

簡便分割法による斜面の三次元安定解析

THREE-DIMENSIONAL STABILITY ANALYSIS OF SLOPES BY SIMPLE SLICE METHOD

鵜飼 恵三*・細堀 建司**・永瀬 英生***・榎戸 源則****

By Keizo UGAI, Kenji HOSOBORI, Hideo NAGASE and Motonori ENOKIDO

This paper discusses stability analysis of $c-\phi$ slopes with finite length. The method of analysis is based on three-dimensional simple slice method. A three-dimensional failure surface is assumed to be composed of a central cylinder and elliptical end caps. The three-dimensional stability factor is derived from momentum equilibrium of a sliding body and calculated as the function of the ratio of failure length (perpendicular to cross section) to slope height, slope angle and $\gamma H \tan \phi / c$. The three-dimensional stability charts calculated by this method are presented.

Keywords : simple slice method, slope stability, three dimension

1. まえがき

著者ら^{1)~3)}は、これまで粘性土斜面 ($c \neq 0, \phi = 0$) を対象として、三次元安定解析法を提案し、いくつかの重要な結論を得た。本論文では、これまでの研究を一步進め、 c と ϕ を有する土から成る斜面 ($c \neq 0, \phi \neq 0$) の三次元安定性を論じる。解析法として、慣用的な二次元簡便分割法⁴⁾を拡張した三次元安定計算法を提案した。斜面の三次元安定性に関する既往の論文は、二次元解析に比べるとかに少ないが、研究は着実に積み重ねられてきている。粘性土斜面の三次元安定性については、著者らによりかなり詳細に検討されているが、 ϕ を有する土から成る斜面については信頼性のある解析法が確立されているとはいがたい。このため本論文では、まず下記の2.で従来の研究を詳細に分析、検討し、新たな解析法を提案するための足がかりとした。次に、簡便法の考え方基礎を置いた三次元解析法を提案し、計算例を示して考察を行った。提案された計算法は二次元問題では慣用的な簡便分割法に帰着する。また、この計算

法では、均質な単純斜面に対する分割法計算式が積分表示され、その積分解が簡単に求まるため、計算量が大幅に削減されるという利点がある。本解析法にならって、他の二次元分割法（簡易 Bishop 法など）を三次元問題に拡張することも可能である。この点についても、本論文の最後で簡単にふれ、今後の課題とした。

2. 既往の研究

これまでに提案されている三次元安定解析法は、すべて極限平衡法、すなわちすべり土塊に作用する力とモーメントのつり合い式に基づいて定式化されていることをまず指摘しておく。変形をも考慮した解析法は、著者らの知る限り全くない。

Kopacsy⁵⁾は、上載荷重を有する一般的な三次元形状の斜面に対して、変分法に基づいた計算法を提案した。彼の方法は、すべり土塊に作用する力とモーメントのつり合いがすべて満たされるような形で、最も危険なすべり面形状を求めようとするものであり、精度の高い方法であるが、反面、実用性に欠ける。また、彼の論文には計算例は全く示されていない。

Leshchinsky⁶⁾は、Kopacsy の方法を改良して、Fig. 1 に示す均質な単純斜面の三次元安定解析法を提案し、最危険すべり面形状と最小安全率を算出する方法を

* 正会員 工博 群馬大学助教授 工学部建設工学科
(〒376 群馬県桐生市天神町1)

** 学生会員 群馬大学大学院生 (同上)

*** 正会員 工博 群馬大学助手 (同上)

**** 正会員 工博 群馬大学教授 (同上)

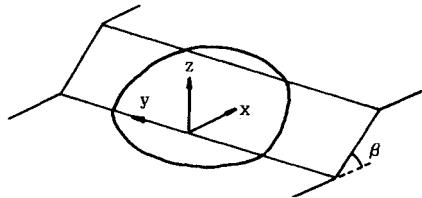


Fig. 1 3-D failure surface.

示した。得られた結果は、力とモーメントのつり合いをすべて満たし、また極限解析法における上界値⁷⁾となっているので、精度が高く、理論的根拠も明確である。反面、条件式として導かれる偏微分方程式の基本解のみを用いているため、すべり面形状が制約を受けること、また上界値であるため変形時のダイレイタンシー角が常に摩擦角 ϕ に等しくなければならないという非現実的な制約を受けることなどの欠点がある。不均質な斜面に対して適用しにくい点も欠点の 1 つである。ところで、Leshchinsky らの方法は変分計算法に基づいているが、このような方法⁸⁾で得られる結果が最も危険なすべり面形状と最小安全率を与えるかどうかについては、疑問が投げかけられている^{9), 10)}。なお、鵜飼^{11), 12)}は粘性土斜面に対してもいろいろな三次元すべり面形状を想定した計算を行い、変分法による結果が最小の安定係数（もしくは安全率）を与えることを示した。

Hovland¹¹⁾は、 $c\phi$ 土から成る斜面に対して二次元分割法を三次元に拡張した計算法を提案した。彼の方法は、すべり土塊を水平断面が長方形と三角形（周辺部）である柱体（Fig. 2）に分割し、各柱体の力のつり合いよりすべり面上の垂直力 ΔN とせん断力 ΔT (x 軸に平行と仮定) を求め、土塊全体のモーメントのつり合いより安全率を決定するというものである。彼は、分割した柱体（分割柱とよぶ）の 4 つの側面に作用する力はゼロであるかつり合っていると仮定して計算式を導いているが、これは誤りである。なぜなら、Fig. 2 からわかるように、このような仮定のもとでは y 軸方向の力のつり合いが成立立たないからである。しかし、幸いにも彼は ΔN 方向の力のつり合いのみに基づいて議論を進めていたため、結果的には、彼の導いた安全率の式は、本研究で側方拘束力（後述）を無視した場合の結果と一致する。なお、Hovland は計算例として、砂斜面 ($c=0$, $\phi \neq 0$) の安定性をくさび形すべり面を仮定して論じており、二次元安全率が三次元安全率より小さくなる場合が存在するという興味ある結果を示した。Hutchinson ら¹²⁾が指摘しているように、砂斜面に関するこの結論は一般論としては誤りであるが、本論文で後述するように c が小さい砂質斜面ではこのようなケースが存在し得る。

Chen ら¹³⁾は、二次元の Spencer の分割法を三次元に

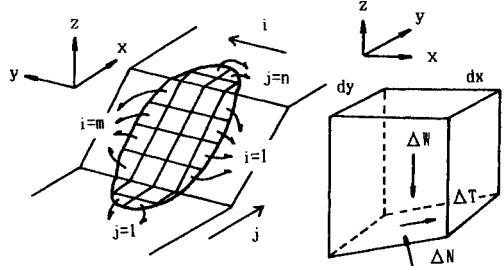


Fig. 2 3-D view of single column.

拡張した計算法を提案した。彼らの論文には誤りが 2 点ある。1 つは、分割柱に作用する力のつり合いを考えるためにあたって、底面の垂直力 ΔN が y 方向成分を有することを無視している点である。したがって、彼らの論文中の式 (9), (10) は誤りである。他の 1 点は、砂斜面の安定性を検討した結果、最危険すべり面が有限の深さを有するという結論を得ている点である。Hutchinson ら¹²⁾が指摘しているように、二次元、三次元にかかわらず砂斜面の最危険すべり面はきわめて浅いはずであり、Chen らの計算結果は誤りであるということになる。なお、Chen らはすべり土塊に作用する側方拘束力を考慮しており、この点は評価し得る。

大町ら¹⁴⁾は、狭い谷につくられた V 字形アースダムの地震時の安定性を検討するために、二次元の簡易 Bishop 法を三次元に拡張した計算法を提案した。彼らの方法は、側方拘束力を無視しているため、一般的な斜面の三次元安定解析に用いるには改良が必要である。しかし、彼らが対象としているような浅いすべりを生じるアースダムでは、側方拘束力の影響が小さくなる（後述）ため、このような斜面に対しては十分な適用性を有すると考えられる。

土肥・高橋^{15), 16)}は、二次元の簡便法および簡易 Bishop 法に基づいた三次元安定計算法を提案した。分割柱に作用する力のつり合いなどの詳細は示されていないが、簡便法に基づく安全率式は、本研究で側方拘束力を無視した場合の結果と一致する。彼らは、実際に崩壊した斜面に彼らの計算法を適用し、粘着力の小さい斜面では三次元効果が比較的小さいことを示した。

Dennhardt¹⁷⁾は、Fig. 3 に示すような斜面の三次元安定性を検討した。彼は、すべり面形状とすべり面上の垂直力の分布を仮定したうえで、すべり土塊全体の力とモーメントのつり合いがすべて満たされる方法を提案している。彼の計算法の精度は、正しい垂直力分布をいかに設定するかにかかっているが、一般的な斜面で正しい垂直力分布を見出すのは相当困難であると思われる。

以上のように、三次元斜面安定に関する研究は、着実に進展してきているが、次のような点が不十分である。

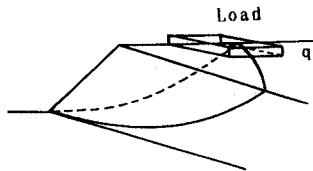


Fig. 3 One symmetric half of the failure body.

(1) 従来の研究では、すべり面形状を回転体面もしくはくさび形状と仮定することが多かったが、その仮定の根拠は必ずしも明確ではない。(2) 分割法を用いた研究では、分割柱に作用する不静定内力に関する仮定が明確でないケースが多い。(3) 側方拘束力を無視した議論が多い。(4) いろいろな値の ϕ (摩擦角), β (斜面勾配), H (斜面高), L (破壊幅) などに対して、斜面の安定性がどのように変化するかを一般的に論じた研究がない。

本研究では、以上の点に着目しながら三次元簡便分割法に基づいた議論を展開する。

3. 簡便分割法に基づく三次元斜面安定解析

ここでは、Fig. 1 のような単純斜面を対象として、破壊幅が規定される場合の三次元最危険すべり面形状と三次元最小安全率を求める方法を示す。

(1) すべり面形状の仮定

二次元解析によれば、 ϕ を有する斜面では底部破壊が起こりにくいことがわかっている。三次元効果（端部効果もしくは側方効果）はこの傾向を助長すると思われる。以下の議論では斜面先破壊のみを対象とする。すべり面形状は、Fig. 1 の y 軸に平行な回転軸を有する回転体面とし、楕円体面（端部）と円筒面（中央部）から成ると仮定した。その理由は次のようである。a) 従来の二次元解析ではすべり面の断面を円弧と仮定することが多い。b) $c\phi$ 斜面の特別な場合である粘性土斜面 ($\phi=0$) の斜面先破壊のケースでは、このようなすべり面仮定はよい精度を有することがわかっている³⁾。c) 従来の三次元斜面安定に関する研究では、すべり面を回転体面と仮定することが多い。d) 計算が簡略化され計算量も少なくてすむ。

(2) 分割法の仮定

Fig. 4 のように、点 0 を原点とするような x , y , z 座標を想定し、 xz 面に関して対称なすべり面を仮定する。破壊幅の $1/2$ の長さを L とし、端部の楕円体の幅を L_E とする。すべりの方向は y 軸に垂直と仮定する。このすべり土塊を、水平断面が長方形 ($\Delta x \times \Delta y$) である多数の細長い土柱に分割する。分割柱に作用する力を Fig. 5 に示す。この図で ΔW は分割柱の自重であり

$$\Delta W = \gamma h \Delta x \Delta y \quad \dots \dots \dots (1)$$

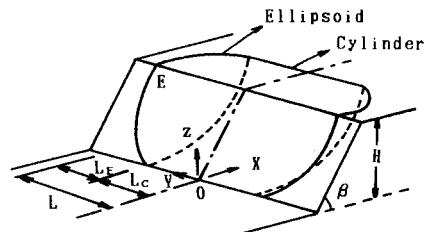


Fig. 4 3-D failure surface assumed in this study.

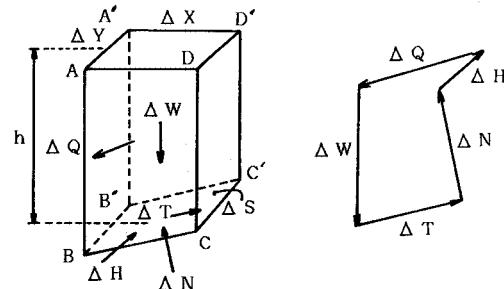


Fig. 5 Forces acting on a column.

と表わされる。ここで、 γ は土の単位体積重量、 h は分割柱の高さである。 ΔN は底面（すべり面）上の垂直力である。 ΔT は底面のせん断力で、その方向は y 軸に垂直と仮定する。

ところで、Fig. 4 に示すような斜面では、斜面内に y 軸方向の内力が生じていると考えられる。この内力の大きさは、盛土斜面では締固めの程度によって決まり（たとえば、締固め度が大きいほど内力は大きくなるであろう）、自然斜面では地山の初期応力状態によって決まると考えられる。このような内力は、Fig. 4 の三次元破壊に対して側方（端部）拘束力として現われ、すべり土塊の安定性に大きな影響を与えるであろう。たとえば、側方拘束力（以下、単に拘束力とよぶ）が大きい場合には深いすべりが起こりにくくなり、三次元安全率も大きくなることが予想される。拘束力の大きさは位置の関数 (x , y , z の関数) であり一定値ではない。また、同じ斜面でも斜面が安定している状態と崩壊時の状態とでは大きさが異なると考えられる。しかし、本研究では拘束力の影響を定性的に把握することを第一義的目的として、その大きさは y 座標に無関係で、かつ単位面積当たりの力（応力）は斜面の表面からの深さ z に比例すると仮定した。すなわち、

$$\text{側方拘束応力} = xyh \dots \dots \dots (2)$$

と表わす。 x は比例定数であるが、一種の土圧係数とも考えられる。このように仮定すると、Fig. 5 の分割柱の面 ABCD および面 A'B'C'D' に作用する拘束力の合力 ΔH は、 $xyh \times (\text{底面の } xz \text{ 面への投影面積})$ と表わされる。底面積 $\Delta s = \sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2} \Delta x \Delta y =$

$J\Delta x\Delta y$ であるので

$$\Delta H = \kappa \Delta W \frac{\partial z}{\partial y} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

となる。Fig. 5 の ΔQ は、拘束力を除くすべての側面力（分割柱の側面に作用する力）の合力を表わし、簡便法の仮定⁴⁾にならって、すべり面に平行であると仮定する。このように仮定したうえで、底面に垂直な方向 (ΔN の方向) の力のつり合い式をたてると

$$\Delta N = \left[1 + \kappa \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] \Delta W / J \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

を得る。よって、せん断力 ΔT は

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{F} (c J \Delta x \Delta y + \Delta N \tan \phi) \\ &= \frac{1}{F} \left\{ c J \Delta x \Delta y + \left(1 + \kappa z_y^2 \right) \frac{\Delta W}{J} \tan \phi \right\} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

となる。ただし、 $z_y = \partial z / \partial y$ 。式 (4), (5) より、 z_y (y 方向のすべり面の勾配) が小さい場合、言い換えると破壊幅に比べてすべり面深さが浅い場合には、拘束圧の影響が小さくなることがわかる。

ところで、垂直力 ΔN を応力で表わすと、式 (1), (4) より

$$\sigma_N = \Delta N / \Delta s = (1 + \kappa z_y^2) \gamma h / J^2 \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

となる。ただし、 $J^2 = 1 + z_x^2 + z_y^2$ 。いま、 y 軸に対して垂直に近いすべり面を想定すると、 $z_y \gg 1$ となるので

$$\sigma_N \approx \kappa \gamma h \quad (z_y \gg 1) \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

となり、式 (2) で表わされる仮定と矛盾しない。もし、 $\kappa = 0$ であれば、 $\sigma_N \approx 0$ となる。つまり、このようなすべり面上では垂直応力がほぼゼロであるという結果になり、これは現実的ではない。式 (2) のような拘束応力を本研究で導入したもう 1 つの理由は、このためである。

(3) 安全率式の導出

Fig. 6 に、Fig. 4 に示した斜面とすべり面の断面図を示す。 R_0 は円筒部の半径、 $R(y)(y > L_E)$ は梢円体部（端部）の半径である。点 P は回転軸を表わす。 $R_m = PA$ とする。他の記号は Fig. 6 に示したとおりである。斜面の土質は均質、等方と仮定する。いま、 Δx 、 Δy は微小な値であるとし、微分記号 dx 、 dy で表示する。他の Δ 記号もこれに準じて d で置き換える。すると、すべり土塊に作用する抵抗モーメント M_r は次のように表わされる。

$$M_r = \int R dT = M_{rc} + M_{rf} \quad \dots \dots \dots \quad (8)$$

ここで、

$$M_{rc} = \iint R(c/F) J dx dy \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

$$M_{rf} = \iint R(\tan \phi / F) (1 + \kappa z_y^2) \gamma h / J dx dy \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

直角座標 (x, z) を極座標 ($\theta, R(y)$) (Fig. 6) に変換すると、以後の計算が簡単になる。両座標の間には次

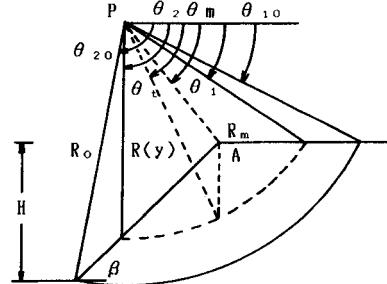


Fig. 6 Section of slope.

のような関係がある。 $dx = R(y) \sin \theta d\theta$, $z_y^2 = |R'(y)|^2 \cosec^2 \theta$, $J = \sqrt{1 + |R'(y)|^2} \cosec \theta$ 。このような変換を行い計算を進めると、 M_{rc} は次のように表示される。

$$M_{rc} = M_{rc1} + M_{rc2} \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

$$M_{rc1} = (c/F)(\theta_{20} - \theta_{10}) R_0^2 L_c = (c/F)m_{rc1} \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

$$\begin{aligned} M_{rc2} &= (c/F) \int_0^{L_E} |\theta_2(y_E) - \theta_1(y_E)| |R(y_E)|^2 \\ &\quad \cdot \sqrt{1 + |R'(y_E)|^2} dy_E = (c/F)m_{rc2} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

ただし、 $y_E = y - L_c$ 。

M_{rc} は粘着力 c による抵抗モーメントを表わす。 M_{rc1} は円筒部、 M_{rc2} は梢円体部（端部）に対応する。式 (13) 中の $|\theta_2(y_E) - \theta_1(y_E)|$ は次のように表示される。

(a) $\theta_m + \beta \geq \pi/2$ のとき

$$\theta_1 = \sin^{-1}(b/R), \quad \theta_2 = \pi - \beta - \sin^{-1}(a/R) \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

(b) $\theta_m + \beta < \pi/2$ のとき

$R > R_m$ のとき：式 (14)

$R < R_m$ のとき： $\theta_1 = -\beta + \sin^{-1}(a/R)$,

$$\theta_2 = \pi - \beta - \sin^{-1}(a/R) \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

ここで、 $R_m = \sqrt{(R_0 \sin \theta_{20} - H)^2 + (R_0 \cos \theta_{20} + H \cot \beta)^2}$, $\theta_m = \sin^{-1}(b/R_m)$, $a = R_0 \sin(\theta_{20} + \beta)$, $b = R_0 \sin \theta_{20}$ 。

M_{rf} は摩擦角 ϕ による抵抗モーメントを表わし、次のように表示される。

$$M_{rf} = M_{rf1} + M_{rf2} + M_{rf3} \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

$$\begin{aligned} M_{rf1} &= (\gamma H \tan \phi / F) \cdot (L_c / H) R_0^3 \left[\cos \theta_{10} - \cos \theta_{20} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} (\cos^3 \theta_{20} - \cos^3 \theta_{10}) - \frac{1}{2} \sin \theta_{10} [\theta_{20} - \theta_{10} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\sin 2 \theta_{20} - \sin 2 \theta_{10}) \right] + \frac{1}{3} \tan \beta (\sin^3 \theta_{20} \\ &\quad - \sin^3 \theta_{10}) - \frac{1}{2} (R_m / R_0) \cos \theta_m \tan \beta [\theta_{20} - \theta_{10} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (\sin 2 \theta_{20} - \sin 2 \theta_{10}) \right] \left. \right] \\ &= (\gamma H \tan \phi / F) m_{rf1} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (17)$$

$$\begin{aligned} M_{rf2} &= (\gamma H \tan \phi / F) \cdot \int_0^{L_E} (R^2 / H) / \sqrt{1 + R'^2} \\ &\quad \cdot \left[R \left[\cos \theta_1 - \cos \theta_2 + \frac{1}{3} (\cos^3 \theta_2 - \cos^3 \theta_1) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} R_0 \sin \theta_{10} \left[\theta_2 - \theta_1 - \frac{1}{2} (\sin 2 \theta_2 - \sin 2 \theta_1) \right] \\ & + \frac{1}{3} R \tan \beta (\sin^3 \theta_2 - \sin^3 \theta_1) - \frac{1}{2} R_m \cos \theta_m \\ & \cdot \tan \beta \left[\theta_2 - \theta_1 - \frac{1}{2} (\sin 2 \theta_2 - \sin 2 \theta_1) \right] dy_E \\ & = (\gamma H \tan \phi / F) m_{r,s} \quad \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{r,s} = & (\gamma H \tan \phi / F) \cdot x \cdot \int_0^{L_E} (R^2 R'^2 / H) / \sqrt{1+R'^2} \\ & \cdot [R(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) + (\theta_1 - \theta_2) R_0 \sin \theta_{10} \\ & + R \tan \beta (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) - (\theta_2 - \theta_1) R_m \cos \theta_m \\ & \cdot \tan \beta] dy_E = (\gamma H \tan \phi / F) \cdot x m_{r,s} \quad \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

ここで、 $\theta_{10} = \cos^{-1}(R_m \cos \theta_m / R_0)$ 。式(18), (19)の中の θ_1, θ_2 は式(14), (15)によって与えられる。 $M_{r,s}$ は円筒部、 $M_{r,r2}$ は楕円体部に対応し、 $M_{r,r3}$ は拘束力の影響を表わす。以上の定式化において、すべり面深さ h は、次のように表示されることを考慮した。

$$\begin{aligned} \theta_1 < \theta < \theta_2 : h &= R \sin \theta - R_0 \sin \theta_{10} \\ \theta_2 < \theta < \theta_1 : h &= R(\sin \theta + \cos \theta \tan \beta) \\ & - R_m \cos \theta_m \tan \beta - R_0 \sin \theta_{10} \quad \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

ここで、 $\theta_2 = \cos^{-1}(R_m \cos \theta_m / R)$ (Fig. 6)。

一方、すべり土塊に対する滑動モーメントは次式で表わされる⁷⁾。

$$M_d = M_{d1} + M_{d2} = \gamma H (m_{d1} + m_{d2}) \quad \dots \dots \dots (21)$$

M_{d1}, M_{d2} の表示式は、文献2)の式(15), (16)と全く同一であるので、省略する。

抵抗モーメントと滑動モーメントのつり合いより

$$M_r = M_d \quad \dots \dots \dots (22)$$

が成り立つ。いま安定係数 N_s を

$$N_s = \gamma H F / c \quad \dots \dots \dots (23)$$

で定義すると、式(22)より次式を得る。

$$N_s = |m_{r,s} + m_{r,c2} + \lambda(m_{r,s} + m_{r,r2}) + xm_{r,s}| / (m_{d1} + m_{d2}) \quad \dots \dots \dots (24)$$

ここで、

$$\lambda = \gamma H \tan \phi / c \quad \dots \dots \dots (25)$$

このようにすると、与えられた問題は、式(24)に基づいて N_s を最小にするようなすべり面を求める問題に帰着する。

本章では、均質・等方な単純斜面を仮定したため、 M_r や M_d を積分表示することができた。また、(x, z)から(θ, R)への座標変換の結果、 θ による積分解が得られるため2重積分が1重積分になり、その後の数値計算の量が大幅に削減される。なお、分割法計算式の本来の姿に戻って、有限数の分割柱によって安全率を算出することも可能であり、不均質な斜面にも対応できる。

分割柱が有限数であるときの安全率は次式より計算される。ただし、均質、等方なケース。

$$\begin{aligned} F = & \left[c \sum_{i=1}^m s_{1i} R_i \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta R_i^2} + \tan \phi \left(\sum_{i=1}^m s_{1i} R_i \Delta y_i / \right. \right. \\ & \cdot \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta R_i^2} + \kappa \sum_{i=1}^m s_{2i} R_i \Delta R_i / \\ & \left. \left. \cdot (\Delta y_i \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta R_i^2}) \right) \right] / \sum_{i=1}^m s_{2i} R_i \quad \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} s_{1i} &= \sum_{j=1}^n \cos \delta_{ij} \Delta W_{ij}, \quad s_{2i} = \sum_{j=1}^n \sin \delta_{ij} \Delta W_{ij} \\ s_{3i} &= \sum_{j=1}^n \Delta W_{ij} / \cos \delta_{ij}, \quad s_{4i} = R_i (\delta_{in} - \delta_{i1}) \end{aligned}$$

ここで、 m : y 方向の分割数、 n : x 方向の分割数、 i : y 方向の分割番号、 j : x 方向の分割番号 (Fig. 2)。 δ_{ij} : ij 要素 (分割柱) の xz 断面内での底面傾角、 ΔW_{ij} : ij 要素の自重、 Δy_i : i 番目の要素の y 方向の幅、 R_i : i 番目の要素の半径、 ΔR_i : i 番目の要素の y 方向端でのすべり円半径の差。

4. 計算の方法

安定係数 N_s もしくは安全率 F の最小値を計算するのに必要なデータは $\gamma, \beta, \kappa, c, \phi, H$ および L である。しかし、無次元式である N_s を求める場合には式も無次元化できるので、 β, λ と L/H を与えて N_s の最小値を求める問題に帰着する。

すべり面端部 (楕円体部) の半径 $R(y_E)$ は次式で定義する。

$$R(y_E) = R_L + (R_0 - R_L) \sqrt{1 - (y_E/L_E)^2} \quad (0 \leq y_E \leq L_E) \quad \dots \dots \dots (27)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } R_L &= R_m & \left(\theta_m + \beta \geq \frac{\pi}{2} \right) \\ &= R_0 \sin(\theta_{20} + \beta) & \left(\theta_m + \beta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

この式は、 $y_E = 0$ ($y = L_c$) で円筒面に滑らかに接し、 $y_E = L_E$ ($y = L$) で $R' (= dR/dy)$ が ∞ になるような楕円体面を表わす。

一般的な計算の手順は次のようである。

- 1) θ_{10}, θ_{20} の値を仮定する。 $L_E/H (= L/H - L_c/H)$ を変化させて式(24)より N_s を計算し、その中から最小値(N_s)_{cri}を求める。
- 2) θ_{10}, θ_{20} の値を変えて上記1)の手順を行い、対応する(N_s)_{cri}を求める。
- 3) このようにして、多数の θ_{10}, θ_{20} に対応する(N_s)_{cri}を求め、それらの中から所定の精度で最小値(N_s)_{min}を決定する。

計算のための主なデータは次のようである。

$$\beta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$$

$$\lambda = 0, 0.5, 1.5, 3, 8$$

$$L/H = 0.5, 1, 2, 4, 6$$

$\chi=0, 0.25, 0.5$
これらの値のすべての組合せについて計算を行った。

5. 計算結果と考察

(1) 二次元最小安定係数 N_{s2} の計算

本研究の目的は、三次元効果（端部効果）が斜面の安定性に与える影響を考察することであるので、計算結果は三次元最小安定係数 N_{s3} ($= (N_s)_{\min}$) と二次元最小安定係数 N_{s2} との比で表示した。 N_{s2} の値を Table 1 に示す。これらは斜面先破壊を仮定して算出したものである。

(2) 三次元安定図表

Fig. 7(a), (b), (c) に N_{s3} と破壊幅 ($= 2 \times L$) との関係を示す。 $\chi=0$ ((a) 図), 0.25 ((b) 図), 0.5 ((c) 図) および $\beta=15^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ のケースについて示したが、他のケースについても曲線の傾向は同様である。同図で、縦軸は N_{s3} を N_{s2} で割った値である。

Fig. 7 より次のようなことがわかる。ただし、 $\beta \geq 15^\circ$,

Table 1 2-D minimum stability factor N_{s2} .

λ	0	0.5	1.5	3	8
90°	3.831	4.346	5.209	6.273	8.925
75°	4.565	5.225	6.355	7.792	11.613
60°	5.247	6.081	7.515	9.368	14.494
45°	5.870	6.957	8.829	11.290	18.381
30°	6.428	7.987	10.676	14.285	25.097
15°	6.922	9.289	14.833	21.719	43.086

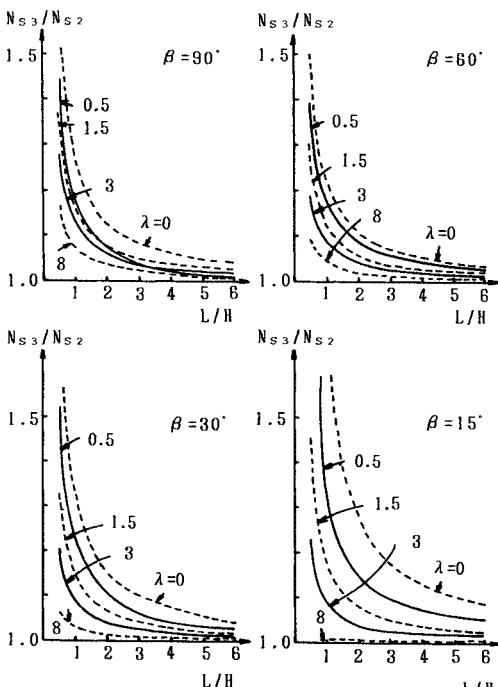


Fig. 7(a) 3-D minimum stability factor vs. failure length ($\chi=0$).

$\lambda \leq 8$, かつ $\chi \leq 0.5$ での結論である。1) N_{s3}/N_{s2} は常に 1 以上である。つまり、端部効果は斜面の安定性を増加

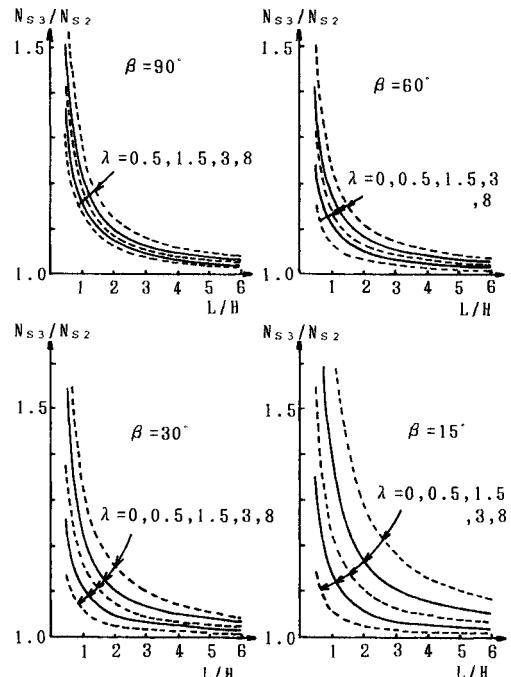


Fig. 7(b) 3-D minimum stability factor vs. failure length ($\chi=0.25$).

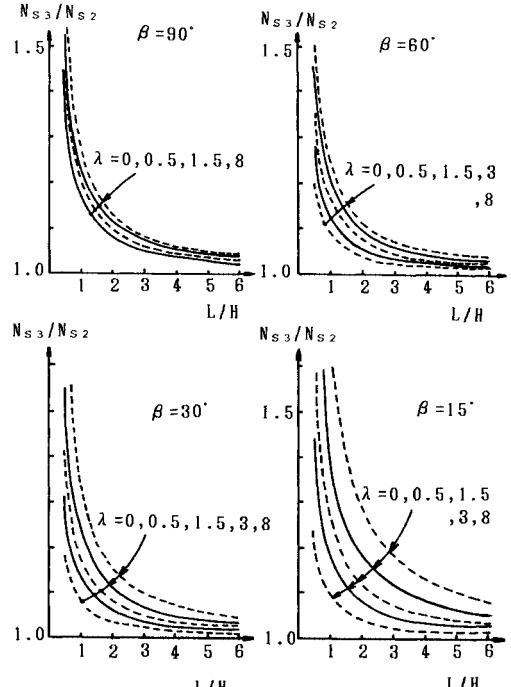


Fig. 7(c) 3-D minimum stability factor vs. failure length ($\chi=0.5$).

させる。2) 一部の例外 (Fig. 7(a) の $\beta=90^\circ$ のケース) を除いて、一般に λ が小さいほど、つまり斜面が粘性的であるほど端部効果は大きい。3) おおむね $L/H \leq 2$ で端部効果は急に大きくなる。4) 勾配の小さい斜面ほど、 $N_{s3}/N_{s2} \sim L/H$ 曲線は λ によって大きく変化する。

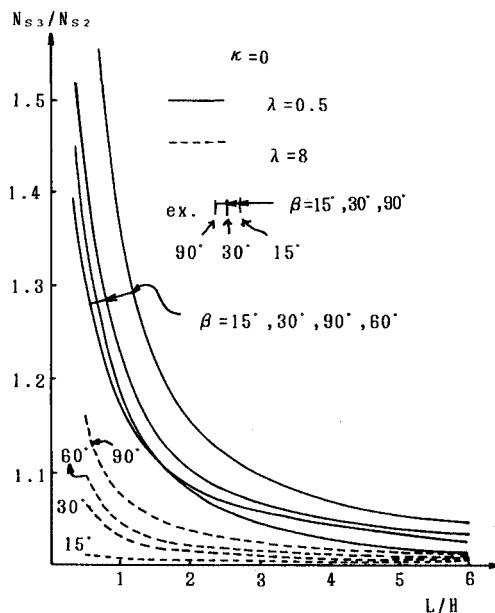


Fig. 8(a) 3-D minimum stability factor vs. slope angle and failure length ($\kappa=0$).

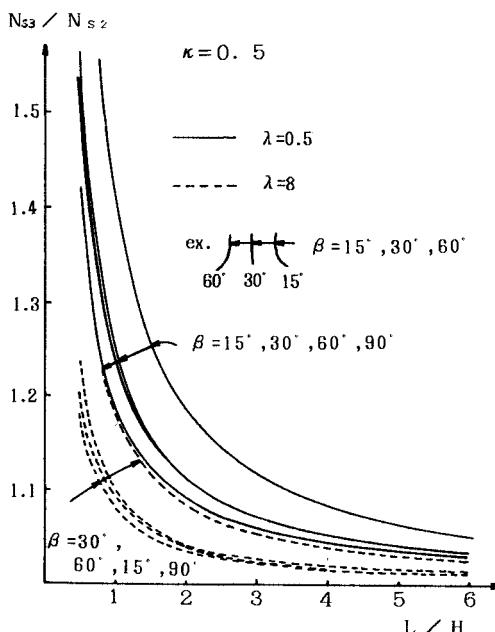


Fig. 8(b) 3-D minimum stability factor vs. slope angle and failure length ($\kappa=0.5$).

Fig. 8(a), (b) は、Fig. 7 に示した曲線が斜面勾配 β によってどのように変化するかを調べたものである。(a) 図は $\kappa=0$ 、(b) 図は $\kappa=0.5$ のケースを示し、それぞれ $\lambda=0.5$ および 8 の場合について表示した。一部の例外 (b) 図の $\lambda=8$, $\beta=15^\circ$ のケース) を除き、 λ が小

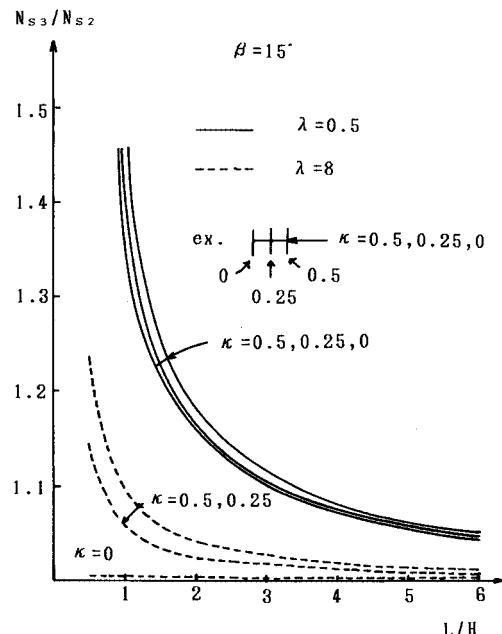


Fig. 9(a) 3-D minimum stability factor vs. κ and failure length ($\beta=15^\circ$).

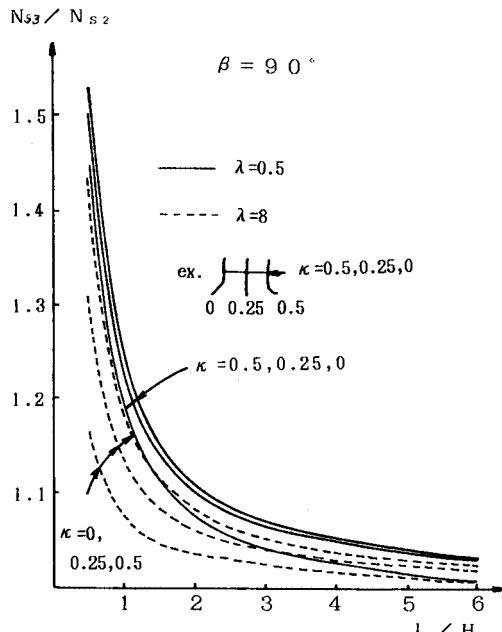


Fig. 9(b) 3-D minimum stability factor vs. κ and failure length ($\beta=90^\circ$).

たものである。勾配が小さい ($\beta=15^\circ, 30^\circ$) 場合の 4 ケースを示した。この図で破線は $\beta=15^\circ, \lambda=8, \chi=0$ および 0.25 のケースを示す。 $\beta=15^\circ, \lambda=8, \chi=0$ のケースでは $L/H < 2$ において N_{s3}/N_{s20} が 1 以下になる（すなわち、三次元安全率が二次元安全率より小さくなる）という興味ある結果が得られた。Hovland¹¹⁾ は砂斜面 ($\lambda=\infty$) に対して同様な結論を導いているが、Hutchinson ら¹²⁾が指摘しているように彼の議論には誤りがある。しかし、 $\chi=0.25$ のケースでは拘束力が存在するため N_{s3}/N_{s20} は常に 1 以上になる。また、勾配がより大きいケース ($\beta=30^\circ$ 、図中の実線) や λ が小さいケース ($\lambda=0.5$ 、図中的一点鎖線) でも N_{s3}/N_{s20} は常に 1 以上になる。すなわち、 λ が大きく（砂質斜面）、 χ が小さく（拘束力が小さい）かつ β が小さい（勾配がゆるい）斜面でのみ N_{s3}/N_{s20} が 1 より小さくなる場合が起こり得る。しかし実際の斜面では側方の拘束力が存在するため、このようなケースは起こりにくいと考えられる。なお本研究で行った計算の中で N_{s3}/N_{s20} が 1 以下になったのは Fig. 12 に示した $\beta=15^\circ, \lambda=8, \chi=0$ のケースのみであった。

次に、実際に崩壊した斜面の強度定数の逆算問題を Fig. 12 を用いて検討する。例として、 $\beta=15^\circ, \lambda=8, \chi=0.25, L/H=0.5$ のケースを考える。このとき $N_{s3}/N_{s20}=1.15$ である。この斜面が実際に崩壊したとすれば、三次元安全率 F_3 は 1 になるから、 $N_{s3}=F_3\gamma H/c_3=\gamma H/c_3$ となる。 γH の値が既知とすれば $c_3=\gamma H/N_{s3}$ より斜面の粘着力 c_3 が得られる。また $\tan \phi_3=\lambda c_3/(\gamma H)$ より摩擦角 ϕ_3 も決まる。一方、この崩壊を二次元問題として処理する場合には、 $F_{20}=1$ と考えるので、粘着力は $c_{20}=\gamma H/N_{s20}$ と見積られる。また、摩擦角も $\tan \phi_{20}=\lambda c_{20}/(\gamma H)$ より得られる。以上より、 $c_{20}/c_3=N_{s3}/N_{s20}=1.15$ 、 $\tan \phi_{20}/\tan \phi_3=N_{s3}/N_{s20}=1.15$ となる。したがって、従来のように三次元効果を無視して二次元仮定のもとで崩壊した斜面の逆算を行うと、強度定数が 1.15 倍大きく見積られることになり、対策工の設計上危険側の要因となる。

土肥・高橋¹⁵⁾は、実際に崩壊した斜面に三次元簡便分割式を適用して、粘着力の小さい (λ が大きい) 斜面では三次元効果が比較的小さいことを示した。この傾向は本研究の結論と一致する。著者らも、ある尾根状斜面（比高約 50 m、勾配約 25°）の切り取りによる崩壊例に対し本計算式 ($\chi=0$ と仮定) を適用し、三次元効果の割合として約 1.3 の値を得た。このように実斜面の崩壊においても三次元効果が無視できないケースが多いと思われる所以、今後、多くの崩壊例の収集と検討が必要である。

6. 簡易 Bishop 法の三次元問題への拡張

本解析法にならって、他の二次元分割法を三次元問題へ拡張することも可能である。ここでは簡易 Bishop 法に話を限定し、その考え方を示す。

簡易 Bishop 法を三次元問題に拡張する場合、まず思いつく仮定は、 ΔQ の作用方向を水平 (xy 面に平行) とすることである。このような仮定のもとで Fig. 5 の分割柱に対して鉛直方向の力のつり合いをとると、底面の垂直力は

$$\Delta N = \frac{\Delta W - (c/F)J \cdot z_x / \sqrt{1+z_x^2} \cdot dx dy}{(1/J) + (\tan \phi/F) \cdot z_x / \sqrt{1+z_x^2}} \quad \dots \dots \dots (32)$$

となる。上式には拘束力の項が含まれない。したがって、拘束力の大小にかかわらず ΔN の大きさが決まることになり、これは不合理である。さらに上式より底面のせん断力 ΔT を計算すると

$$\Delta T = \frac{cdx dy + \Delta W \tan \phi}{(F/J) + \tan \phi \cdot z_x / \sqrt{1+z_x^2}} \quad \dots \dots \dots (33)$$

となる。これを応力で表わすと

$$\tau = \Delta T / \Delta s = \frac{c + \gamma h \tan \phi}{F + \tan \phi \cdot J z_x / \sqrt{1+z_x^2}} \quad \dots \dots \dots (34)$$

が得られる。いま、極端な場合として y 軸に垂直なすべり面を想定すると、 $z_y \rightarrow \infty$ ($\therefore J \rightarrow \infty$) となるので

$$\tau = 0 \quad (z_y \rightarrow \infty)$$

になる。すなわち、 y 軸に垂直なすべり面上ではせん断応力はゼロという不合理な結果となる。たとえば、Fig. 13 のような完全円筒すべり面（両端は y 軸に垂直な平面）に上記の仮定を適用して計算すると、両端面ではせん断応力がゼロになるため、得られる三次元安定係数の値は二次元の安定係数の値に一致するというおかしな結果が得られる。

上述の欠点を排し、かつ二次元の場合には従来の簡易 Bishop 法の式に帰着するような仮定として、次の 3 つが考えられる。1) ΔQ は xz 面内 (Fig. 4) では水平方向 (x 軸に平行な方向) の成分 ΔQ_1 を有し、 yz 面内ではすべり面に平行な成分 ΔQ_2 を有すると仮定する。そして ΔQ_1 と ΔQ_2 の和として ΔQ が与えられると仮定する。そのうち、すべり土塊全体のモーメントのつり合い

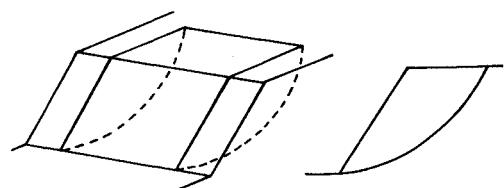


Fig. 13 Cylindrical failure surface.

より安定係数を算出する。2) ΔQ は xz 面内では水平方向の成分 ΔQ_1 を有し、 yz 面内では水平面と $\tan^{-1}(\alpha z_y)$ の角度をなす成分 ΔQ_2 を有すると仮定する。そして、すべり土塊全体のモーメントのつり合いおよび鉛直方向の力のつり合いより安定係数と α を決定する。3) ΔQ は xz 面内では水平方向の成分 ΔQ_1 を有し、 yz 面内では水平面と α の角度をなす成分 ΔQ_2 を有すると仮定する。そして、すべり土塊全体のモーメントのつり合いおよび鉛直方向の力のつり合いより安定係数と α を決定する。

これらの仮定のうち3) を用いると、すべり面が回転体面でかつ土質が均質な場合には、すべり土塊に作用する抵抗モーメント M_r に関する積分式において θ に関する積分解が得られるため、2重積分が1重積分になり計算が簡略化される（詳細は省略）。これらの仮定に基いて得られる計算結果が合理的な結果を与えるかどうか、などについては今後の検討課題である。

7. 結 論

本研究の結論は次のようである。

(1) 粘着力 c と摩擦角 ϕ を有する単純斜面を対象として、破壊幅が規定される場合の三次元最危険すべり面形状と最小安定係数（安全率）を求める計算法を提案した。この方法は従来の二次元簡便分割法を三次元に拡張したものであり、不均質な斜面や間隙水圧が存在するケースでも適用可能である。

(2) 間隙水圧がゼロの均質な $c\phi$ 斜面に関して次のような結論が得られた。a) 端部効果は斜面の安定性を増加させる。b) 一般に粘性土的な斜面ほど端部効果が大きく、逆に砂質斜面では小さい。c) おおむね $L/H \leq 2$ で端部効果は急に大きくなる。d) λ が小さい斜面では勾配が小さいほど端部効果が大きく、逆に、 λ が大きい斜面では勾配が大きいほど端部効果が大きくなる傾向がある。

(3) 一般に斜面内には側方拘束力が存在し、 λ が大きい斜面の安定性に大きな影響を与える。拘束力が大きいほど斜面の安定性は増大する。

(4) 従来のように三次元効果を無視して二次元仮定のもとで崩壊した斜面の逆算を行うと、一般に強度定数が大きく見積られるため対策工の設計上危険側の要因となる。

(5) 本解析法にならって、二次元の簡易 Bishop 法を三次元問題に拡張する方法を示した。

参 考 文 献

- 1) Ugai, K. : Three-dimensional stability analysis of vertical cohesive slopes, Soils and Foundations, Vol. 25, No. 3, pp. 41~48, 1985.
- 2) 鶴飼恵三：粘性土斜面の三次元安定解析、土木学会論文集、第364号/III-4, 1985.
- 3) 鶴飼恵三・細堀建司：底部破壊を考慮した粘性土斜面の三次元安定解析、土木学会論文集、第376号/III-6, 1986.
- 4) 山口柏樹：土質力学（全改訂）、技報堂、1984.
- 5) Kopacsy, J. : Three-dimensional stress distribution and slip surface in earth work at rupture, Proc. of 4th ICSMFE, Vol. 1, pp. 339~342, 1957.
- 6) Leshchinsky, D. et al. : Three-dimensional analysis of slope stability, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 9, pp. 199~223, 1985.
- 7) Chen, W. F. : Limit analysis and soil plasticity, Elsevier, Amsterdam, 1975.
- 8) Baker, R. et al. : Theoretical Analysis of the stability of slopes, Geotech., Vol. 28, No. 4, pp. 395~411, 1978.
- 9) G. De Josselin De Jong : Variational fallacy, Geotech., Vol. 31, No. 4, pp. 289~290, 1981.
- 10) Morgenstern, N. : Slopes and Excavations, Proc. 10th ICSMFE, Vol. 1, pp. 317~324, 1981.
- 11) Hovland, H. J. : Three-dimensional slope stability analysis method, ASCE, GT9, Vol. 103, pp. 971~986, 1977.
- 12) Hutchinson, J. N. et al. : Discussion, Geotech., Vol. 35, No. 2, pp. 215~216, 1985.
- 13) Chen, R. H. : Three-dimensional limit equilibrium analysis of slopes, Vol. 33, No. 1, pp. 31~40, 1983.
- 14) Ohmachi, T. and Yokoyama, H. : An iterative method for seismic stability analysis of three dimensional earth dams, Soils and Foundations, Vol. 23, No. 2, 1983.
- 15) 土肥 稔・高橋祐治：三次元斜面安定計算、第20回土質工学研究発表会、pp. 1447~1448, 1985.
- 16) 高橋祐治・土肥 稔：簡易 Bishop 法による三次元斜面安定計算、第40回土木学会年次講演会、第Ⅲ部門、pp. 143~144, 1985.
- 17) Dennhardt, M. : Problems of three-dimensional slope stability, Proc. of 11th ICSMFE, Vol. 1, pp. 427~431, 1985.
- 18) 申 潤植・板垣 治：地すべり（その4）、土と基礎、Vol. 31, No. 7, pp. 89~97, 1983.

(1986.6.23・受付)