

# トンネルにおける三次元逆解析法の開発

## THREE DIMENSIONAL BACK ANALYSIS FOR TUNNELING

久武勝保\*

By Masayasu HISATAKE

In order to assess the stability of tunnel linings and the tunnel face, a three dimensional back analysis method is newly developed. Equivalent mechanical properties of the time dependent ground and excavation stresses released at the tunnel face are obtained under taking excavation-and-lining-construction procedures into account. In this method, displacement measurements are necessary only at the surface of the linings but not in the ground. By following this method, reasonable executive conditions and supporting system may be determined with economical measurements.

*Keywords:* tunnel, back analysis, three dimensions, visco-elastic

### 1. 緒論

トンネル挙動は地山の力学特性とともに、節理や断層など構造特性の影響を顕著に受けるので、この挙動を小規模な試験から推定するのは容易でなく、また、覆工地圧に基本的に影響する地山の初期応力の精度よい推定手法は確立されていない。このような理由から、トンネル解析手法は近年非常に発展したにもかかわらず、現実のトンネル設計に対する解析結果の信頼性は低い。

そこで、近年、施工中の種々の計測結果を直接逆解析して施工管理を行ったり、あるいは、逆解析から地山の平均的な力学定数などを推定し、それを用いて通常の解析（以後、順解析という。）を行い、実際の挙動と解析結果との比較を通して、以後の設計・施工を合理的に行う、いわゆる逆解析の研究が、NATM の普及とともに行われ始めた。Kovari<sup>1)</sup>は、アーチ状支保工の外荷重算定手法を、また、Gioda・Jurina<sup>2)</sup>は、二次元覆工の地圧算定手法を示した。Hisatake・Ito<sup>3)</sup>は、たとえ地山が破壊しても、覆工が安定しておればその区間のトンネルは安全であるとの考え方から、地山の初期応力や力学定数を用いず、覆工内面相対変位から覆工の地圧・応力・

ひずみを三次元逆解析する手法を提案した。一方、地山の応力と力学定数を同時に逆解析する研究として、桜井・武内<sup>4)</sup>、久武ら<sup>5)</sup>の逆定式化法による研究、Hisatake・Ito<sup>6)</sup>、久武ら<sup>7)</sup>の直接定式化法による研究が挙げられる。荒井・片瀬<sup>8)</sup>は、地山初期応力は与え、力学定数のみを直接定式化法で求めた。

地山の応力、力学定数を逆解析から推定する場合、以下の諸点を考慮する必要がある。①：覆工建設区間の安全管理は、覆工の安定評価により、地山に独立してできるが、切羽の安定評価では切羽前方地山の応力、ひずみを知る必要がある。それらを切羽手前の計測変位から求める三次元逆解析法の開発。②：その際、トンネルの施工手順を取り入れる。③：時間依存性が大なる現場への適用。④：地中変位計測は、経費・時間が大であるので、覆工内面計測変位のみを用いる。⑤：変位計測点数をできるだけ少なくする。⑥：現場計測状況を考慮し、相対変位を用いる。⑦：解析結果が計測変位誤差の影響を大きく受けない。

直接定式化法は非線形問題にも適用できるが、繰り返し解析のため、三次元逆解析では経費が大になる。また、未知量が多い場合には、収束値が得られないで、未知量の一部を仮定せざるを得ない。一方、逆定式化法では一度の逆解析で全未知量が得られるが、解析結果が計測

\* 正会員 工博 近畿大学講師 理工学部土木工学科  
(〒577 東大阪市小若江3-4-1)

誤差の影響を顕著に受ける。すなわち、従来の直接定式化法、または逆定式化法により、上記①～⑦を満足さず実用的な逆解析法を示すのは、容易でない。

本研究は、既設覆工と切羽の安定性を同時に評価し、また以後の設計・施工を合理的に行うために、上記両定式化法を融合した新しい三次元逆解析法を開発し、その妥当性を検証する。本手法では、従来取り扱われなかつた切羽での掘削解放力のつり合い条件が目的関数に選ばれている。

## 2. 逆定式化法による逆解析法

### (1) 概 説

通常、切羽掘削後において、新しく現われたトンネル内面に一次覆工を施工する、という手順が繰り返される。本手法では、このような建設手順に対応した逆解析を行うが、その場合、地山の材料定数と切羽での掘削解放力の関係を明らかにするために、便宜上、地山と覆工を分離して取り扱う。すなわち、まず、覆工内面の計測変位を用いて覆工に対する逆解析を行い、覆工の応力、ひずみ、地圧、および覆工外面変位(=トンネル内面変位)を求めておく。次に、以上で得られたトンネル内面変位と地圧を用いて弾性地山に対する逆解析を行い、地山の弾性係数と切羽での掘削解放力の関係を明らかにし、この関係を利用して、次章において弾性、および粘弾性地山での新しい逆解析法を提案する。

### (2) 覆工に対する逆解析

いま、覆工のみに着目し、三次元有限要素法(FEM)における節点変位 $U$ と、地山から覆工外面に作用する節点外力 $F_o$ との関係を示せば、次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^t & K_{12}^t & K_{13}^t \\ K_{21}^t & K_{22}^t & K_{23}^t \\ K_{31}^t & K_{32}^t & K_{33}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_t \\ U_c \\ U_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_o \end{bmatrix} \quad \dots \quad (1)$$

ここに、添字 $t$ ,  $c$ ,  $o$ はそれぞれ、覆工の内面、内部、外面の各節点を示し、 $K_{ij}^t$ は、覆工の部分剛性マトリックスである。通常の解析では、外力を既知量として与えて変位を求めるが、上式では現場計測変位 $U_t$ のみが既知量である。式(1)のはじめの二式を取り出して変形し、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} U_c \\ U_o \end{bmatrix} = -[K_a]^{-1}[K_b]\{U_t\} \quad \dots \quad (2)$$

ここに、

$$[K_a] = \begin{bmatrix} K_{12}^t & K_{13}^t \\ K_{22}^t & K_{23}^t \end{bmatrix}, [K_b] = [K_{11}^t \quad K_{21}^t]^T$$

$T$ は転置を示す。

覆工の節点数を $N$ とすると、 $N_t=N_o$ の場合には、未知変位の数は $3(N_c+N_o)$ となるが、一方、式(2)の方程式の数も $3(N_c+N_o)$ であるから、式(2)は解くことが

できる。また、 $N_t$ が $N_o$ より大であれば、 $U_c$ ,  $U_o$ は最小二乗法の適用により、以下のように求められる。

$$\begin{bmatrix} U_c \\ U_o \end{bmatrix} = -[K_a]^{-1}[K_e]\{U_t\} \quad \dots \quad (3)$$

ここに、

$$[K_e] = [K_a]^T[K_a], [K_e] = [K_a]^T[K_b]$$

以上により、すべての節点変位が既知となったので、これを式(1)の第三式に代入することにより、覆工外面 $S_o$ に作用する節点力 $F_o$ 、および覆工地圧 $p_o$ が次のように求められる。

$$\{F_o\} = [K_f] \begin{bmatrix} U_t \\ U_c \\ U_o \end{bmatrix}, \{p_o\} = [M]^{-1}[K_f] \begin{bmatrix} U_t \\ U_c \\ U_o \end{bmatrix} \quad \dots \quad (4)$$

ここに、

$$[K_f] = [K_{31}^t, K_{32}^t, K_{33}^t],$$

$$[M] = \int_s [M_d]^T [M_s] dS$$

$M_d$ ,  $M_s$ は、変位と応力の内挿関数である。また、全節点変位が既知なので、これを変位～ひずみ式、ひずみ～応力式に適用することにより、覆工のひずみ、応力も容易に算出される。

すなわち、覆工内面の計測変位から、覆工のすべての力学量が一義的に決定されたわけである。

### (3) 地山に対する逆解析

以下では、2.(2)で得られた解析結果を用いて、地山に対する逆解析を行うこととする。

#### a) 掘削解放節点力と地山の弾性係数の関係

いま、地山のみに着目し、これにかかる節点を図-1に示すように、4種類に分類しておく。すなわち、a, bはそれぞれ、覆工外面と共有する地山節点のうち、通常の順解析で掘削解放節点力 $\mathbf{g}$ を作成させない節点、および作用させる節点、dは $\mathbf{g}$ を作成する節点のうち、覆工外面と節点を共有しない地山節点、eは上記以外の地山節点を示す。すると、FEMによる地山の剛性方程式は、次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} f_b \\ f_a \\ f_e \\ f_d \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} \\ k'_{21} & k'_{22} & k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{31} & k'_{32} & k'_{33} & k'_{34} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & k'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b \\ u_a \\ u_e \\ u_d \end{bmatrix} \quad \dots \quad (5)$$

ここに、 $k'_{ij}$ は、地山の剛性マトリックスを地山の弾性係数 $E$ で除したもの、 $f$ と $u$ は地山の節点力と節点変位である。力のつり合いおよび変位の連続条件より次式が成立する。

$$|f_a| = -|F_{o,a}|, |f_e| = |0|, |f_d| = |g_d|,$$

$$|f_b| = |g_b| - |F_{o,b}|, |u_b, u_a|^T = |U_o|^T$$

$F_{o,j}$ は、 $F_o$ のうち節点 $j$ に関する力を示す。ここで式(5)の第二、第三式を取り出して変形すれば、未知

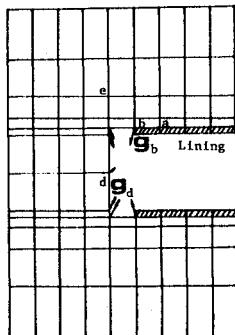


図-1 節点の分類と掘削解放節点力

変位  $u_e$ ,  $u_d$  は、既知の変位と節点力、および今のところ未知の弾性係数により、次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ u_d \end{Bmatrix} = [A] \left( -\frac{F_{o,a}}{E} \right) + [B] \{U_o\} \dots \dots \dots \quad (6)$$

ここに

$$[A] = \left( \begin{bmatrix} k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{33} & k'_{34} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{23} & k_{24} \\ k_{33} & k_{34} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} k_{23} & k_{24} \\ k_{33} & k_{34} \end{bmatrix}^T$$

$$[B] = -\left( \begin{bmatrix} k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{33} & k'_{34} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{33} & k'_{34} \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{33} & k'_{34} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k'_{21} & k'_{22} \\ k'_{31} & k'_{32} \end{bmatrix}$$

ここで、切羽掘削時の解放節点力のうち、トンネルの軸方向成分および横断面内水平方向成分の和は、それぞれ 0 であり、鉛直方向成分の和は、掘削土重量  $W$  に等しいことは明らかである<sup>9)</sup>。そこで、式(6)を式(5)に代入して  $f$  を未知量  $E$  のみの関数として表現すれば、上記解放節点力の任意方向の成分の和は、以下のように表現される。

二

$$\sum g_{bi} \left( = \sum f_{bi} + \sum F_{o,bi} \right) = a_1 E + a_2 + \sum F_{o,bi}$$

$$\sum g_{di} (= \sum f_{di}) = a_1 E + a_2$$

$$a_1 = \sum \left( \sum k'_M + \sum k'_{ik} B_{ki} \right) |U_0\rangle$$

$$a_2 = \sum \sum k'_{ik} A_{kj} \{-F_{o,a}\}$$

たとえば  $g_{bi}$  は、 $b$  に関する解放節点力の  $i$  方向成分を表わす。 $a_1$  と  $a_2$  は、覆工に対する逆解析が終了した時点で既知であり、また、解放節点力の和  $\hat{g}$  も既知であるから、式(7)を解いて  $E$  が求められる。 $E$  が求められれば、これを式(6)に代入して  $u_e$ ,  $u_d$  が算出され、さらにこれらを式(5)に代入して節点力が得られる。

#### b) 式(7)を用いた逆解析結果の検討

実際の施工では、切羽のすぐ手前で 1 次覆工を建設し、その後切羽を掘削するので、このような施工手順を考え、1 掘削に起因する覆工内面節点の直応力  $\sigma_s$  を通常の三次元 FEM 順解析より求めておく。そして、このようにして得られた変位のうち、覆工内面変位  $U_i$  のみを測定値として本逆解析に与え、 $E$  と  $\mathbf{g}$  を求める。次に、これら  $E$  と  $\mathbf{g}$  を用いて再度順解析を行い、 $\sigma_s$  を求めたと同位置、同方向の直応力  $\sigma_B$  を求め、これが先に求めた  $\sigma_s$  といかに対応するかについて検討する。なお、 $U_i$  に誤差が含まれない場合には、高精度の逆解析結果が得られたので、以下では、誤差による解の安定性を調べるために、正規乱数を発生させ、その乱数値を正しい  $U_i$  に乗じて誤差（最大 5 %）を算出し、これを正しい  $U_i$  に加えて計測変位とした場合について検討する。

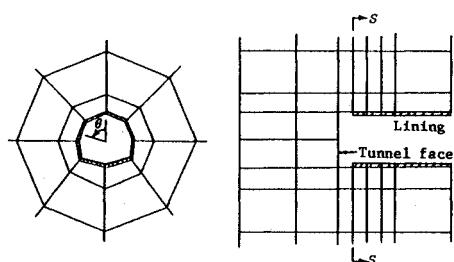
図-2は本解析で用いたトンネル周辺の要素分割図であり、トンネル掘削幅10m、1掘削長2.5m、覆工厚20cm、水平と鉛直の初期応力比  $\sigma_h/\sigma_v=0.5$ 、 $\sigma_v=200\text{tf/m}^2$ 、地山の弾性係数  $E$  とポアソン比は50 000 tf/m<sup>2</sup>、0.3、覆工の  $E_t$  と  $\nu_t$  は1 000 000 tf/m<sup>2</sup>、0.15であり、以下の解析でも同様である。

表-1は、図-2に示す切羽最近の覆工横断面(S-S断面)の応力(左から、トンネル軸、水平、鉛直の各成分)について、 $\sigma_s$ と $\sigma_B$ を比較して示したものである。なお、 $\theta$ はクラウンから反時計方向に測った角度である。これから、逆解析に基づいて推定された覆工応力は、安定して算定されることがわかる。また、推定された地山の弾性係数 $E_B$ は53,591 t/m<sup>2</sup>、すなわち、真の $E$ に対する誤差は約7%であり、覆工応力同様、 $E$ も安定して求められた。

上記逆解析では、 $\nu$ は真値 0.3 としたが、 $\nu$ を 0.4 または 0.2 と誤って仮定して逆解析を行った結果も、上記と同程度の精度であり、したがって、 $\nu$ を間違えて仮定す

表-1  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  の比較 ( $1 \text{ tf/m}^2 \equiv 9.8 \text{ kPa}$ )

$\theta^\circ$	$\sigma_s (\text{tF/m}^2)$	$\sigma_B (\text{tF/m}^2)$
0	167	-803
45	-3	-690
90	129	99
135	-31	-871
180	-144	-567



Tunnel cross section      Section through tunnel axis

図-2 トンネル周辺の要素分割図

して逆解析を行っても、実用上問題がないことが確認できた。ただし、式(7)において、トンネル軸方向の力のつり合い式を用いるよりも、鉛直方向のそれを用いる場合において、解の変動は小さく、またその場合、 $\nu$ を実際より小さく（大きく）仮定すると、 $E_B$ は小さく（大きく）推定されることが明らかになった。

ところで、式(7)の適用にあたっては、トンネル軸方向変位を含む覆工内面の全節点変位を入力する必要がある、という欠点がある。トンネル横断面内の水平、鉛直方向の測定されていない変位は、スプライン関数の利用により、測定変位から内挿できる<sup>3)</sup>が、しかし、トンネル軸方向変位は通常、工事現場で測定されないので、本手法を現場にそのまま適用できることは明らかである。そこで、以下では、上記欠点を取り除いた新しい逆解析法を示すこととする。

### 3. 新しい逆解析法

#### (1) 式(7)を利用した逆解析法

式(7)からわかるように、 $\hat{\mathbf{g}}$ は $E$ の一次式で表される。これは、覆工と地山を別々に逆解析して初めて明らかになった関係であるが、この関係を考察することより、トンネル軸方向変位を用いず、また測定変位数も格段に少なくできる逆解析法を示すことができる。

いま、覆工と地山を一体として剛性方程式を示せば、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_\textcircled{1} \\ \mathbf{g}_\textcircled{2}^* \\ \mathbf{g}_\textcircled{3}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_\textcircled{1}^* \\ \mathbf{u}_\textcircled{2}^* \\ \mathbf{u}_\textcircled{3}^* \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここに、 $\mathbf{g}$ はすでに示した掘削解放節点力、 $\mathbf{g}_\textcircled{1}$ は変位拘束節点の拘束方向に作用する節点力、 $\mathbf{g}_\textcircled{3}^*$ は変位測定される覆工内面節点の力、 $\mathbf{g}_\textcircled{2}^*$ は上記以外の、変位測定されない覆工内面節点および覆工と地山の内部節点の力である。 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{u}_\textcircled{1}^*$ 、 $\mathbf{u}_\textcircled{2}^*$ および $\mathbf{u}_\textcircled{3}^*$ は、それぞれ $\mathbf{g}$ 、 $\mathbf{g}_\textcircled{1}$ 、 $\mathbf{g}_\textcircled{2}^*$ および $\mathbf{g}_\textcircled{3}^*$ に対応した変位であり、既知量には\*を付けて。式(8)において、 $\mathbf{g}_\textcircled{2}^*$ 、 $\mathbf{g}_\textcircled{3}^*$ および $\mathbf{u}_\textcircled{3}^*$ がともに0であることを考慮すると、 $\mathbf{g}$ は次式のように、覆工内面の測定変位 $\mathbf{u}_\textcircled{3}^*$ で表現される。

$$\{\mathbf{g}\} = [\mathbf{C}] \{\mathbf{u}_\textcircled{3}^*\} \quad (9)$$

$$[\mathbf{C}] = -[k_{11} \ k_{13}] \begin{bmatrix} k_{31} & k_{33} \\ k_{41} & k_{43} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{34} \\ k_{44} \end{bmatrix} + [k_{14}]$$

ただし、 $\mathbf{u}_\textcircled{3}^*$ の成分数が $\mathbf{g}$ のそれより大なる場合には、式(9)に最小二乗法を適用すればよい<sup>3)</sup>。式(9)から、たとえば、掘削解放節点力の鉛直方向成分 $g_{vi}$ を取り出して鉛直方向のつり合い関係を示すと、

$$\sum_i g_{vi} - W = \sum_i \sum_j C_{ij} u_{\textcircled{3}j}^* - W \quad (10)$$

上式において、 $C_{ij}$ には未知の $E$ 、 $\nu$ が含まれている。

ところで、従来の直接定式化法による逆解析法では、

$\mathbf{g}$ を仮定して変位 $\mathbf{u}_j$ を解析し、これと覆工および地山の計測変位 $u_j^*$ により目的関数 $J$ を以下のように定義し、

$$J = \sum_{j=1}^{N_u} (u_j^* - u_j)^2 \quad (N_u: \text{計測変位数}) \quad (11)$$

$J$ を最小ならしめる材料定数を推定値としていた。しかし、既述のように、 $\mathbf{g}$ は地山の初期応力や既設覆工の地圧の影響を受けるため、 $\mathbf{g}$ を精度よく仮定することは不可能であり、したがって、 $\mathbf{g}$ をあらかじめ仮定して材料定数を推定するこの手法は、現実的でない。

一方、式(10)において、真の $E$ 、 $\nu$ を代入すると明らかに右辺は0になることから、次式のように、式(10)を目的関数 $J_1$ に採用すれば、 $\mathbf{g}$ を仮定せずともよく、好都合である。

$$J_1 = \sum_i \sum_j C_{ij} u_{\textcircled{3}j}^* - W \quad (12)$$

そこで、式(12)の妥当性を検討するために、 $E$ の初期値を70 000 tf/m<sup>2</sup>とし、覆工内面変位のすべてが測定されたとして、シンプレス法により、 $J_1$ および $E$ の収束状況を求め、その結果を示したのが図-3である。ただし要素分割は図-4のとおりであり、本数値解析では $W$ は $\mathbf{g}$ に比べて小であるから $W=0$ と仮定し、以下の解析でも同様である。図-3からわかるように、 $E$ は非常に精度よく求められている( $E_B=49\,605\,\text{tf}/\text{m}^2$ )。すなわち、式(12)、ひいては式(10)の妥当性が確認できたわけである。しかし、最適化手法を式(12)に適用して $E$ を求める場合、プログラム内で行われる三次元解析の回数は多く（この場合、9回）、これが大きな障害となる。そこで、以下では、最適化手法を用いずに式

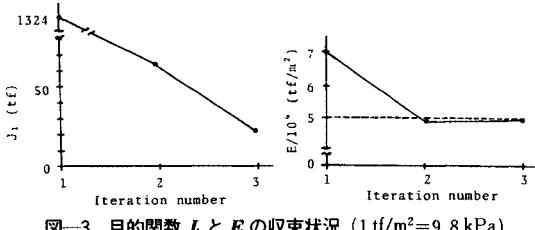


図-3 目的関数 $J_1$ と $E$ の収束状況 ( $1\,\text{tf}/\text{m}^2 = 9.8\,\text{kPa}$ )

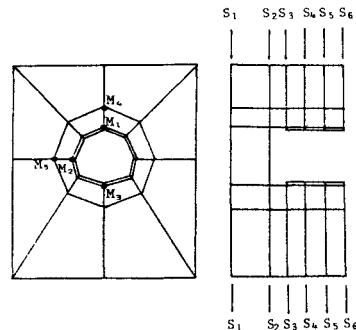


図-4 FEM 要素分割図

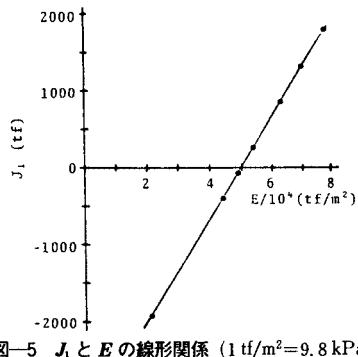


図-5  $J_1$  と  $E$  の線形関係 ( $1 \text{ tf/m}^2 = 9.8 \text{ kPa}$ )

(12) を解く手法を示すこととする.

## (2) 最適化手法を用いない式 (12) の解析法

$\hat{g}$  と  $E$  の線形関係(式(7))は、覆工と地山を個別に取り扱った場合だけでなく、それらを一体として逆解析した式(12)においても、当然成立しなければならない。たとえば、図-5は式(12)の  $E$  にいくつかの任意の値を与え、それに対応する  $J_1$  を求めた結果をプロットしたものであるが、これから、 $J_1$  と  $E$  の間に線形関係が成立しているのが確認できる。また、ロックボルトが打設されている場合も、同様の関係が認められた。すなわち、式(12)は次のように変形できるはずである。

そこで、あらかじめ任意の 2 つの  $E$  値を与えて ( $E_1$  と  $E_2$ )、それらに対する  $J_i$  の値を求めておく ( $JX_1$  と  $JX_2$ )。次に、これら二組の値を式 (13) に適用すれば、これに含まれる定数  $a, b$  が次のように決定される。

$$\left. \begin{array}{l} a = (JX_1 - JX_2)/(E_1 - E_2) \\ b = JX_1 - E_1, (JX_1 - JX_2)/(E_1 - E_2) \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (14)$$

$E$  が真値の場合、式 (13) の  $J_1$  は 0 となるから、逆解析で求められる  $E_B$  は、

ここで、上記手法の妥当性を検討するため  $E_1 = 70\,000$   $\text{tf}/\text{m}^2$ ,  $E_2 = 100\,000$   $\text{tf}/\text{m}^2$  を用い、以下の 4 つの場合について、式 (14), (15) による  $E_B$  の推定を試みた。

### ケース1：覆工内面節点変位の全成分を入力した場合

ケース2：覆工内面節点変位のうち、トンネル軸方向

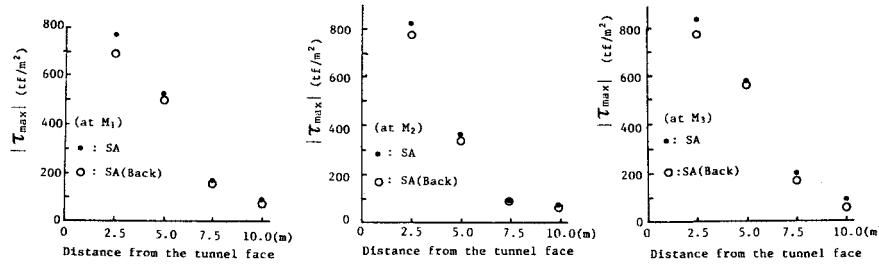


図-6 順解析(SA)と再度順解析(SA(Back))による覆工応力の比較( $1\text{tf}/\text{m}^2 = 9.8\text{kPa}$ )

成分以外の全成分を入力した場合.

ケース3：ケース2の場合において、2.(3)b)と同様の計測誤差を与えた場合。

ケース4：以上の各ケースでは、 $\nu$ に真値0.3を与えたが、本ケースでは $\nu=0.4$ を与え、ケース2と同様の解析を行った場合。

以上の結果を表-2に示す。ケース1, 2の $E_B$ 値は高い精度で求められており、ケース3の $E_B$ 値は入力誤差の影響を受けているが、しかし工学上満足すべき値である。また、ケース4の結果から、 $\nu$ の誤差は $E_B$ 値にあまり影響しないことがわかる。

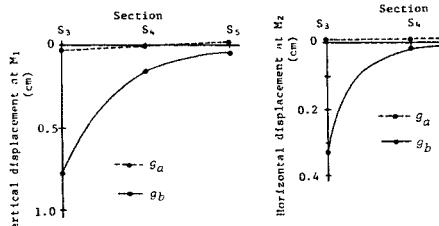
以上のようにして  $E_B$  値が求められると、これを式(9)に代入して  $\mathbf{g}$  が求められる。図-6は、切羽1掘削により生じる覆工の最大せん断応力  $\tau_{\max}$  について、上記ケース4の結果を用いた再度順解析結果(SA(Back))と、正しい結果(SA)とを比較したものである。これから、本逆解析から得られた諸量を用いて、合理的な施工条件を決定できることが理解できる。

### (3) 変位計測数の減少と応力・ひずみの算定

図-7は、順解析において、図-4の断面  $S_2$ ,  $S_3$ に作用させた解放節点力（以後、それぞれ  $g_a$ ,  $g_b$  と定義する）を個別に与えて覆工内面変位を求め、これらをクラウン ( $\theta=0^\circ$ ), 側壁 ( $\theta=90^\circ$ ), インバート中央 ( $\theta=180^\circ$ ) を通るそれぞれのトンネル縦断面上で整理・比較したものである。これから、 $g_a$ による変位は、当然のことながら  $g_b$  による変位に比べ、非常に小であるのがわかる。すなわち、計測変位  $u_{\text{obs}}^*$  から  $g_a$  を推定する際に、計測誤差の影響を強く受けすることが理解できる。そこで、 $g_b$  のみを逆解析で求め、 $g_a$  は何らかの手法で間接的に推定できれば、 $g_a$  の節点力成分数だけ計測変位数を減少でき、好都合となる。また、トンネル軸方向成分が  $u_{\text{obs}}^*$  に与える影響も小であり、これを無視しても工学上問題がないことが確認できたので、結局、逆解析では、 $g_b$

表-2 各ケースの  $E_b$  値とその誤差

Case	$E_B$ (tf/m <sup>2</sup> )	Error (%)
1	49907	0.2
2	51652	3.3
3	43438	13.1
4	49686	0.6

図-7  $g_a$  と  $g_b$  を個別に与えて求めた覆工内面変位

のトンネル横断面内の成分 ( $\bar{g}_b$ ) のみを求める、 $\bar{g}_a$  は以下の手法で間接的に推定すればよいことになる。

図-8 は、逆解析から  $\bar{g}_b$  のみを求める、 $\bar{g}_a$  は  $\bar{g}_a = \bar{g}_b$  として算定し、これと真の  $\bar{g}_a$  とを比較したものであるが、これから、 $\bar{g}_a$  は近似的に  $\bar{g}_b$  に等しいとしてもよいように思われる。

図-9 と 10 は、上記の考え方で逆解析し、求めた諸量で再度順解析 (SA (Back)) して算出した覆工の最大せん断応力  $\tau_{max}$ 、地山の最大せん断ひずみ  $\gamma_{max}$  と、それらの真の値 (SA) とを比較したものである。なお、 $M_1, M_2$  は、図-4 に示されている。これから、覆工応力のみでなく、切羽前方の先行ひずみも本手法で推定できることが確認できる。

#### (4) 剛体変位の算定

通常、トンネル現場では、切羽通過後の覆工内面相対変位とクラウン絶対沈下が計測される。覆工および平面ひずみ成立位置での地山の応力、ひずみの算定には、覆工内面相対変位を適用した逆解析の結果が利用できるが、先行ひずみ、応力の算定には、絶対変位を用いた逆解析の結果を用いないと精度よい推定ができない。そこで、通常計測される、鉛直絶対変位、水平相対変位から、水平絶対変位を算定する手法を示す。

いま、絶対鉛直変位、相対水平変位を逆解析に入力して求められる解放節点力を  $\bar{g}_{b,x}$ 、水平方向のみに単位の剛体変位を逆解析に入力して求められる解放節点力を  $\bar{g}_{b,y}$  とすると、これらの鉛直 ( $v$ )、水平 ( $h$ ) 成分の和は、式 (13) から、

$$\left. \begin{aligned} \sum \bar{g}_{b,x}^v &= a_x^v E + b_x^v, \\ \sum \bar{g}_{b,x}^h &= a_x^h E + b_x^h, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 $a_x^v - b_x^h$  は、上式の  $E$  に任意の 2 つの値を適用し、3. (2) と同様にして求められる既知量である。ここで、鉛直と水平の節点力のつり合いを考えて次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sum \bar{g}_b^v &= \sum \bar{g}_{b,x}^v + \alpha \sum \bar{g}_{b,y}^v, \\ \sum \bar{g}_b^h &= \sum \bar{g}_{b,x}^h + \alpha \sum \bar{g}_{b,y}^h, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

ここに、 $\alpha$  は水平方向の剛体変位であり、計測される相対水平変位を  $\alpha$  だけずらせば、絶対水平変位が得られる。真の  $E, \alpha$  を式 (17) に与えると、式 (17) の右辺

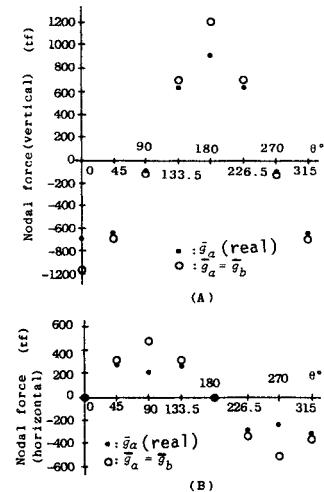
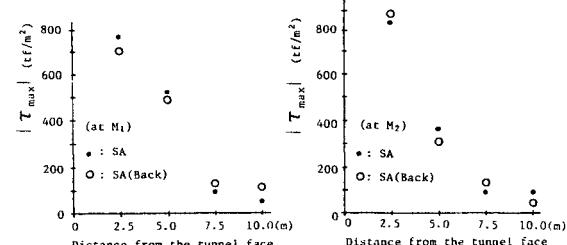
図-8 解放節点力の比較  
(1 tf/m² = 9.8 kPa)

図-9 覆工の最大せん断応力の比較 (1 tf/m² = 9.8 kPa)

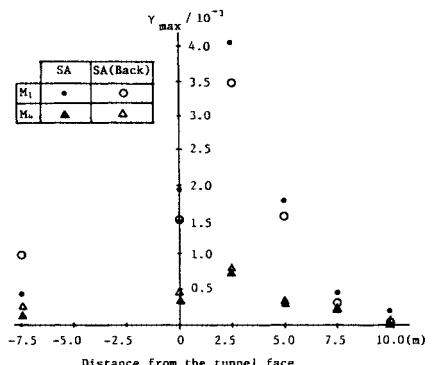


図-10 地山の最大せん断ひずみの比較

が 0 になるのは明らかだから、式 (17) に式 (16) を代入後この条件を適用すれば  $\alpha$  と  $E$  が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{a_x^v E + b_x^h}{a_x^h E + b_x^v}, \\ E &= -\frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 $A - C$  は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} A &= a_x^h \cdot a_y^v - a_x^v \cdot a_y^h, \\ B &= b_x^h \cdot b_y^v - b_x^v \cdot b_y^h, \\ C &= a_x^h \cdot b_y^v + b_x^h \cdot a_y^v - a_x^v \cdot b_y^h - b_x^v \cdot a_y^h \end{aligned} \right\}$$

式(18)で求められた $\alpha$ を用いて、相対水平変位を絶対水平変位に変換し、それと式(18)の $E$ を式(9)に代入すれば解放節点力が得られる。したがって、それらを用いれば、地山の応力、ひずみも推定できるわけである。

#### (5) 粘弾性定数の決定

時間依存性地山を線形粘弾性体と仮定した場合、その定数の逆解析は、以下のように行うことができる。

伊藤・久武<sup>10),11)</sup>は、トンネル掘削によって生じる地中および地表面の変位から、地山のクリープ関数 $\phi(t)$ を逆解析したところ、 $\phi(t)$ が次式で表現できることを示した。

$$\phi(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\bar{E}} \ln(1+t), \quad (t : \text{日})$$

そこで、以下では $\phi(t)$ は上式で仮定する。またトンネル掘削直後( $t=0$ )の逆解析で解放節点力と $E$ の求め方はすでに示したので、ここでは $\bar{E}$ のみを逆解析する手法を示すこととする。

対応原理<sup>12)</sup>によれば、経時変位 $u(t)$ は次式で求められる。

$$\{u(t)\} = L^{-1} \left[ [\tilde{K}(s)]^{-1} \left[ \frac{\mathbf{g}}{s} \right] \right]$$

ここに、 $\sim$ はラプラス変換、 $s$ はラプラス演算子、そして $L^{-1}$ はラプラス逆変換を示す。したがって、 $[\tilde{K}(s)]$ は、系の全体剛性マトリックスのラプラス変換したものである。上式にSchaperyのDirect Method<sup>13)</sup>を適用すると、

$$\{u(t)\} = [\tilde{K}(s)]^{-1} \{g\}_{s=1/(2t)}$$

ここで、任意時刻 $t=t_1$ での測定変位 $u_j^*(t_1)$ と解析変位 $u_j(t)$ を式(11)に代入し、これに最適化手法を適用すれば、未知数は1個があるので、容易に $\bar{E}$ が求められる。

### 4. 結論

本研究は、既設覆工および切羽の安定性を評価するとともに、以後の設計・施工を合理的に行うことの目的とし、覆工内面計測変位から、地山の力学定数、および切羽掘削時の解放力を三次元逆解析する手法を示したものであり、その結論を列挙すると以下のとおりである。

(1) 切羽での掘削解放節点力は、地山弾性係数の一次式で表わされるので、この節点力のつり合い条件を用いることより、非常に簡単に、弾性係数と解放節点力を逆解析する手法が示された。

(2) 本手法では、地中変位を測定する必要はなく、測定容易な覆工内面変位のみが用いられる。

(3) 種々の数値解析を行い、その結果を考察することより、工学上許容できる精度を保つつつ、変位計測点数を大幅に減少させることができた。

(4) 従来、先行ひずみは地中変位計測によってしか

求められなかったが、本手法によれば、覆工内面計測変位から算定でき、したがって、本手法は、切羽前方地山の施工管理の一助となり得る。

(5) 時間依存性地山のクリープ関数の逆解析手法が示された。したがって、地山および覆工の経時的な応力・ひずみ・変位の予測が可能となった。

なお、本研究を進めるにあたり、種々ご指導を賜わった元大阪大学教授、現在大阪工業大学の伊藤富雄教授、および計算を手伝って頂いた元大阪大学大学院生（現、鹿島建設）の大田哲也君に謝意を表します。

### 参考文献

- 1) Kovářík, K., Amstad, Ch. and Fritz, P. : Integrated Measuring Technique for Rock Pressure Determination, Proc. Int. Sympo. on Field Measurements in Rock Mech., pp. 289~316, 1977.
- 2) Gioda, G. and Jurina, L. : Identification of Earth Pressure on Tunnel Liners, Proc. 10th Int. Conf. Soil Mech. and Foundation Engng., Vol. 1, pp. 301~304, 1981.
- 3) Hisatake, M. and Ito, T. : Back Analysis Methods to Tunnel Linings, Proc. Int. Symp. Field Measurements in Geomech., pp. 1047~1056, 1983.
- 4) 桜井春輔・武内邦文：トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法、土木学会論文報告集、No. 337, pp. 137~145, 1983.
- 5) 久武勝保・伊藤富雄・大田哲也：トンネル問題における三次元逆解析法、第16回岩盤力学に関するシンポジウム、pp. 185~189, 1984.
- 6) Hisatake, M. and Ito, T. : Back Analysis for Tunnels by Optimization Method, Proc. 5th Int. Conf. on Numerical Methods in Geomech., Vol. 2, pp. 1301~1307, 1985.
- 7) 久武勝保・伊藤富雄・上久保裕介・加藤茂樹：最適化手法を用いた三次元逆解析法のトンネル問題への適用、第19回土質工学研究発表会講演概要集、Vol. 2, pp. 1395~1396, 1984.
- 8) 荒井克彦・片瀬貴文：トンネル内空変位計測に基づく地盤変形・強度定数の推定、土質工学会論文報告集、第24巻、第2号、pp. 171~179, 1984.
- 9) Mindlin, R. D. : Stress Distribution around a Tunnel, Proc. ASCE, Vol. 69, pp. 619~642, 1939.
- 10) 伊藤富雄・久武勝保：粘弾性地山内の任意形状トンネル覆工に作用する地圧、土木学会論文報告集、第307号、pp. 51~57, 1981.
- 11) Ito, T. and Hisatake, M. : Analytical Study of NATM, Proc. 10th Int. Conf. Soil Mech. and Foundation Engng., Vol. 1, Section 2, pp. 311~314, 1981.
- 12) Lee, E. H. : Stress Analysis in Viscoelastic Bodies, Quart. Appl. Math., Vol. 13, No. 2, pp. 183~190, 1955.
- 13) Schapery, R. A. : Approximate Method of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis, Proc. 4th U.S. National Cong. Appl. Mech., Vol. 2, pp. 1075~1085, 1962.

(1986.6.20・受付)