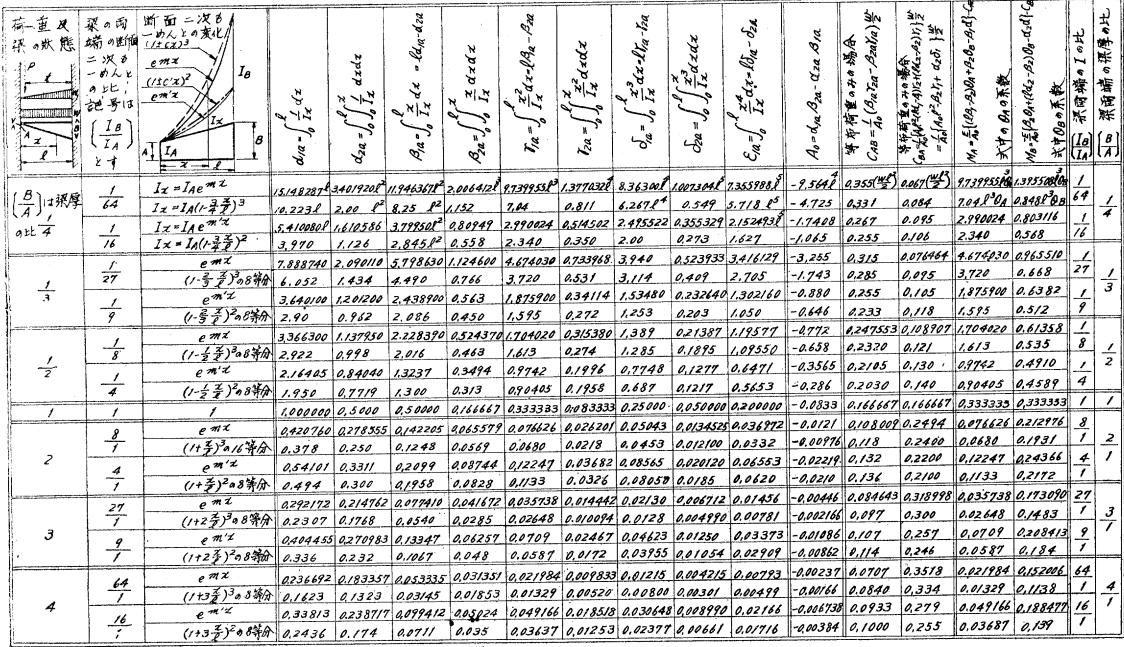


図-10 種々なる I に対する荷重項比較図
(等分布荷重の場合)

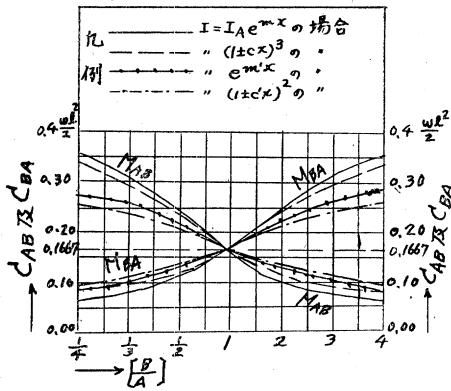


図-11 門型構曲げモーメント図

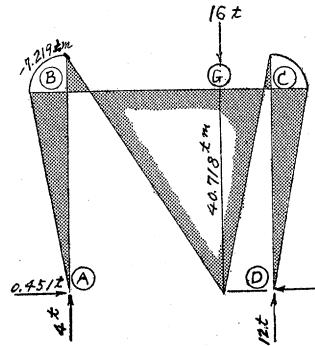


図-12 三径間剛節構曲げモーメント図

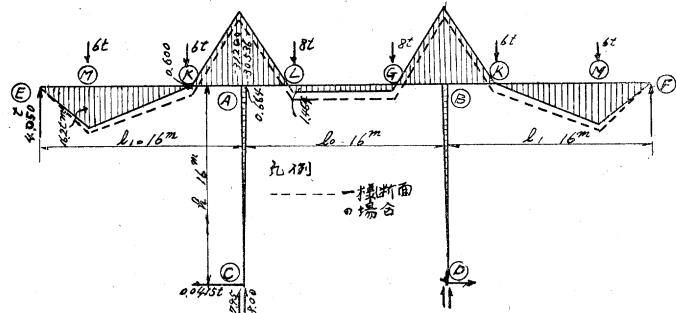
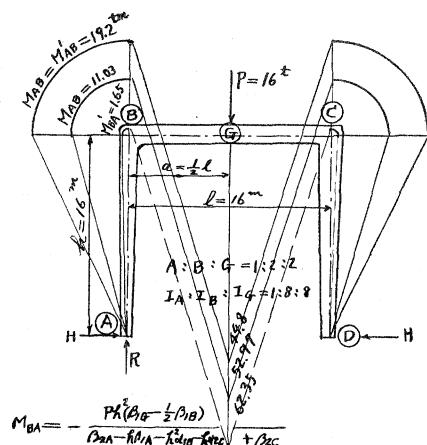


図-13 左右対称構の1例

表-2 門構における $[B/A]$ と M_{BA} および M_G との関係例

	梁両端の比 $[B/A]$	1	1.5	2.0	2.5	3.0
同断面二次も一めんとの比 (I_B/I_A)	1	3.375	8	15.625	27.0	
隅角部	一様断面の場合 M'_{BA}	19.2 tm	14.2 tm	5.05 tm	2.70 tm	1.65 tm
	変断面の場合 M_{BA}	19.2	15.56	14.37	12.54	11.03
	比 M'_{BA}/M_{BA}	100%	85.7%	35.1%	21.5%	15.3%
水平ハリの中央部	一様断面の場合 M'_G	44.8 tm	49.8 tm	58.97 tm	61.3 tm	62.35 tm
	変断面の場合 M_G	44.8	47.44	49.62	51.46	52.97
	比 M'_G/M_G	100%	105%	119%	119%	119%

8. 公式集

本文の性質上ごく普通の場合の公式を列挙すれば図-14, 15, 16である。これらの公式は各部材一様断面の場合は Wilson 式と一致することが検定済みのものである。

また、本文は変断面の場合から立論してあるから、種々の荷重状態に対する曲げモーメントが必要である。単純ハリとしての曲げモーメントを図-17にかかげる。

9. 結論

以上述べた事は要旨ならびに概説の節の要項により Beam Theory に副座標を用いた例であるが、副座標を用うれば Theory の解説がほとんど最簡の形で説明されかつ数値計算も十分なる簡単さで、しかも平易迅速にできることがわかつた。なお、本文によつて解説された諸点を要約すれば次のようであろう。

(1) Beam Theory

の系統別とその優劣

本文に述べられている Beam Theory は Mohr 系の角変化と変位との法則にもとづく Theory と Castigiano の最小値の原理に基く Theory との二つに大別でき Wilson 教授のタワミ角法と H. Cross 教授のモーメント分配法はいずれも Mohr 系の式であることが明らかである。しかしてその明快適確な点においては最小値の原理を第一とし、次に角変化と変位の法則にして、タワミ角法と、モーメント分配法とははるかにそれに次ぐかのようである。なんとならば前二者は直接未知数が求められるのに比し後二者は、いずれも未知数を以て条件式を立て他の未知数を求め、改めて

図-14 門型構(その1)

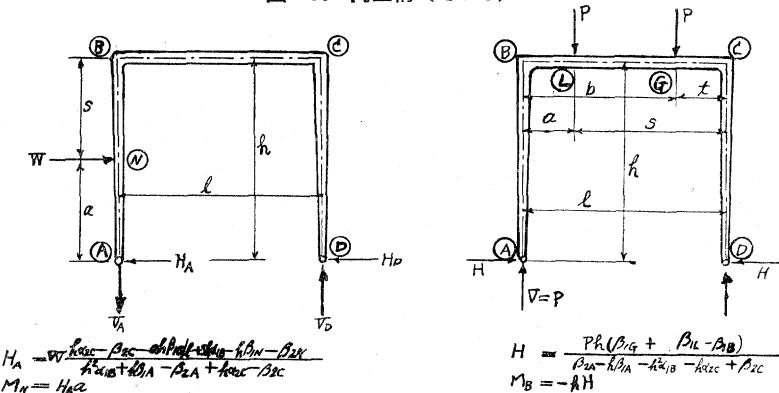


図-15 門型構(その2)

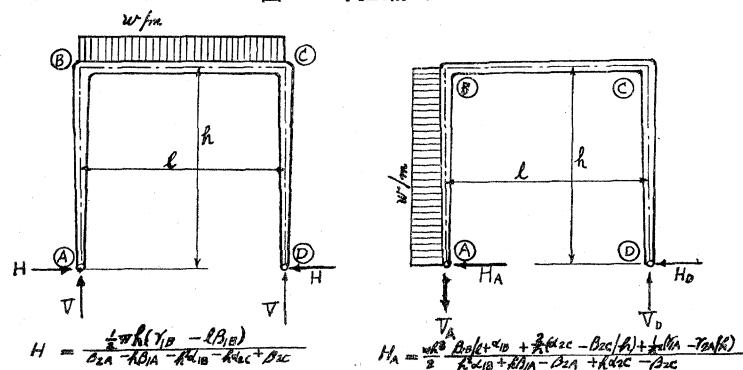
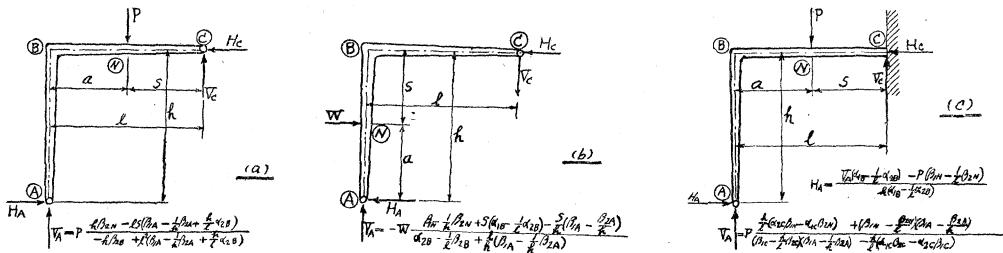


図-16



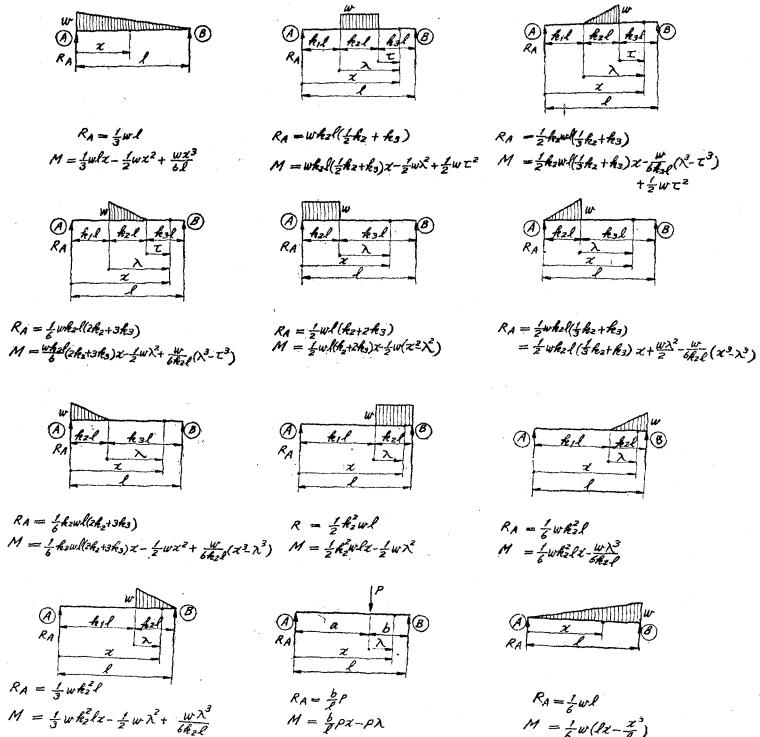
前の未知数を求めるといふ風に理論上ややもすれば了解しにくいくらいがあるからであり、またその数値計算があまりに冗長であるからである。なお前二者においても最小値の原理は構造物の最初のハリの左端と最終のハリの右端とに変位を零であるように立式を工夫すれば、途中のハリの変位はおのずから消去された形となる利点があり、変位の代りに角を考えても同様な利点があるに比し、Mohrの角変化と変位との法則には其利点が少しく薄く、その故にも最小値の原理はもつとも優れていると言えよう。しかし、一方実験によって変位や角変化を測定し、計算と照合しようとするような特殊の用途にはそのままにしては不向きである。

(2) ハリ端の断面二次モーメントの仮定の重要性

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ の数値計算例において見る通り、ハリの断面二次モーメントの仮定の相違に従つて、それ等の値にもほぼ、その相違に相当する程度の相違があり、またその α, β, \dots を使用して求めた剛構の応力においてもほぼその相違に相当する相違が現われることがわかつたが、ハリの左端の断面二次モーメントは、 $\alpha, \beta, \gamma \dots$ の大きさに影響があるのみならず、直接その値が計算式に現われるから、その仮定の仕方は直ちに結果に現われ、 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ の値と共に結果に及ぼす影響は重大である。しかして既に代数式が明示されたのであるから、その影響は計算と実験と照合することも可能であり、真に実験の価値があがる。このハリ端の I の値やまたその影響については、かねてハリ端の θ_A が M_{AB} に比例するという仮定のもとに一様断面の Wilson 式に応ずるよう相当詳細³⁾に述べられたものもあるが、基本的に変断面から立論していないから、その理論上の価値を実験により判断することは、むづかしいと考えられる。このように真に仮定すべきものの本体を発見するには代数式、数値計算、実験という順序道程が明快適確、平易、迅速でなければならぬ。

このように真に仮定すべきものの本体を発見するのがきわめてさせまつた要務ではないかと考えられる。しかして、それがためには計算を容易にするための考案が必要であり、本文に述べた副座標を用いる例の如きはその第一歩を踏み出したもののように考えられる、何んとならば、図-1の場合では曲げモーメントは $\textcircled{A}\textcircled{N}$ 区間では長さの変数の一次、 $\textcircled{N}\textcircled{K}$ 区間においては二次、 $\textcircled{K}\textcircled{B}$ 区間においては三次であり、従つてその積分は、三次、四次、五次ともなり、单一座標において、かくも次数の異なる変数を用うることは到底現実の曲線と一致しないよ

図-17 単純ハリとしての曲げモーメント式



うに考えられるからである。ただ、いたずらに連立方程式を解くの労を惜まざる場合は論外で、それは実用上の価値がないことになる。

本文に述べた程度ならば旧制工業学校程度の基礎知識を有し、一、二年構造設計に従事した実務家ならば安易迅速に使いこなせると思う。

(3) 数値図表の精度

本文添付数値図表は、必ずしも必要度の全部をおさめているわけでもなく、またきわめて精度の高いものではないが、図表の性質の大略を知るため、また実用上の利用度にはさしつかえない程度である。しかし、なお広範にわたつて利用度を高めるには別途作製さるべきである。その場合にも、本文の基本的代数式はそのまま利用できる。

なお本文を書き上げるに至るまでの田中豊先生の永年の御指導、福田武雄先生の特別の御指導については、ここに深厚なる感謝の意を表する。

参考文献

- (1) Wilson, W.M.: Analysis of statically indeterminate structures by the slope deflection method.
Illinois Bulletin No. 8 1918.
- (2) H. Cross and N. D. Morgan: Analysis of continuous frames by distributing fixed end moments.
Proc. ASCE., May 1930 and Trans. ASCE., Vol. 96, 1932.
- (3) 山崎徳也: 不完全剛結ラーメンの解法に応用したる撓角分配法 土木学会誌第36卷第9号
(昭. 30. 11. 9)