

# 単一核都市内通勤トリップのボトルネックへの到着分布の推定

## ESTIMATING THE CUMULATIVE ARRIVAL CURVES OF COMMUTE TRIPS AT BOTTLENECKS IN A SINGLE CORE CITY

桑原雅夫\*・松本嘉司\*\*・島崎敏一\*\*\*・家田 仁\*\*\*\*

By Masao KUWAHARA, Yoshiji MATSUMOTO, Toshikazu SHIMAZAKI and Hitoshi IEDA

Many highway problems arise from bottleneck congestion. Regarding highway commute traffic, this analysis proposes a model which estimates the cumulative arrival curves at bottlenecks around a single core during the morning peak, given commuters' home locations and work schedules. It is necessary, therefore, to identify when and which bottleneck each commuter passes. Each commuter is assumed to have a common form of travel cost function which consists of a static cost of free flow travel time and a time-dependent cost due to bottleneck congestion. Commute trips are assigned spatially and temporally, so as to establish an equilibrium. The model is applied to the Metropolitan Expressway Network, and the estimated cumulative arrival curves reasonably fit the observed.

*Keywords*: traffic assignment, bottleneck, time dependent assignment, commute trip

### 1. 序 論

道路交通における問題、たとえば騒音、排気ガス等の環境問題、渋滞によるトラベルタイムの浪費等の多くは、ネットワーク上に存在するボトルネックでの交通混雑に起因している。AASHTO<sup>(1)</sup>は、交通量/容量比が0.3の場合において、渋滞時と渋滞のないときのトリップ費用(ランニングコスト+時間費用)を試算しているが、それぞれ145(=85+60)\$/10<sup>3</sup> veh-mileと800(=200+600)\$/10<sup>3</sup> veh-mileとしている。渋滞によってトリップ費用が急激に増加していくことがうかがえる。特に時間費用の増加が著しい。これらの問題を解決するためには、まずピーク時のボトルネックにおける交通変動を正格に把握しなければならない。ところが現在はピーク時間帯のリンク交通量は、静的な配分計算による日交通量のある一定の割合を、ピーク時間帯に均一に割り当てることによって求められている。明らかにこれは時間変動

の激しいピーク交通量パターンとは異なり、問題を残している。そこで本研究は、交通変動の主役である通勤道路交通を対象とし、通勤トリップの起点(住居)と勤務開始時刻をインプットとして、ネットワーク上の複数のボトルネックの交通量の時間変動を推定する方法を提案する。すなわち、各ボトルネックへのトリップの累積到着分布がアウトプットである。

ボトルネックでの待ち行列に着目した既往の研究としては、単一ボトルネックでの待ち行列の時間的変化を分析したものとしてVickrey<sup>(4)</sup>、Hendrickson, et al.<sup>(5)</sup>、Hurdle<sup>(6)</sup>等がある。これらはトリップの勤務開始時刻あるいは勤務終了時刻がわかっている場合に朝、夕のピーク時の通勤トリップのボトルネックへの到着時刻を決定し、単一ボトルネックでのトリップの累積到着分布を求めている。各トリップに要する費用を待ち行列内での待ち時間と勤務地での待機時間(勤務開始時刻と勤務地に実際に到着した時刻との差)とによる費用の合計とし、各トリップのボトルネックへの到着時刻を各トリップの費用を最小にするように決定している。

本研究は、これらの単一ボトルネックへの到着時刻選択理論を出発点とし、複数のボトルネックの存在するネットワークでのボトルネック選択にまで発展させたものとして位置づけられる。したがって、本研究の目的は

\* 正会員 Ph.D. 東京大学講師 工学部土木工学科  
(〒113 文京区本郷 7-3-1)

\*\* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科(同上)

\*\*\* 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科  
(同上)

\*\*\*\* 正会員 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科  
(同上)

各トリップがいつ、どのボトルネックに流入するのかという2つの時間的、空間的選択を決定することである。

本研究の構成は、まず2.にて、時間的均衡条件と空間的均衡条件を導き、3.にて、この2つの均衡条件を組み合わせる朝のピーク時間帯の分析を進める。最後に、4.で、この理論を首都高速道路へ適用した例を示す。

2. 理論の展開

本章では、まず対象とするネットワークを説明し、次にダイヤモンドスペースを三次元空間に定義し、さらに各トリップの費やす総費用関数を定義する。

(1) ネットワーク

Fig.1は本研究で対象としている単一核都市ネットワークの概略図である。単一核都市には、住居地域が中心部の勤務地を取り囲むように分布している。勤務地は、都心に集中しているので、O-DパターンはMany-to-Oneである。この場合のネットワークは2つの種類の道路で構成されている：1つは多くの密に配置されている一般街路、そしてもう1つは、都市中心部へ放射状に連絡する放射状道路である。一般街路の機能は、トリップを住居から放射状道路にアクセスさせることであり、また放射状道路の機能は、アクセスしたトリップを都市中心部まで運ぶことである。放射状道路はツリー状になっているが、各ツリーは他のツリーと連絡していることもある。本研究では、ボトルネックは各ツリーの中で最も太い幹に存在するものとし、各トリップは1回だけボトルネックを通過するものと仮定する。

(2) ディモンドスペース

各通勤トリップの起点(住居地)、二次元ベクトル  $X=(x_1, x_2)$  と、勤務開始時刻  $t_w$  が与えられているとする。これらの情報は、Fig.2のように三次元空間  $\Omega$  上にプロットすることができる。空間  $\Omega$  は、都市の境界と通勤時間帯によって囲まれている。三次元空間にプロットされたすべての点は、おおむね連続的に  $\Omega$  上に分布していると仮定し、 $\Omega$  上のすべての点  $(X, t)$  において、この点の密度  $\rho(X, t)$  が定義できるものとする。

(3) 待ち行列システム

各ボトルネック  $j, 1 \leq j \leq J$  において、以下の関数を

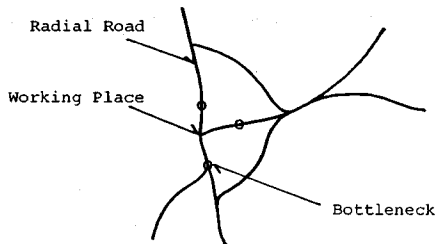


Fig.1 Network Illustration.

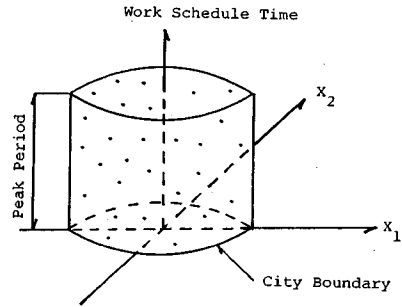


Fig.2 Three-Dimensional Demand Space.

定義する。

$A_j(t)$ =ボトルネック  $j$  に時刻  $t$  までに流入した累積トリップ数

$D_j(t)$ =ボトルネック  $j$  を時刻  $t$  までに流出した累積トリップ数

$W_j(t)$ =ボトルネック  $j$  に流入したトリップで、勤務開始時刻が  $t$  以前の累積トリップ数

$J$

$$\sum_{j=1}^J W_j(t) = W(t) = \text{既知}$$

$j=1$

本研究では各ボトルネックに発生する待ち行列を点で表現する。別の表現をすれば、待ち行列は一般にわれわれが目にするように平面的に表わされるのではなく、ボトルネック地点上で鉛直方向に形成されるとみなしている。この概念では、先にボトルネックに到着したトリップから先にボトルネックより流出することになり、このようなサービスシステムをFIFO (FIRST IN FIRST OUT) とよぶ。実際の現象でも、早く待ち行列に流入したトリップほど早く流出するという場合が多く、FIFOがおおむね満足されている。もしも現状のサービスシステムがFIFOならば、ここでいうように待ち行列を点として扱っても、あるいは待ち行列を現実のように平面的にある長さをもって扱っても、待ち行列内での待ち時間は、同じである。

(4) 総費用関数と時間的均衡条件

トリップの起点  $X$  と勤務開始時刻  $t$  をもつトリップは、以下のように表わされるすべてのトリップに共通な総費用関数を最小にするようにアクセスするボトルネック  $j$  とボトルネック流出時刻  $t_a$  を選択すると仮定する(ここではボトルネック流出時刻を変数に取っているが、サービスシステムがFIFOなので、ボトルネック到着時刻を変数にとっても同じように総費用関数を定義できる)。

$$TC_j^*(t_a | X, t_w) = f_1 |m_j(X)| + f_2 |q_j^*(t_a)| + f_3 |t_w - t_a| \dots \dots \dots (1)$$

ただし、 $m_j(X)$ =ボトルネック  $j$  を通過した場合の起点

$X$  から勤務地までの移動時間

$q_j^*(t_a) = t_a - A_j^{-1}\{D_j(t_a)\}$ : ボトルネック  $j$  を時刻  $t_a$  に流出したトリップの待ち行列内の待ち時間

$f_1(m) = m$  に関する単調増加な移動費用関数

$f_2(q) = q$  に関する単調増加な待ち費用関数:

$$df_2(q)/dq = f_2'(q) \geq 0, \quad q \geq 0 \dots\dots\dots (2)$$

$f_3(s) = s$  に関する凸な待機費用関数:

$$d^2 f_3(s)/ds^2 \geq 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$df_3(s)/ds = f_3'(s) \begin{cases} \geq 0, & s \geq 0 \\ < 0, & s < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

総費用関数は3つの項の線形和で表わされる。まず、ボトルネック  $j$  を利用した場合の住居を出てから勤務地に到着するまでに要する時間を移動時間  $m_j(X)$  と待ち行列内の待ち時間  $q_j^*(t_a)$  に分離する。移動時間は全く渋滞のない状態での起点から勤務地までの所要時間であり、起点の座標  $X$  の関数である。 $f_1(m)$  は所要時間  $m$  を費用に変換する関数である。既往の単一ボトルネックでの分析と比べると、この第1項が空間的なボトルネック選択のために必要となってくる。待ち時間  $q_j^*(t_a)$  はボトルネックのサービスシステムが FIFO なので、住居地  $X$  には無関係で、ボトルネックからの流出時刻  $t_a$  のみの関数として表わすことができる。 $f_2(q)$  は待ち時間  $q$  に対応する必要費用であり、 $q$  に関して単調増加な非負関数と仮定する。Fig. 3 はあるボトルネック  $j$  での  $A_j(t)$ ,  $D_j(t)$ ,  $W_j(t)$  の分布を描いたものであるが、待ち時間  $q_j^*(t_a)$  は時刻  $t_a$  における  $A_j(t)$  曲線と  $D_j(t)$  曲線との水平方向の長さである。

ここで用いているフローインディペンデントな移動時間の仮定は、高速道路等のように容量以下の場合に、 $Q-V$  曲線がフラットな交通施設であれば、ボトルネックへ流入以前の区間においてかなり妥当な仮定である。また一般街路を考えた場合であっても、あるトリップが都心への流入口のボトルネックで必ず渋滞に巻き込まれ、なんらかの待ち時間を費やさねばならない場合には、そのボトルネック流入以前での流量増加による遅れ時間は、本研究で扱っているボトルネックでの待ち時間として近似的に考慮されている(付録1)。

第3項の要素  $t_w - t_a$  は勤務地での待機時間を表わしている。実際には、ボトルネック流出時刻から、勤務地までなんらかの移動時間を要するわけであるが、トリップパターンを下記のように便宜的に変更することによって、 $t_w - t_a$  と表わされる。まず、各トリップは起点を出てから勤務地までの移動費用をすべて使い果たしてしまう。次に、勤務地から利用したボトルネックに即座に帰り、そこで待ち費用を使い、その後、再び、即座に、勤務地までジャンプし待機費用を消費する。以上のように、

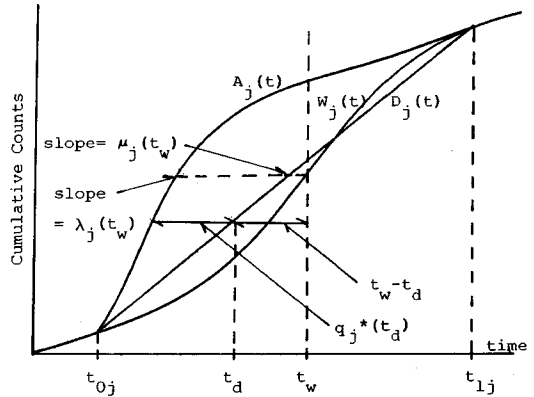


Fig. 3 Queue Evolution at a Bottleneck.

に、トリップパターンを変化させても各トリップの費用は変わらない。すなわち移動時間は時間的には変化せず、さらに OD パターンは Many-to-One であるので、あるボトルネックから勤務地までの移動時間は、そのボトルネックを利用したトリップについては、一定であるからである。

ボトルネック流出時刻は任意なので、Fig. 3 のようにもし  $t_a < t_w$  ならば待機時間は正となり、トリップは勤務開始時刻よりも早く勤務地に到着することになる。また  $t_a > t_w$  ならば、負の待機時間であり遅刻を意味する。

ところが、時間的均衡条件を考えた場合もし  $f_3(s)$  が凸ならば、

$$D_j(t_a) = W_j(t_w) \dots\dots\dots (5)$$

を満足するように、 $t_a$  を選択すべきことがわかっている<sup>7),8)</sup>。式(5)は、勤務時間が早い者ほど、早くボトルネックから流出すべきことを表わしている。この関係よりボトルネックから流出時刻  $t_a$  は、勤務開始時刻  $t_w$  の関数として、

$$t_a = t_a(t_w) = D_j^{-1}\{W_j(t_w)\} \dots\dots\dots (6)$$

のように表現できる。待ち行列内の待ち時間に関するサービスシステムが、FIFO であることと、式(5)より結局、勤務開始時刻の早いものほど、早くボトルネックに流入することから、このシステムを FIFW (FIRST IN FIRST WORK) とよぶ。この関係を使うと、総費用関数は次のように表わすことができる。

$$TC_j(X, t_w) = f_1\{m_j(X)\} + f_2\{q_j(t_w)\} + f_3\{s_j(t_w)\} \\ = f_1\{m_j(X)\} + p_j(t_w) \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{ただし、} TC_j(X, t_w) = TC_j^*(t_a(t_w) | X, t_w) \\ q_j(t_w) = q_j^*(t_a(t_w)), \quad s_j(t_w) = t_w - t_a(t_w) \\ p_j(t_w) = p_j(t_a(t_w), t_w) \\ = f_2\{q_j^*(t_a(t_w))\} + f_3\{t_w - t_a(t_w)\} \dots\dots\dots (8)$$

特に、 $q_j(t_w)$  と  $s_j(t_w)$  はボトルネック  $j$  の状態のみによるので、この両者に対応する費用をボトルネック費用と

して、 $p_j(t_w)$ のように表わす。この  $TC_j(X, t_w)$  を勤務開始時刻  $t_w$  によって、微分すると、

$$\frac{dp_j(t_w)}{dt_w} = \frac{\partial p_j(t_d(t_w), t_w)}{\partial t_w} + \frac{\partial p_j(t_d(t_w), t_w)}{\partial t_a} \frac{dt_d(t_w)}{dt_a} \dots\dots\dots (9)$$

ところが、各トリップは所要費用を最小にするように  $t_d(t_w)$  を決めてるので、

$$\frac{\partial p_j(t_d(t_w), t_w)}{\partial t_a} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

となり、式 (9) の第2項は、0となる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{dp_j(t_w)}{dt_w} &= \frac{\partial p_j(t_d(t_w), t_w)}{\partial t_w} = f'_1 \{t_w - t_d(t_w)\} \\ &= f'_1 \{s_j(t_w)\} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。直感的には、 $dp_j(t_w)/dt_w$  は、すべてのボトルネック費用と、待機費用の関数として表わされると思われるが、ここでは、そのボトルネック  $j$  の待機時間  $s_j(t_w)$  のみの関数として表わせられることに注目すべきである。これを時間的均衡条件とよぶ。簡略化のため以下  $t_w$  を  $t$  として表わす。式 (11) より、勤務開始時刻  $t$  に対応する待機時間  $s_j(t) = t - D_j^{-1}(W_j(t))$  がわかれば、ボトルネック費用  $p_j(t)$  も、さらに待ち時間  $q_j(t)$  も計算できる、

$$p_j(t) = \int_{t_{0j}}^t f'_1 \{s_j(x)\} dx = f_2 \{q_j(t)\} + f_3 \{s_j(t)\} \dots\dots\dots (12)$$

$$q_j(t) = f_2^{-1} \left[ \int_{t_{0j}}^t f'_1 \{s_j(x)\} dx - f_3 \{s_j(t)\} \right] \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 $t_{0j}$  = ボトルネック  $j$  での待ち行列開始時刻。そしてボトルネック  $j$  に勤務開始時刻  $t$  をもつトリップが流入するレート  $\lambda_j(t)$  は、以下の累積分布関数の基本的性質

$$dq_j(t) = \frac{dW_j(t)}{\mu_j(t)} - \frac{dW_j(t)}{\lambda_j(t)}, \quad ds_j(t) = dt - \frac{dW_j(t)}{\mu_j(t)}$$

ただし、 $\mu_j(t)$  = ボトルネック  $j$  の勤務開始時刻  $t$  に対応するサービスレート (Fig. 3 参照)。

と、式 (11) より、

$$\lambda_j(t) = \mu_j(t) \left[ 1 - \frac{f'_1 \{s_j(t)\}}{f'_1 \{q_j(t)\}} \right]^{-1} \dots\dots\dots (14)$$

と表わせる。ところが、ボトルネックへの流入レートは常に正でなければならないので、

$$f'_1 \{q_j(t)\} > f'_1 \{s_j(t)\} \dots\dots\dots (15)$$

とならねばならない。これは、単位時間当たりの待ち費用の増加は、常に待機費用の増加よりも大きいことを表わしている。

(5) 空間的均衡条件

いま仮に、ある勤務開始時刻  $t$  について各ボトルネック費用  $p_j(t)$  がすべての  $j$  についてわかっているとす。この  $p_j(t)$  は勤務開始時刻  $t$  をもつトリップがボトルネック  $j$  を利用した場合に消費しなければならない

待ち費用と待機費用の合計である。さて、三次元空間に定義したダイヤモンドスペースを時刻  $t$  を横切る水平面で切ったときにできる平面  $\Omega(t)$  には、勤務開始時刻が  $t$  である点のみが存在しているので、 $p_j(t)$ ,  $j=1, \dots, J$  が既知であるならば、この表面上のすべての点について、トリップの総費用  $TC_j(X, t) = f_1 \{m_j(X)\} + p_j(t)$  は評価できる。したがって、表面  $\Omega(t)$  上の点について、どの点かどのボトルネックを利用するのかがわかり、各点を各ボトルネックに空間的に配分することができる。

$\Omega(t)$  上のいくつかの点は、総費用を最小にするボトルネックが唯一に決められる。そしてポイントセット  $d(\{j\}, t)$  を、 $\Omega(t)$  上でボトルネック  $j$  にユニークに配分される点の集合として定義する。Fig. 4 は、 $\Omega(t)$  をポイントセットに分割した例である。上下が対称な半円形の都市に細かな環状の一般街路と、3本の放射状道路が存在している (上下が対称なので、Fig. 4 は上半分を描いている)。ボトルネック 1, 2, 3 はこれらの放射状道路上に存在している。もしも、時刻  $t$  において、ボトルネック費用  $p_1(t)$  と  $p_2(t)$  がほとんど同じならば、 $\Omega(t)$  は Fig. 4(a) のように分割することができる。すなわち、斜線部の点はボトルネック 1 を利用することになる ( $d(\{1\}, t)$ )、そして上部の空白部はボトルネック 2 を利用する ( $d(\{2\}, t)$ )。

ところが、 $\Omega(t)$  上のある点については、利用すべきボトルネックが唯一に定まらないことがある。上記の例については、線分  $ab$  上の点がかこれにあたる。これらの点については、 $TC_1(X, t) = TC_2(X, t)$  となり、どちらのボトルネックを利用しても総費用は同じである。こうした点を境界点とよび、この例では境界点によって形成されるポイントセットを  $d(\{1, 2\}, t)$  というように書く。ここでは、境界点は線分を形成しているが、もしも  $f_1(m)$  が  $m$  について線形ならば、Fig. 4(b) のように境界点がある面積をもった領域を形成することもある。いま仮にボトルネック 1 から 2 までの移動費用が、 $p_1(t) - p_2(t)$  に等しかったとすると、Fig. 4(b) の斜線部の点は 2 つの選択がある。1 つは、放射状道路 1 にアクセスし、ボトルネック 1 に流入し勤務地に向かう (ルート 1)、もう 1 つは放射状道路 1 にアクセスし、ボトルネック 1 の直前の環状道路を利用して、放射状道路 2 に移り、ボトルネック 2 に流入し勤務地に向かう (ルート 2) という選択である (本研究では、待ち行列は点として扱っているので、このようなルートが存在する)。したがって、斜線部は、境界領域  $d(\{1, 2\}, t)$  を形成する。このように、境界点からなる領域は、異なったボトルネックへの最短ルートが共通の点 ( $a$  点) を通過する場合に起きる。

以上まとめると、ある勤務開始時刻  $t$  について、すべてのボトルネック費用、 $p_j(t)$ ,  $j=1, 2, \dots, J$  がわかっ

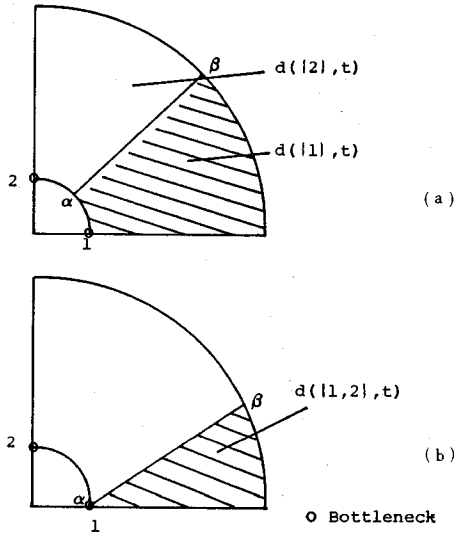


Fig. 4 Domain of Attractions.

ている場合には、 $\Omega(t)$ は利用すべきボトルネックについて、ポイントセットに分割されることがいえる。ある点はユニークに配分されるボトルネックをもつが、ある点（境界点）については費用最小となるボトルネックが唯一に決まらない。境界点で形成されるポイントセットを境界線または境界領域とし、一般にこれらのポイントセットの形状は、時間的にボトルネック費用とともに変化する。

ところが、場合によっては、まったくポイントセットの形状が、変わらないことがある。たとえば、Fig. 5のように、トリップの起点もネットワークもまったく対称に分布している都市では、常に斜線部の点はボトルネック1に分配されるため、ポイントセットの形状は、変化しない。またより一般的に、移動費用が、非常にボトルネック費用に比べ高価になった場合もポイントセット形状は、時間的に変化しないと考えられる。これらは、極端な例であるが、もしもポイントセットの形状があまり変化しないと考えられる場合は、われわれは、ボトルネック  $j$  の選択枝を省略し、到着時刻のみの選択問題として、時間的均衡条件のみにより、到着時刻を求めることができ、これらは先に述べた単一ボトルネックでの分析に相当する。

次に、以上述べてきたポイントセットを勤務開始時刻の累積分布と関連づけて、空間的均衡条件を求める。最初に、 $\Omega(t)$ が、境界領域を含まない場合について検討する。 $\Omega(t)$ 上にプロットされた点の密度  $\rho(X, t)$  を用いて、 $\Omega(t)$ 上の各ポイントセットのトリップの単位時間当たりの発生レート、 $N(d(|j|, t)dt)$ を求めることができる。

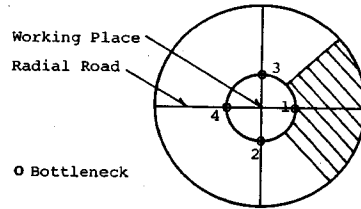


Fig. 5 A Symmetric Geometry.

$$N(d(|j|, t)dt) = \int_{d(|j|, t)} \rho(X, t) dX \dots\dots\dots(16)$$

ただし、 $|d(|j|, t)|$  は、 $d(|j|, t)$ の領域を示す。このダイヤモンドレート、 $N(d(|j|, t)dt)$ は、ボトルネック  $j$ に時刻  $t$ に分配されるものであり、さらにポイントセット  $d(|j|, t)$ は、ボトルネック費用  $p_j(t)$ の関数であるので、

$$\frac{dW_j(t)}{dt} = N(d(|j|, t)dt) = g_j(p_1(t), p_2(t), \dots, p_j(t); t) \dots\dots\dots(17)$$

とおける。この関数  $g_j(\cdot)$ は、ダイヤモンドスペースとネットワーク形状によって変わるので、明示的には表わせない。さらに式 (17) を変形することにより、

$$\frac{ds_j(t)}{dt} = 1 - \frac{1}{\mu_j(t)} \frac{dW_j(t)}{dt} = 1 - \frac{1}{\mu_j(t)} g_j(\cdot) \dots\dots\dots(18)$$

と表わせ、これを空間的均衡条件とよぶ。各ボトルネックの待機時間はすべてのボトルネックのボトルネック費用の関数として表わせられる。

以上は、境界領域が  $\Omega(t)$ 上に存在しない場合であったが、境界領域が存在している場合は、少々異なった微分方程式が得られる。本研究では複雑な記号を除くために、Fig. 4 を使って境界点が多くなった2つのボトルネック1と2に配分される場合を扱うが、一般化は困難ではない。前述のようにもし、移動費用関数  $f_j(m)$ が  $m$ について線形ならば、ルート1とルート2の移動費用の差は、 $\alpha$ 点を通るすべてのトリップについてそのトリップの起点  $X$ に無関係にある一定値  $c > 0$ をとる。したがって、ルート1とルート2の総費用が等しくなるためには、 $(p_1(t) > p_2(t))$ の場合)

$$p_1(t) - p_2(t) = c > 0 \dots\dots\dots(19)$$

が成立し、このとき、境界領域  $d(1|2, t)$ が存在する。境界領域内のダイヤモンドレート  $N(d(1|2, t)dt)$ は、ボトルネック1と2に式 (19)が成立するように配分されなくてはならない。なぜなら、各トリップは常に総費用を最小にするようにボトルネックを選択するからである。したがって、境界領域が存在するかぎり、式 (19)は、常に満足されねばならず、さらにボトルネック費用  $p_1(t)$ と  $p_2(t)$ は、トリップの起点が境界領域内にある

なしにかかわらず，すべてのトリップに共通であることより，境界領域は空間的均衡を支配しているといえる。

いま，この境界領域が  $t^- \leq t \leq t^+$  の間で存在していたとする。また時間的均衡条件は，境界領域のあるなしにかかわらず常に成立しなければならないため，式 (19) と時間的均衡条件 (式 (11)) より，

$$f'_1(s_1(t)) = f'_1(s_2(t)), \quad t^- \leq t \leq t^+ \dots\dots\dots (20)$$

が成立すべきである。さらに  $f_3(s)$  は  $s$  について凸なので，

$$s_1(t) = s_2(t), \quad t^- \leq t \leq t^+ \dots\dots\dots (21)$$

とならねばならない<sup>注1)</sup>。

時刻  $t^- \leq t \leq t^+$  での全体の既知であるダイヤモンドレートは次のように書き換えられる。もしも，両方のボトルネックがともに待ち行列をもっていたならば ( $q_j(t) > 0, j=1, 2$ )，

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &= \frac{dW_1(t)}{dt} + \frac{dW_2(t)}{dt} = \mu_1(t) - \mu_1(t) \frac{ds_1(t)}{dt} \\ &\quad + \mu_2(t) - \mu_2(t) \frac{ds_2(t)}{dt} \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

境界領域が存在する場合は，式 (21) より  $ds_1(t)/dt = ds_2(t)/dt$  なので，

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = \frac{ds_2(t)}{dt} = 1 - \frac{1}{\mu_1(t) + \mu_2(t)} \frac{dW(t)}{dt} \dots\dots\dots (23)$$

として表わすことができる。この式は，全体のダイヤモンドレートを  $\mu_1(t)$  と  $\mu_2(t)$  の割合で，2つのボトルネックに配分することを意味している。

これに対し，もしも，片方のボトルネックに待ち行列が存在していなかったら，明らかに，

$$s_1(t) = s_2(t) = 0 \dots\dots\dots (24)$$

とならなければならない。これは，勤務開始時刻の分布， $W_j(t)$  とボトルネック流出時刻分布， $D_j(t)$  が一致していることを意味している。そして， $p_1(t)$  と  $p_2(t)$  はこの間一定値をとり，変化しないことが時間的均衡条件よりわかる。ここで注意すべきことは， $q_2(t)$  (あるいは  $q_1(t)$ ) が 0 であるので，全体のダイヤモンドレートは  $\mu_1(t) + \mu_2(t)$  で表わされるトータルのサービスレートよりも小さくなくてはならないことである。

$$\frac{dW_2(t)}{dt} = \frac{dW(t)}{dt} - \frac{dW_1(t)}{dt} = \frac{dW(t)}{dt} - \mu_1(t) \leq \mu_2(t)$$

$$\therefore dW(t)/dt \leq \mu_1(t) + \mu_2(t) \dots\dots\dots (25)$$

式 (23) と (24) を境界領域が存在する場合の空間的均衡条件とよぶ。境界領域が存在する場合は，ボトルネック費用と待機時間に関する連立微分方程式を解く必要はない。

### 3. 均衡配分

これまで，時間的，空間的均衡条件を求めてきた。これを整理すると，まず境界領域が存在しない場合には， $q_j(t) > 0$  ならば，

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = f'_j(s_j(t)) \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{ds_j(t)}{dt} = 1 - \frac{1}{\mu_j(t)} g_j(p_1(t), p_2(t), \dots, p_j(t); t) \dots\dots (18)$$

$q_j(t) = 0$  ならば，明らかに  $p_j(t) = s_j(t) = 0$  である。上記2つの微分方程式より， $p_j(t)$  と  $s_j(t)$  の変化を時間的に求めることによって， $q_j(t)$  の変化も式 (13) より求められ，さらにボトルネック累積到着交通量 ( $A_j(t)$ ) も求められる。また境界領域が存在する場合には，式 (18) の代わりに式 (23) または式 (24) を用いばよい。

一般に，式 (11) と (18) からなる微分方程式は，解析的には解けないが，数値解析的に解くことができる。本来各ボトルネックに何時より待ち行列が発生するかは，わかってはいないが，仮に待ち行列の発生時刻を仮定し，数値計算を進めていくことができる。境界領域が存在しない場合を中心に，説明すると，待ち行列発生時刻  $t_{0j}$  の早いボトルネックから順番に，番号をふっていく，

$$t_{01} \leq t_{02} \leq t_{03} \leq \dots \leq t_{0J}$$

$t \leq t_{01}$  においては，どのボトルネックにも待ち行列は発生していないので，

$$p_j(t) = s_j(t) = 0, \quad j=1, 2, \dots, J$$

$t_{01} < t \leq t_{02}$  においては，ボトルネック 1 にのみ待ち行列が存在している。したがって，

$$p_j(t) = s_j(t) = 0, \quad j=2, 3, \dots, J$$

ところが，ボトルネック 1 については，

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = f'_1(s_1(t))$$

$$\frac{ds_1(t)}{dt} = 1 - \frac{1}{\mu_1(t)} g_1(p_1(t), 0, 0, \dots, 0; t)$$

となり，区間  $t_{01} < t \leq t_{02}$  について上記の微分方程式を解くことにより， $p_1(t)$  と  $s_1(t)$  を求めることができる。

次の区間， $t_{02} < t \leq t_{03}$  においては，同様に，

$$p_j(t) = s_j(t) = 0, \quad j=3, 4, \dots, J$$

ボトルネック 1, 2 については，

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = f'_i(s_i(t))$$

$$\frac{ds_i(t)}{dt} = 1 - \frac{1}{\mu_i(t)} g_i(p_1(t), p_2(t), \dots, 0; t), \quad i=1, 2$$

が成立し，区間の初期値  $p_i(t_{02}), s_1(t_{02}), p_2(t_{02}) = s_2(t_{02}) = 0$  がわかっているため，この区間において  $p_1(t), s_1(t), p_2(t), s_2(t)$  を数値解析的に解くことができる。以下同

注1)  $f_3(s)$  が  $s$  について線形ならば，式 (21) は満たす必要はないが，式 (21) を満たすように各トリップを配分して得られる解は，均衡配分の1つの解である。

様に、計算を進めることにより、全区間について、 $p_j(t)$ と $s_j(t)$ の値が計算されることになる。

ボトルネックの待ち行列発生時刻  $t_{0j}$  は先述したように、わかってはいないので、これらは水理学の不定流計算のように、末端での制約条件を満たすように求めなければならない。つまり、ピーク時間帯が終了した後のボトルネック費用と待機時間に計算結果が一致するように求めるわけである。一般にはピーク終了後は、 $p_j(t) = s_j(t) = 0$  であるから、 $s_j(t)$  が最終的に消滅した時刻を  $t_{1j}$  とすると、その時刻  $t_{1j}$  において、

$$p_j(t_{1j}) = s_j(t_{1j}) = 0$$

が、通常の制約条件となり得る。これは、 $A_j(t)$ 、 $D_j(t)$ 、 $W_j(t)$  分布曲線が、 $t_{1j}$  において1点で交わることである。

Fig. 6 は、前に用いた例のネットワーク形状で、トリップの起点が半円形の都市に均一に分布している場合の1つのパターンである。ここでは、ボトルネックのサービスレートを一定としている。Fig. 6(a) の破線は、 $f_3(s)$  を Fig. 7(a) の破線のような凸関数とした場合の図である。ボトルネック1より最初に待ち行列が時刻  $t_{01}$  に始まり、続いてボトルネック2より、待ち行列が開始される。各ボトルネックでは、時刻  $t_{2j}$  より早くボトルネックを流出したトリップは、勤務開始時刻より早く勤務地に到着し（正の待機時間）それ以後  $t_{1j}$  までに流出したトリップは勤務開始時刻以後に勤務地に到着している（負の待機時間）。待機時間が0となる時刻  $t_{0j}$ 、 $t_{2j}$ 、 $t_{1j}$

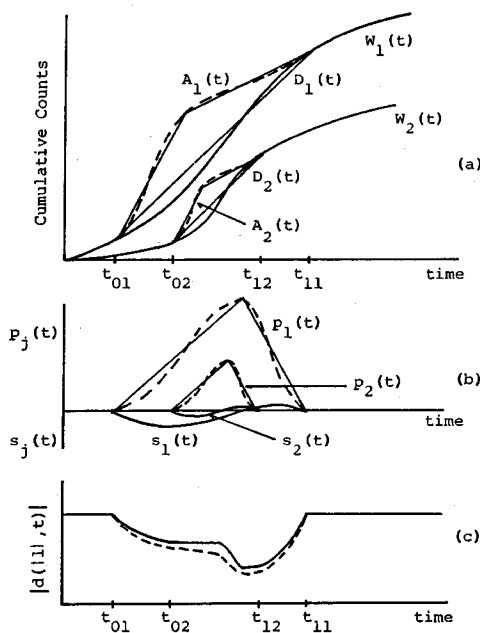


Fig. 6 Queue Evolution in Two-Bottleneck Geometry.

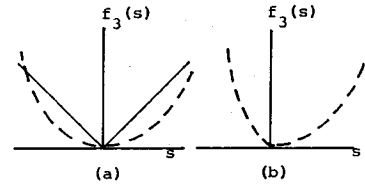


Fig. 7 Functional Forms of Schedule Delay Function ( $f_3(t)$ ).

では、 $f_3(0) = 0$  のため、式 (14) より  $\lambda_j(t) = \mu_j(t)$  となる。一方、Fig. 6(b) と (c) はおのこのボトルネック費用の変化と、ポイントセット  $d(\{l\}, t)$  の領域の変化を示したものである。ボトルネック1の混雑とともにボトルネック費用  $p_1(t)$  が上昇するので  $|d(\{l\}, t)|$  は減少していく。ボトルネック2にも待ち行列が現われると、この減少率は低下する。しだいにピークの終わりに近づくと、待機費用が正から負に転換するため、 $p_1(t)$  は減少していき、やがて  $|d(\{l\}, t)|$  も増加し、初期値まで回復するのである。Fig. 6 の実線は  $f_3(s)$  を Fig. 7(a) の実線に示すように、区間的に線形関数とした場合の図である。式 (11) より、 $dp_j(t)/dt$  は  $s_j(t)$  の値によらず一定値をとることがわかる。さらにもし  $f_3(q)$  も  $q$  に関して線形とすると、この図のようにボトルネック到着分布は、2つの直線で表わされる (式 (14))。また Fig. 6(c) のように、両方のボトルネックでともに、待ち時間が正、あるいは負の場合は、 $dp_j(t)/dt = dp_2(t)/dt$  であるので、 $|d(\{l\}, t)|$  は動かないことになる。

Fig. 8 は、1つのボトルネックのみを抜き出し、その到着分布が  $f_3(s)$  の形状によってどのように変化するかをみたものである。Fig. 8 の破線は、今までのように  $f_3(s)$  が Fig. 7(a) の破線で与えられた場合のパターンである。そして Fig. 8 の実線は、 $f_3(s)$  が Fig. 7(b) の

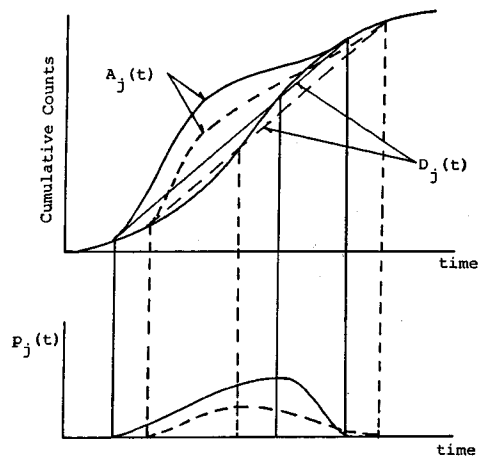


Fig. 8 Variation of Queue Evolutions due to the Schedule Delay Function.

ように  $s$  が負の場合の勾配がきつくなった場合の図である。これは勤務地に遅れて到着した場合のペナルティーが大きいことを意味している。そのため大部分のトリップは早めにボトルネックに流入し、勤務時間に遅れないようにするので、ボトルネックへの累積到着分布が、左にシフトするのである。

4. 首都高速道路への適用

本方法を、首都高速道路3号および4号線へ適用してみた。ネットワークを Fig. 9 に示す。各路線のボトルネックは、放射状道路3号および4号線と首都高環状線との交差点に存在し、3号、4号から環状線への流入口で、ボトルネック容量を3600台/時、2900台/時と仮定した。これらの容量値は環状線に流入する地点の渡り線での車両感知器のデータ（昭和57年11から12月）より推定した。対象とするトリップは、3号、あるいは4号線にアクセスし環状線に流入していく首都高速利用のトリップとする。ダイヤモンドスペースはその密度  $\rho(X, t)$  が次のようなプロダクトフォーム：

$$\rho(X, t) = dW(t)/dtp^*(X) \dots\dots\dots(26)$$

で表わされるものとした。この意味は、勤務開始時刻の分布が住居の位置とは独立であるという仮定である。3号および4号へアクセスするトリップ全体の勤務開始時刻の分布  $W(t)$  は、国民生活時間調査（昭和55年）を参考にして推計した。この際、近似的に首都高速環状線内の中心点にすべてのトリップの勤務地があると考えた。住居地の密度  $\rho^*(X)$  は、首都高速道路公団が昭和58年10月に行った調査データ<sup>9)</sup>をもとに対象とするトリップのうち通勤目的トリップの起点を集計することにより求めた。調査データが、首都圏約400のゾーン単位のため、ゾーンごとの密度を求め同一ゾーン内では、密度は一定であると仮定した。総費用関数は、以下のような線形関数を用いた。

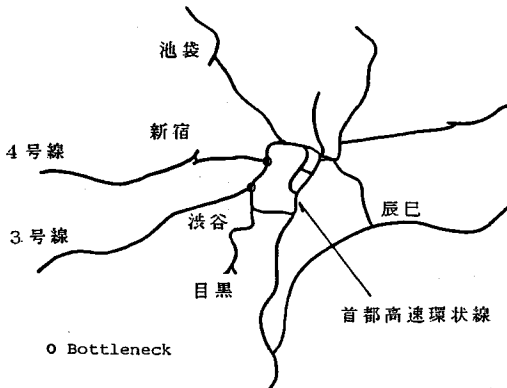


Fig. 9 首都高速道路網図.

$$TC_j(X, t) = am_j(X) + bq_j(t) + cs_j(t) \dots\dots\dots(27)$$

ただし、 $a, b, c$  は、パラメーターである：

$$c = \begin{cases} c_1, & s \geq 0 \\ -c_2, & s < 0 \end{cases} \dots\dots\dots(28)$$

通勤目的以外のトリップもこの3、4号線を利用しているが、本理論では、通勤トリップのみを対象としているため、通勤目的以外のトリップの各ボトルネックへの到着分布は、あらかじめ与えている。これは前掲の首都高速道路の調査において、各トリップのオンランプ流入時刻がわかっているのを、それをもとに推計した。通勤トリップも通勤以外のトリップもともにあるボトルネックを共用しているため、各ボトルネックのサービス容量を通勤トリップとそれ以外のトリップのボトルネック流入量の比によって2種類に分割し、通勤トリップをサービスする容量  $\mu_s(t)$  を求めている。つまり、ボトルネックのサービスシステムがFIFOなので、同一時刻にボトルネックに流入したトリップは、通勤トリップであっても、それ以外でも待ち時間が等しくなるようにボトルネック容量を分割しているわけである。

実測の累積到着時刻分布は、同様に首都高速道路の調査において、各トリップのオンランプ流入時刻がわかっているのを、それをもとに渋滞のない状態で、各トリップが2つのボトルネックに到着する時刻を算出することにより、推計した。

計算結果を Fig. 10 に示す。また、各パラメーターのキャリブレーションされた値は  $a=4.54, b=6.25, c_1=c_2=1.0$  であった。これらのパラメーターは、観測された到着分布を  $A_j^*(t)$  とすると、

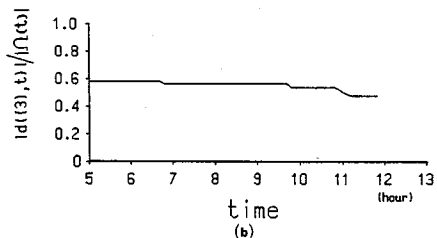
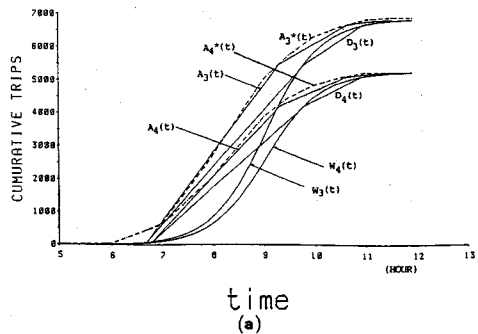


Fig. 10 Queue Evolutions in the Metropolitan Expressway.



$$\sum_j \int_{t_0}^{t_1} |A_j^*(t) - A_j(t)| dt$$

を最小にするように求めた。パラメーター  $a, b, c$  はおのおの移動費用、待ち行列内での待ち費用、勤務地での待機費用の相対的な重みを表わし、パラメーター間の比率のみが意味をもつ。時間価値に関する種々な実証的な研究はこれまでも数多く成されてはいるが、ここでいう待ち時間や、待機時間のような細かな時間の使われ方に関する研究はきわめて少ない。近年 Hendrickson<sup>10)</sup> が、ピッツバーグ都市圏の通勤トリップについて移動時間と待ち時間、そして待機時間の時間価値を推計しているにすぎない。

ここで得られた  $b/c, a/c$  の値は、Hendrickson の結果と比べてオーダー的には一致している。通勤トリップの場合、おおむね待ち行列内での待ち時間の時間価値は待機時間のその 10<sup>1</sup> のオーダーくらい大きいものと思われる。

Fig. 10 に示すように、推計された累積到着分布は、従来のようなピーク時間帯での均一な到着分布と比べれば、実測値とかなりよく一致している。両方のボトルネックともに、待機時間が最終的に 0 になる時刻においても待ち行列は消滅していない。これは、両ボトルネックともに、ピーク時間帯後も通勤目的以外のトリップの需要が多く、依然として両ボトルネックには待ち行列が存在しているためである。また、推計された内部領域の変化は、2つのボトルネックでの待ち行列発生時刻がほとんど同じなので、ピーク時間帯開始付近ではそれほど大きな変化はみせていない。ただ、3号線のボトルネックを通過したトリップの待機時間が負で、4号線の待機時間が正であるわずかな時間に、内部領域が多少動くことが示されている。また境界領域はこのピーク時間帯には発生しなかった。

## 5. ま と め

通勤トリップに要する費用の多くは、ピーク時間帯に複数のボトルネックにて発生する待ち行列に起因していることに着目した。本研究では単一核都市の通勤道路交通を対象として、トリップの起点と通勤開始時刻がわかっている場合に、通勤トリップがどのボトルネックへいつ到着するのかを決定するモデルを提案した。移動時間、ボトルネックでの待ち時間、勤務地での待機時間によるトリップ費用を最小にするようにトリップを時間的、空間的に均衡配分している。各トリップが利用するボトルネックと到着時刻は結局のところ、ボトルネック費用（待ち行列内での待ち費用と勤務地での待機時間の和）と待機時間に関する1階の連立微分方程式を解くことによって求められる。この連立微分方程式は、解析的

には解けないが、数値解析的に解くことができる。また首都高速道路3号、4号線に適用し、ボトルネックへのトリップの到着分布を求めた結果もかなり良好であった。

本方法は、いろいろな交通プロジェクトに対するインパクトを概算することができると考えられる。たとえば、ボトルネック地点の車線の拡幅、バイパスの建設、スピード規制の変更等に伴う交通量の変動パターンの変化を推計するのに有用である。また総費用関数に道路通行料金を組み込むことによって、時間制通行料金導入による影響なども検討できるとと思われる。

ネットワーク配分問題を動的にする際の複雑さを取り除くために、本研究ではトリップに要する費用をボトルネックにて発生する待ち行列の状況により表わし、待ち行列理論を適用している。待ち行列理論は基本的にはボトルネックの流入フローと流出フローとですべてが説明されるもので、車の細かな動的特性を逐時とらえる必要がないという点で簡明である。

しかしながら、本研究で設けた簡略化のためのいくつかの仮定は同時に本方法の限界でもある。今後は、これらの仮定を一般化していく方向に研究を進める必要がある。たとえば、Many-to-ManyのO-D表にも適用できるものにするようなダイヤモンドスペースの一般化、より複雑なネットワークへの適用、FIFO以外の待ち行列システムへの適用可能性等を追求する必要がある。今後は、こうしたモデルの一般化の方向に研究を進めると同時に、モデルの中に確率的な要素を組み込んだり、あるいは、時間価値についての実証的な分析に取り組む必要があると思われる。交通渋滞が大きな社会問題となっている今、このネットワーク配分の動的化については、まだまだ多くの残された課題がある。

## 付 録 1

起点  $x$ 、勤務開始時刻  $t$  をもつトリップがボトルネック  $j$  に流入した場合を考えることにする。式 (13) で表わされるように、待ち行列内での待ち時間による費用  $f_{i|q_j}(t)$  は、待機時間  $s_j(t)$  の関数となっている。 $f_{i|q_j}(t)$  は見方をかえれば、待ち行列内での待ち時間による費用というよりも、 $s_j(t)$  という待機時間を必要とするトリップがシステムを安定させるために余分に消費しなければならない費用と解釈できる。すなわち本研究で定義している  $f_{i|m_j}(x)$  はいわば最低限必要な費用であり、 $f_{i|q_j}(t)$  はシステム安定のためにさらに必要な費用とみることができる。

したがって、 $f_{i|q_j}(t)$  という費用は本質的には、なにも待ち行列内で使われなくても、どこで使われても構わない費用である。もしも、フローインディペンデントと

いう仮定が完全に成り立つならば、 $f_{ij}q_j(t)$  は待ち行列の中で使われざるを得ない。ところが、フローディペンデントであれば、 $f_{ij}q_j(t)$  のある部分は待ち行列の中で、残りは待ち行列に流入する以前に使われることになり、ボトルネック流入以前の遅れ時間による費用は、この  $f_{ij}q_j(t)$  の中に含まれていることになる。ただし、フローディペンデントの場合は、 $q_j(t)$  は待ち行列内での待ち時間以外の時間も含んでいるので、 $q_j(t)$  より得られる到着分布関数  $A_j(t)$  は実際にボトルネックでみられる到着分布とは多少異なることになる。

#### 参 考 文 献

- 1) Merchant, D. K. and Nemhauser, G. L. : A model and an Algorithm for the Dynamic Traffic Assignment Problems, *Transportation Science*, Vol.12, No.3, August 1978.
- 2) Roden, D. B., Okitsu, W. and May, A. : A Freeway Corridor Simulation Model : FREQ7PE, Research Report, Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley, April 1980.
- 3) Hurdle, V. F. : The Effect of Queuing on Traffic Assignment in a Simple Road Network, *Proceedings of the Sixth International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Sydney, 1974.
- 4) Vickrey, W. S. : Congestion Theory and Transportation Investment, *American Economic Review* 59, 1969.
- 5) Hendrickson, C. and Kocur, G. : Schedule Delay and Departure Time Decisions in a Deterministic Model, *Transportation Science*, Vol.15, No.1, February 1981.
- 6) Hurdle, V. F. : Equilibrium Flows on Urban Freeways, *Transportation Science*, Vol.15, 1981.
- 7) Daganzo, C. F. : The Uniqueness of a Time-Dependent Equilibrium Distribution of Arrivals at a Single Bottleneck, *Institute of Transportation Studies, University of California, Berkeley*, June 1984.
- 8) Kuwahara, M. : A Time-Dependent Network Analysis for Highway Commute Traffic in a Single Core City, Ph.D Thesis, University of California, Berkeley, Dissertation Series, UCB-ITS-DS-85-2, August 1985.
- 9) 首都高速道路公団計画部調査課 : 昭和58年度第17回首都高速道路交通起終点調査報告書, 昭和59年12月.
- 10) Hendrickson, C. and Plank, E. : The Flexibility of Departure Times for Work Trips, *Transportation Research*, Vol.18A, No.1, Jan. 1984.
- 11) American Association of State Highway and Transportation Officials : A Manual on User Benefit Analysis of Highway and Bus-Transit Improvements, 1977.

(1986.3.14・受付)