

形状弾性ひずみエネルギーによるトンネル周辺地山の安定解析

GEOSTATIC ANALYSIS OF TUNNEL STABILITY BY DISTORTIONAL STRAIN ENERGY

西岡 隆*・松本嘉司**

By Takashi NISHIOKA and Yoshiji MATSUMOTO

The stability of tunnel is discussed from the point of geostatic distortional strain energy at each stage of tunnelling. The theoretical assumption is based on the energy concept that the collapse of tunnel occurs when distortional strain energy in the ground reaches at its maximum capacity defined by the Von Mises or Drucker-Prager's yielding conditions. The theoretical results are applied to the tunnel supporting mechanism by shotcrete and rock bolts, and design charts for tunnel supporting are presented.

Keywords : stability of tunnel, distortional strain energy, design chart

1. 緒 言

近年わが国において、吹付けコンクリートとロックボルトによって地山を直接に支保する工法が数多くのトンネルに適用され、多くの実績を積み重ねてきている。この吹付けコンクリートを中心とする支保工法は、地山を大幅に緩めることなく、地山自身がもつ耐荷能力を積極的に活用することを目的としている。したがって、掘削前の地山に対して、掘削後トンネルの周辺地山が十分塑性的な状態にとどまり、塑性化しないことが重要な条件となる。このため、この工法によってこれまでに掘削されたトンネルについては、トンネル地山の変形の計測を行って、その安全性についての検証が行われてきた。またそれとともに、さまざまな角度から研究が進められてきた^{1)~4)}。しかしながら、これらの研究にもかかわらず、トンネル計画時に、事前に吹付けコンクリートの巻厚やロックボルトの数量を正しく決定するための方法は、まだ確立されていないといつてよい。

本論文はトンネル周辺地山の安定性を掘削前後の形状

弾性ひずみエネルギーの大小関係から判定する方法を示し、その結果から、吹付けコンクリートの巻厚とロックボルトの数量がトンネル計画段階で求められるような設計図表を提案したものである。このように、本論文では実務的な設計方法を提案することを目的としているため、トンネル掘削の安全性をマクロにとらえて、破壊に至るまでのトンネル地山は等方性弾性的であるものと考え、さらにトンネル断面は円形であるとした。実際のトンネル地山は非等方性で、割れ目のある岩石である。また断面も必ずしも円形ではない。したがって、ここで示した解析はあくまで事前設計のものであるが、本論文で示した考え方を用いて、実態にあった有限要素法解析を行えば、より正しいトンネルの設計ができるものと考えている。

2. トンネル周辺地山の破壊に関する仮定

実験事実によれば、一般に等方性物質の降伏は体積変化によるではなく、形状変化によることが知られており、広く用いられる各種降伏条件はすべてこの実験事実の上に立脚している。すなわち、静水圧下では物体は常に弾性的に挙動し、物体に蓄えられる体積弾性ひずみエネルギーは限りなく増加する。そして、物質の降伏は形状変化によって物体に蓄えられる形状弾性ひずみエネル

* 正会員 工博 筑波大学助教授 構造工学系
(〒305 茨城県新治郡桜村)

** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科
(〒113 文京区本郷7-3-1)

ギーが一定の限界を超えるときに生じる。この形状弾性ひずみエネルギー U_s は、偏差応力成分を用いて以下のように表わすことができる。

$$U_s = \frac{1}{4G} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{J'_2}{2G} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

ただし、上式で σ'_{ij} は偏差応力成分で、応力を σ_{ij} 、平均応力を $\sigma_m (\equiv \delta_{ij}\sigma_{ij}/3)$ で表示すると、 $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$ の関係がある。G はせん断弾性係数であり、 J'_2 は偏差応力の第 2 不変量である。応力が主応力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) で表示される場合には、主応力の偏差応力成分 ($\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$) を用いると、式 (1) はさらに簡単な表示で表わすことができる。

$$U_s = \frac{1}{4G} (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) = \frac{J_z'}{2G} \dots \dots \dots \quad (2)$$

ここに, $\sigma'_i = \sigma_i - \sigma_m$, $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$

物質の降伏はこの形状弾性ひずみエネルギーが一定の限界を超えたときに発生する。この限界条件の設定については諸説があるが、代表的なものは、Von Mises, Tresca, Drucker-Prager, Mohr-Coulomb の 4 つである。表-1 は、この各種降伏条件に対する限界値を式(2)に代入して、地山に蓄えられ得る最大形状弾性ひずみエネルギー \bar{U} を求めたものである。ここに、 σ_y は一軸降伏応力を表わし、 c よび ϕ はそれぞれ粘着力、内部摩擦角を表わしている。また、 θ は偏差応力の第 2 不変量 J'_2 、第 3 不変量 J'_3 ($= \sigma_1' \sigma_2' \sigma_3'$) から定義される値である⁵⁾。これらをさらに一般式で表示すると、

となる。表-1には、この各種降伏条件に対する C_0 , C_1 の値を合わせて示した。Mohr-Coulomb, Drucker-Prager の降伏条件では、最大形状弾性ひずみエネルギー \bar{U}_s が平均応力 σ_m の関数となる。この事実は、 σ_m の値が大きくなるにつれて、降伏を生じさせるためにより大きな形状弾性ひずみエネルギーを必要とする事を示している。

表-1 各種降伏条件に対する形状弾性ひずみエネルギー \overline{U}_s

降伏条件	U s	C s	C i
Tresca	$\frac{1}{2G} \frac{\sigma_y^2}{4\cos^2\theta}$	0	$-\frac{\sigma_y}{2\cos\theta}$
Von Mises	$\frac{1}{2G} \frac{\sigma_y^2}{3}$	0	$-\frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$
Mohr-Coulomb	$\frac{1}{2G} \frac{3(\sin\phi \sigma_m - c \cos\phi)^2}{(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\phi \sin\theta)^2}$	$\frac{\sin\phi}{3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\phi \sin\theta}$	$\frac{3c\cos\phi}{3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\phi \sin\theta}$
Drucker-Prager	$\frac{1}{2G} \frac{12(\sin\phi \sigma_m - c \cos\phi)^2}{(3-\sin\phi)^2}$	$\frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$	$\frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3-\sin\phi)}$

ただし、 σ_y ：一軸降伏応力、 c ：粘着力、 ϕ ：内部摩擦角、 G ：せん断弾性係数
 $\theta = (1/3) \sin^{-1}[-3\sqrt{3}/2(J_z^*/J_x^{3/2})]$

表-1からわかるように、降伏条件のうち、Tresca、およびMohr-Coulombの降伏条件はそれぞれVon Mises、Drucker-Pragerの降伏条件に類似しているから、ここではVon Misesの降伏条件、Drucker-Pragerの降伏条件を例にとってトンネル地山の安定性判定に用いることとする。

3. トンネル掘削前の地山に蓄えられている形狀弾性ひずみエネルギーと地山の安定性指標

トンネル掘削前の地山では、トンネル設置深度で上載圧 $-s$ が鉛直方向の応力として作用する。側方から作用する水平方向の応力は、側圧係数を k とすれば、 $-ks$ で表わすことができる。したがって、掘削前地山に蓄えられている形状弾性ひずみエネルギーを $U_s^{(1)}$ で表わせば、 $\sigma_1 = -s$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -ks$ と置くことによって、式(2)から $U_s^{(1)}$ が求められる。

$$U_s^{(1)} = \frac{s^2}{2G} F^{(1)}(k) \dots \quad (4)$$

二二七

地山に蓄えられ得る最大形状弾性ひずみエネルギーは表-1に示す \bar{U}_s であるから、 $\bar{U}_s - U_s^{(1)}$ の値が大きいものほど、掘削に適した地山である。したがって、 $\bar{U}_s - U_s^{(1)}$ は掘削のための地山のポテンシャルともいうべき量である。掘削前の地山の平均応力は $\sigma_m = -(2k+1)s/3$ であるから、これを表-1に示す \bar{U}_s の値に代入し、 \bar{U}_s を次のように表示する。

ここで $\bar{F}^{(1)}$ はそれぞれの降伏条件に応じて表-2に示す値となる。よって地山のポテンシャル $\bar{U}_s^{(1)} - U_s^{(1)}$ は

$$\overline{U}_s^{(1)} - U_s^{(1)} = \frac{s^2}{2G} (\overline{F}^{(1)} - F^{(1)}) \\ = \frac{s^2}{2G} \Delta F^{(1)} \dots \dots \dots (7)$$

で表わすことができる。ここで $\bar{F}^{(1)}$ の関数形は、どの降伏条件を用いるかによって異なる。式(7)において $\Delta F^{(1)}$ はトンネル設置深度の定まっている場合に、トンネル掘削のための安定指標とみなすことができる。Von Mises, Drucker-Prager の降伏条件を例にとって、これを示すと次式のようになる。

$$\begin{aligned}\Delta F^{(1)} &= \overline{F}^{(1)}(\sigma_y/s) - F^{(1)}(k) \\ &= \frac{1}{3} [(\sigma_y/s)^2 - (1-k)^2] \\ \Delta F^{(1)} &= \overline{F}^{(1)}(k, 2c/s, \phi) - F^{(1)}(k) \\ &= \frac{1}{3} \left[\left\{ \frac{2(2k+1)\sin\phi + 3(2c/s)\cos\phi}{3-\sin\phi} \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. - (1-k)^2 \right] \dots \dots \dots \quad (8)\end{aligned}$$

式(8)の第1式において、 σ_y/s は地山強度比にほかならない²⁾。すなわち、Von Misesの降伏条件を判定の基準に用いる場合には、地山強度比が大きく、側圧係数 k が1に近い地山ほど、地山のボテンシャルが大きいことを表わしている。一方 Drucker-Prager の降伏条件では、側圧係数 k 、内部摩擦角 ϕ 、 $2c/s$ の値によって変化する。この第2の式で内部摩擦角 ϕ を零にとると、第1式において地山強度比 σ_y/s を $2c/s$ に置き換えたことにはかならない。以後 $2c/s$ を地山粘着力比と名付ける。

4. 掘削後の形状弾性ひずみエネルギーと地山の安定性

図-1 に示すように、平面応力状態における二次元無限弾性体内にあけられた半径 r_0 の円孔周辺の応力場、変位場は次式で与えられる¹¹⁾。

$$\sigma_{rr}^{(2)}(r, \theta) = -\frac{s}{2}(1+k)(1-x^2) + \frac{s}{2}(1-k)(1-4x^2+3x^4)\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, \theta) = -\frac{s}{2}(1+k)(1+x^2) - \frac{s}{2}(1-k)(1+3x^4)\cos 2\theta$$

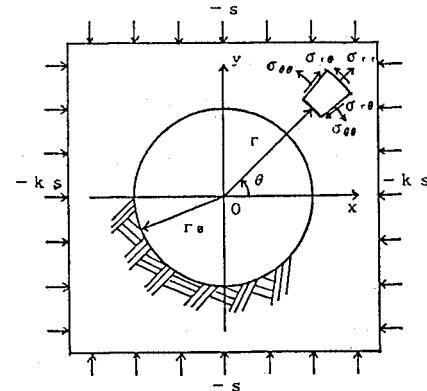


図-1 円孔周辺の応力場

$$\sigma_{r\theta}^{(2)}(r, \theta) = -\frac{s}{2}(1-k)(1+2x^2-3x^4)\sin 2\theta \quad \dots \quad (9)$$

$$u_r^{R(2)}(r, \theta) = -\frac{s r_0 (1 + \nu_R)}{2E_R} [(1 + k) x \\ - (1 - k) x^3 (1 - \nu_R) - x^2] \cos 2\theta$$

$$u_{\theta}^{R(2)}(r, \theta) = \frac{s r_0 (1 + \nu_R)}{2 E_R} (1 - k) x |2 (1 - 2 \nu_R) + r^2| \sin 2\theta \dots \quad (10)$$

ここに

$$x = r_0/r$$

上式で E_R , ν_R はそれぞれ地山の変形係数, ポアソン比を表わしている。平面ひずみ状態では、上式において $\nu_R \rightarrow \nu_R/(1 - \nu_R)$, $E_R \rightarrow E_R/(1 - \nu_R^2)$ と置き換えればよい。エネルギーについても以後同様の変換を行って求めてい。応力分布の一例を図-2に示す。側圧係数 k が 1 のときには、せん断応力 $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$ であるが、 $k=1$ では常に円孔周辺にせん断応力が発生する。円周方向応力 $\sigma_{\theta\theta}(r, \theta)$ は円孔壁で最大で、側壁では $-(3-k)s$, 天端では $-(3k-1)s$ の値になる。また、円孔中心から遠ざかるにつれてしだいに減少し、 $r=2r_0$ 以遠の位置ではほぼ掘削前の応力に等しい。半径方向応力 $\sigma_{rr}(r, \theta)$ も同様に、 $r=2r_0$ 以遠では円孔の掘削による影響をほと

表-2 各種降伏条件に対する $\bar{F}^{(1)}$ の値

降伏条件	F^W の関数形
Tresca	$\bar{F}^W(\sigma_y/s, \theta) = \frac{(\sigma_y/s)^3}{4\cos^2\theta}$
Von Mises	$\bar{F}^W(\sigma_v/s) = \frac{(\sigma_v/s)^2}{3}$
Mohr-Coulomb	$\bar{F}^W(k, c/s, \phi, \theta) = \frac{(2k+1)\sin\phi + 3(c/s)\cos\phi}{3(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\phi\sin\theta)}^2$
Drucker-Prager	$\bar{F}^W(k, 2c/s, \phi) = \frac{(2(2k+1)\sin\phi + 3(2c/s)\cos\phi)^2}{3(3-\sin\phi)^2}$

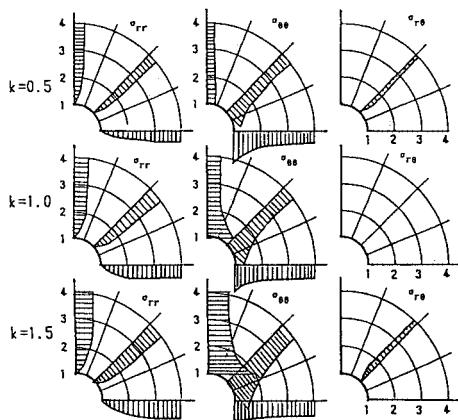


図-2 側圧係数と応力分布

んど無視することができる。この円孔を含む弾性体をトンネル周辺の地山とみなすならば、円孔は吹付けコンクリートを施さないトンネルに相当する。掘削直後の応力は、切羽前面の拘束があるために、式(9)に示す値とはならないが、支保を施さずに十分時間が経過すれば、しだいに式(9)の状態に漸近する。すなわち式(9)は切羽が進行したあとの無支保のトンネル応力状態と考えることができる。

トンネル断面が円形でなく、上下に長い楕円形の場合には、側壁および天端位置での周方向応力 $\sigma_{\theta\theta}$ はそれぞれ次式で与えられる⁹⁾。

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= -[k(1+2R_2/R_1)-k]s \quad (\text{側壁}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -[k(1+2R_1/R_2)-1]s \quad (\text{天端}) \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 R_1, R_2 はそれぞれ楕円の長径、短径を表わしている。これらの応力が互いに等しい場合には次の関係を得ることができる。

$$k = R_2/R_1 \quad (12)$$

すなわち、トンネル断面の形状は側圧係数 k の値に応じて定められる。側圧係数 k が 1 の場合には円形断面が理想的である。過去に施工されたトンネルの多くが馬蹄形であり、掘削後も形状が安定していることを

合わせ考えると、地山の側圧係数 k は一般に 1 以下の値になることが多いものと想像される。

式(9)で与えられる応力場の形状弹性ひずみエネルギー $U_s^{(2)}$ は、式(9)を式(1)に代入すれば次式によつて表わすことができる。

$$U_s^{(2)} = \frac{s^2}{2G} F^{(2)}(k, x, \theta) \quad (13)$$

ただし、

$$\begin{aligned}F^{(2)}(k, x, \theta) &= \frac{1}{12} [(1+k)^2(1+3x^4)+3(1-k)^2(1+4x^2 \\ &\quad -2x^4-12x^6+9x^8)+2(1-k)(1+k) \\ &\quad \cdot (5x^2-6x^4+9x^6)\cos 2\theta-8(1-k)^2 \\ &\quad \cdot (3x^2-5x^4)\cos^2 2\theta] \end{aligned} \quad (14)$$

このような応力場において、円孔周辺の地山が塑性化するか否かの判定は、式(13)の値を \bar{U}_s から差し引いて地山ボテンシャルを求めればよい。すなわち、円孔周辺の地山が常に $\bar{U}_s - U_s^{(2)} > 0$ の関係を満足するならば地山は無支保の状態でも塑性化することはない。この場合の平均応力 σ_m は掘削前の状態に対して変化するので、Mohr-Coulomb, Drucker-Prager の降伏条件では \bar{U}_s の値は式(6)の値とは異なってくる。そこで、新たに次式で示す $\bar{F}^{(2)}$ を定める。

$$\bar{U}_s^{(2)}(\tau, \theta) = \frac{s^2}{2G} \bar{F}^{(2)} \quad (15)$$

$\bar{F}^{(2)}$ の値を表-3に示した。Tresca, Von Mises の降伏条件については $\bar{F}^{(2)} = \bar{F}^{(1)}$ であるが、他の降伏条件では、表-1の \bar{U}_s にこの場合の平均応力

$$\sigma_m = -\frac{s}{3} [(1+k)+2(1-k)x^2 \cos 2\theta] \quad (16)$$

を代入し、ついで平面ひずみ状態に変換して求めたものである。以上より、 $\bar{F}^{(2)} > F^{(2)}(k, x, \theta)$ の関係を満足するならば、無支保の状態でも円孔周辺の地山は塑性化することはない。一方 $\bar{F}^{(2)} < F^{(2)}(k, x, \theta)$ の領域は確実に塑性化する領域である。これをVon Misesの降伏条件の場合に適用すると、図-3のようになる。この図から緩み領域のおよその形状を知ることができるばかりでな

表-3 各種降伏条件に対する $\bar{F}^{(2)}$ の関数形

降伏条件	$\bar{F}^{(2)}$
Tresca	$\bar{F}^{(2)}(\sigma_y/s, \theta) = \bar{F}^{(1)}(\sigma_y/s, \theta) = \frac{(\sigma_y/s)^2}{4\cos^2 \theta}$
Von Mises	$\bar{F}^{(2)}(\sigma_y/s) = \bar{F}^{(1)}(\sigma_y/s) = \frac{(\sigma_y/s)^2}{3}$
Mohr-Coulomb	$\bar{F}^{(2)}(k, c/s, \phi, \theta) = \frac{[(1+k)\sin\phi + 2(1-k)x^2 \cos 2\theta \sin\phi + 3(c/s)\cos\phi]^2}{3(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\phi \sin\theta)^2}$
Drucker-Prager	$\bar{F}^{(2)}(k, c/s, \phi) = \frac{4[(1+k)\sin\phi + 2(1-k)x^2 \cos 2\theta \sin\phi + 3(c/s)\cos\phi]^2}{3(3-\sin\phi)^2}$

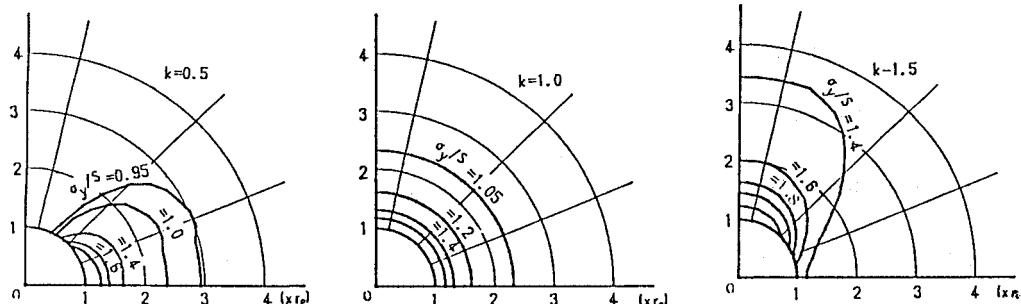


図-3 地山ポテンシャルが負となる領域 (Von Mises の降伏条件の場合)

く、円孔周辺の地山に緩み領域が生じるか否かの判定に用いることができる。緩み領域が周辺地山に全く発生しないための条件はトンネル周壁、 $x=1$ において $F^{(2)} > F^{(2)}(k, 1, \theta)$ を満足することである。これを Von Mises, Drucker-Prager の降伏条件のおのおのの場合について求めれば、以下の関係式が得られる。

1) Von Mises の降伏条件

$$\sigma_y/s > (1+k) + 2(1-k)\cos 2\theta \quad \dots \dots \dots (17-a)$$

2) Drucker-Prager の降伏条件

$$\begin{aligned} & 2(1+k)\sin\phi + 4(1-k)\cos 2\theta \sin\phi + 3(2c/s)\cos\phi \\ & \quad 3 - \sin\phi \end{aligned}$$

$$> (1+k) + 2(1-k)\cos 2\theta \quad \dots \dots \dots (17-b)$$

すなわち上式を満足するかぎり、無支保でトンネルは自立することになる。

5. 吹付けコンクリートの施工によって補われる形状弾性ひずみエネルギー

トンネルの支保工法としては地山掘削後ただちに吹付けコンクリート、ロックボルトを施工して、地山の崩壊を防ぐことが理想的である。吹付けコンクリートを施工した場合、平面応力状態でのトンネル周辺地山の応力場、変位場は以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \theta) &= \sigma_{rr}^{(2)}(r, \theta) + \sigma_{rr}^{(3)}(r, \theta) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}^{(3)}(r, \theta) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, \theta) + \sigma_{r\theta}^{(3)}(r, \theta) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (18)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(3)}(r, \theta) &= -s\alpha_A[(1+k)x^2 + (1-k)(3-4\nu_k) \\ & \quad \cdot (3x^4 - 2x^2)\cos 2\theta] \\ \sigma_{\theta\theta}^{(3)}(r, \theta) &= s\alpha_A[(1+k)x^2 + 3(1-k) \\ & \quad \cdot (3-4\nu_k)x^4 \cos 2\theta] \\ \sigma_{r\theta}^{(3)}(r, \theta) &= s\alpha_A(1-k)(3-4\nu_k)(x^2 - 3x^4)\sin 2\theta \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (19)$$

$$u_r^R(r, \theta) = u_r^{R(2)}(r, \theta) + u_r^{R(3)}(r, \theta)$$

$$u_\theta^R(r, \theta) = u_\theta^{R(2)}(r, \theta) + u_\theta^{R(3)}(r, \theta) \quad \dots \dots \dots (20)$$

そして、

$$\begin{aligned} u_r^{R(3)}(r, \theta) &= \frac{s r_0 (1 + \nu_k)}{E_R} \alpha_A [(1+k)x - (1-k) \\ & \quad \cdot (3-4\nu_k)x |2(1-\nu_k) - x^2| \cos 2\theta] \\ u_\theta^{R(3)}(r, \theta) &= \frac{s r_0 (1 + \nu_k)}{E_R} \alpha_A [(1-k)(3-4\nu_k)x \\ & \quad \cdot (x^2 + 1 - 2\nu_k) \sin 2\theta] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (21)$$

ただし α_A は次式で与えられる無次元化量である。

$$\alpha_A = \frac{E_c (1 + \nu_k)}{2 E_R (1 - \nu_c^2)} \frac{t}{r_0} \quad \dots \dots \dots (22)$$

ここに、 t は吹付けコンクリート厚、 E_R , E_c はおのおの地山および吹付けコンクリートの変形係数、 ν_k , ν_c は地山および吹付けコンクリートのポアソン比である。ただし、上記の計算では $t/r_0 \ll 1$ と仮定して、二次以上の微小項は無視している。以後 α_A を構造係数比と名付ける。 $\sigma_{rr}^{(2)}(r, \theta)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, \theta)$, $\sigma_{r\theta}^{(2)}(r, \theta)$, $u_r^{R(2)}$, $u_\theta^{R(2)}$ は式 (9), 式 (10) で示した掘削後トンネル周辺地山に生じる応力および変位である。以上の結果吹付けコンクリートの施工によって、 $\sigma_{rr}^{(3)}(r, \theta)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(3)}(r, \theta)$, $\sigma_{r\theta}^{(3)}(r, \theta)$ で与えられる付加応力が地山の塑性化を阻止するように作用し、 $u_r^{R(3)}$, $u_\theta^{R(3)}$ で与えられる付加変位が発生する。このとき地山の偏差応力の第2不变量は、式 (18) を式 (1) に代入すれば以下のように求められる。

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{3} [(\sigma_{rr}^{(2)} + \sigma_{rr}^{(3)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2)} + \sigma_{\theta\theta}^{(3)})^2 \\ & \quad - 3(\sigma_{rr}^{(2)} + \sigma_{rr}^{(3)})(\sigma_{\theta\theta}^{(2)} + \sigma_{\theta\theta}^{(3)}) \\ & \quad + 3(\sigma_{r\theta}^{(2)} + \sigma_{r\theta}^{(3)})^2] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (23)$$

式 (23) に式 (9), 式 (19) を代入し、さらに平面ひずみ状態に変換して整理すると、吹付けコンクリートを施工することによって補われる形状弾性ひずみエネルギー $U_s^{(3)}$ を求めることができる。

$$U_s^{(3)} = \frac{s^2}{2G} F^{(3)}(k, x, \theta) \quad \dots \dots \dots (24)$$

ただし、

$$\begin{aligned} F^{(3)}(k, x, \theta) &= \frac{1}{3} \alpha_A [3(1+k)^2 x^4 \\ & \quad - (1-k)^2 (3-4\nu_k) (x^2 - x^4 - 9x^6 + 9x^8)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (1-k)(1+k)|3(x^2 - 2x^4 + 3x^6) \\
 & + (3-4\nu_k)(x^2 - 3x^4 + 9x^6)|\cos 2\theta \\
 & + 2(1-k)^2(3-4\nu_k)(7x^4 - 27x^6 \\
 & + 27x^8)\cos^2 2\theta] \dots \dots \dots (25)
 \end{aligned}$$

上述の計算は吹付けコンクリートを地山掘削直後に施工した場合であって、切羽の進行とともに地山の変形が吹付けコンクリートに作用し、コンクリートに荷が作用する。十分切羽が進行した後に吹付けコンクリートを施工する場合には、式(9)で与えられる応力分布がすでに地山に発生した後の状態であるから、その時点で吹付けコンクリートを施工しても、吹付けたコンクリートに荷を負担させることはできない。その上、地山の変形も十分に発達しているため、トンネルの周辺地山には緩み領域がすでに広がってしまっている。

6. ロックボルトの施工によって補われる形状弾性ひずみエネルギー

図-2に示したように、掘削前後で応力が急変する領域はたかだか $2r_0$ 程度であり、トンネル周壁から考えれば r_0 の距離に相当する。したがって、この長さに相当するロックボルトを掘削直後に打設すれば、掘削後応力の解放によって膨張する緩み領域の変形をある程度阻止することができる^{6),7)}。

ここでは、ロックボルトによって補われる形状弾性ひずみエネルギーの限界値を求めるため、ロックボルトに働く引張り応力が降伏点に等しい一様な応力 σ_B であるとし、ロックボルトの効果を局所的、集中的でなく、全体的、分布的にとらえ、トンネル外周から地山内に一様な分布外力 σ_{rr}^B を作用させるように働くものと仮定する。ロックボルトの断面積を A_B 、トンネル軸方向長さ L に対して使用するロックボルトの本数を n とすれば、トンネル外周から地山内に一様に作用する応力は、

$$\sigma_{rr}^B = \frac{nA_B}{2\pi r_0 L} \sigma_B \dots \dots \dots (26)$$

で与えられる。その結果地山内の各点に発生する付加応力 $\sigma_{rr}^{(4)}(r, \theta)$ 、 $\sigma_{\theta\theta}^{(4)}(r, \theta)$ 、 $\sigma_{r\theta}^{(4)}(r, \theta)$ は次式のようになる¹¹⁾。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{(4)}(r, \theta) &= -\sigma_{rr}^B x^2 = -\alpha_B s x^2 \\
 \sigma_{\theta\theta}^{(4)}(r, \theta) &= \sigma_{rr}^B x^2 = \alpha_B s x^2 \\
 \sigma_{r\theta}^{(4)}(r, \theta) &= 0 \dots \dots \dots (27)
 \end{aligned}$$

また吹付けコンクリート、ロックボルトの施工によって地山に発生する変位は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 u_r^k &= u_r^{(2)}(r, \theta) + u_r^{(3)}(r, \theta) + u_r^{(4)}(r, \theta) \\
 u_\theta^k &= u_\theta^{(2)}(r, \theta) + u_\theta^{(3)}(r, \theta) \dots \dots \dots (28)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$u_r^{(4)}(r, \theta) = \frac{s r_0 (1 + \nu_k)}{E_r} \alpha_B x \dots \dots \dots (29)$$

式(28)において $x=1$ とおくと、吹付けコンクリートの外壁位置での変位を与えるが、吹付けコンクリート外壁と内壁間の相対変位はほとんど無視できるので、式(28)はトンネル内壁の変位と同等とみなすことができる。ここで α_B は、

$$\alpha_B = \frac{n A_B}{2\pi r_0 L} \frac{\sigma_B}{s} \dots \dots \dots (30)$$

で与えられる無次元化量で、以後ロックボルト比とよぶ。このロックボルトを打設することによって生じる偏差応力の第2不变量は、式(23)と同様の計算を行えばよい。したがって、ロックボルトの打設によって補われる形状弾性ひずみエネルギー $U_s^{(4)}$ は次式のように与えられる。

$$U_s^{(4)} = \frac{s^2}{2G} F^{(4)}(k, x, \theta) \dots \dots \dots (31)$$

ここで、 $F^{(4)}$ は

$$\begin{aligned}
 F^{(4)}(k, x, \theta) &= \alpha_B \{ (1+k)x^4 + (1-k)(1-2x^2) \\
 &+ 3x^4 \} x^2 \cos 2\theta \} \dots \dots \dots (32)
 \end{aligned}$$

である。ただし、上式の計算ではロックボルト比は十分小さな値として、 $\alpha_B \ll 1$ と仮定する。

7. 吹付けコンクリートとロックボルトによるトンネル安定性の改善

以上のように、掘削直後に吹付けコンクリートを施工し、さらにロックボルトの打設を行ったとすれば、地山内に蓄えられる形状弾性ひずみエネルギーは、

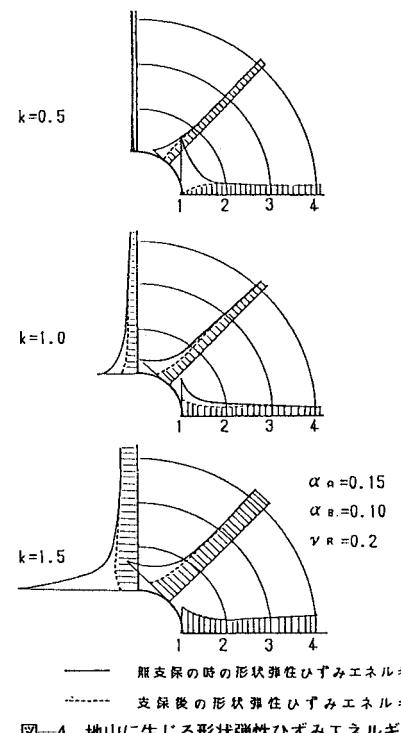


図-4 地山に生じる形状弾性ひずみエネルギー

となる。上式で右辺の括弧でくくられた項が吹付けコンクリートおよびロックboltによるトンネル安定化のための形状弾性ひずみエネルギーである。ただし、吹付けコンクリートとロックboltの相乗効果は小さいので無視している。図-4は掘削後ただちに吹付けコンクリートとロックboltを施工した場合、無支保の状態の形状弾性ひずみエネルギー $U^{(2)}$ に対して、式(33)で表わされる形状弾性ひずみエネルギー U_s がどのように変化しているかを示したものである。地山のボアソン比 ν_R は 0.2 となっている。実線は掘削後無支保の状態で十分時間が経過したときに、地山に発生する形状弾性ひずみエネルギー $U_s^{(2)}$ の分布を示し、点線は構造係数比 $\alpha_A = 0.15$ 、ロックbolt比 $\alpha_B = 0.1$ の施工を行った場合の形状弾性ひずみエネルギー $U_s (= U_s^{(2)} - U_s^{(3)} - U_s^{(4)})$ の分布である。図より、無支保の場合に対し、トンネル周辺地山 ($r \leq 2r_0$) では、形状弾性ひずみエネルギーが大幅に減少していることがわかる。特にこの傾向は、無支保の状態においてトンネル周辺地山のエネルギー分布が急激に変化する箇所で著しい。形状弾性ひずみエネルギーは側圧係数 k が 1 の場合で、完全に剛な支保工を施す場合を除いて零になることはないが、斜線で示す形状ひずみエネルギー U_s が式(15)に示す最大形状弾性ひずみエネルギー $\bar{U}_s^{(2)}$ を超えなければ、すなわち地山のボテンシャル $\bar{U}_s^{(2)} - U_s$ が正である限り、地山は破壊することはない。

上式は式 (13), (15), (24), (31) を代入することによって、以下の関係に置き換えることができる。

$$\overline{F}^{(2)} - F^{(2)}(k, x, \theta) + F^{(3)}(k, x, \theta) + F^{(4)}(k, x, \theta) > 0 \quad \dots \dots \dots \quad (35)$$

周辺地山に塑性状態が全く発生しないための条件は、式(35)において $x=1$ とおけばよい。これを Von Mises, Drucker-Prager の降伏条件について示すと、次のように表わされる。

1) Von Mises の降伏条件

$$(\sigma_y/s)^2 > \{(1+k) + 2(1-k)\cos 2\theta\}^2 - a_A [3(1+k)^2 + 6(1+k)(1-k)\cos 2\theta + 7(1+k)(1-k)(3-4\nu_R)\cos 2\theta + 14(1-k)^2(3-4\nu_R)\cos^2 2\theta] - 3a_B [(1+k) + 2(1-k)\cos 2\theta] \dots \quad (36-a)$$

2) Drucker-Prager の降伏条件

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{2(1+k)\sin\phi + 4(1-k)\cos 2\theta \sin\phi + 3(c/s)\cos\phi}{3-\sin\phi} \right\}^2 \\ & > |(1+k) + 2(1-k)\cos 2\theta|^2 \\ & - a_1 [3(1+k)^2 + 6(1+k)(1-k)\cos 2\theta \\ & + 7(1+k)(1-k)(3-4\nu_0)\cos 2\theta] \end{aligned}$$

$$+ 14(1-k)^2(3-4\nu_k) \cos^2 2\theta]$$

式 (36-a), (36-b) において, $k \leq 1$ の場合については $\theta = 0^\circ$ (側壁), $k \geq 1$ の場合には $\theta = 90^\circ$ (天端) で最も危険な状態になるから, この条件を式 (36-a, b) に代入すれば, それぞれの条件は以下のような関係で表わされる.

1) Von Mises の降伏条件

$$(\sigma_y/s)^2 > G_1(k, \alpha_A, \alpha_B) : k \leq 1$$

2) Drucker-Prager の降伏条件

$$\left\{ \frac{2(3-k)\sin\phi + 3(2c/s)\cos\phi}{3-\sin\phi} \right\}$$

$$>G_1(k, \alpha_A, \alpha_B) : k \leq 1$$

$$\left\{ \frac{2(3k-1)\sin\phi + 3(2c/s)\cos\phi}{3 - \sin\phi} \right\}$$

ただし、

$$G_1(k, \alpha_A, \alpha_B) = (3-k)^2 - \alpha_A(3-k)\{3(1+k) + 7(3-4\nu_R)(1-k)\} - 3\alpha_B(3-k)$$

$$G_2(k, \alpha_A, \alpha_B) = (3k-1)^2 - \alpha_A(3k-1)|3(1+k) - 7(3-4\nu_R)(1-k)| - 3\alpha_B(3k-1) \cdots (39)$$

式(37), 式(38)を用いて、吹付けコンクリートの巻厚とロックboltの数量を決定することができる。これまでの現場で得られた経験によれば、ロックboltは側壁で有効に働いており、そこでロックboltの応力が大きくなっていることが多いが、このことはロックboltが有効に働くような軟岩地山のトンネルにおいては、 $k < 1$ の状態になっている場合の多いことを示唆している。

Von Mises の降伏条件を用いた式 (37) の関係を図-5 (a), (b) に示した。地山のポアソン比はそれぞれ $\nu_R = 0.2$ と 0.3 にとっている。図中の 2 点鎖線および矢印は参照線である。すなわち図-5 (a) を例にとれば、ポアソン比 $\nu_R = 0.2$ 、地山強度比 $\sigma_y/s = 1.9$ 、側圧係数 $k = 0.7$ の地山にトンネルを掘削する場合、 $\alpha_B = 0.10$ になると、 $\alpha_A = 0.042$ と読み取ることができる。このようにして得られた α_A , α_B の値を用いて、式 (22), (30) から吹付けコンクリートの巻厚 t 、ロックボルトの本数 n を定めればよい。

一例として、地山の変形係数 $E_R = 1 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$ (0.98 GPa)、地山の平均単位体積重量 1.8 tf/m^3 (1800 kg/m^3)、トンネルの掘削深度 150 m 、トンネルの平均半径 $r_0 = 4 \text{ m}$ の場合、吹付けコンクリートの変形係数、ボアソン比がおのおの $E_c = 2 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$ (1.96 GPa)、 $\nu_c = 0.17$ とし、ロックボルトの断面積、降伏点をおのおの $A_s = 4.52 \text{ cm}^2$ ($\phi 24$ に相当)、 $\sigma_y = 3.724$

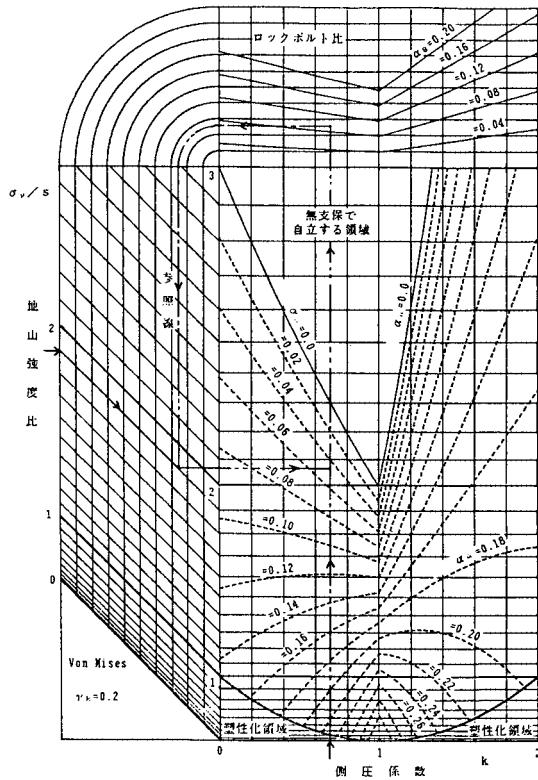


図-5(a) Von Mises の降伏条件を用いた、安全な施工をするための判定図 ($\nu_R = 0.2$)

kgf/cm^2 (365 MPa) にすると、吹付けコンクリート厚、ロックボルトの本数はそれぞれ、 $t=13 \text{ cm}$, $n=40 \text{ 本/m}$ と計算される。これでは吹付けコンクリート厚が小さく、ロックボルトの本数が多いので、 $\alpha_s=0.04$ に変更するとして、再び図-5を用いると、 $\alpha_s=0.06$ が得られる。この場合の t 、および n を再度計算すると、 $t=20 \text{ cm}$, $n=16 \text{ 本/m}$ となる。以上が、この場合の地山が塑性化しないための条件である。

式(30)からも明らかなように、 α_B の値は上載圧が小さいほど大きい。このことは、比較的土被りが浅いトンネルほど吹付けコンクリートの効果に比べてロックボルトの効果が大きく、土被りが大きくなるにつれて、ロックボルトの効果は減少することを意味している。

ポアソン比 ν_k の影響は一般に小さい。また側圧係数 k については、 $k=1$ の近傍で吹付けコンクリート、ロックボルトの必要量が少なくなる。これは、 $k=1$ の場合に掘削前の地山に蓄えられている形状弾性ひずみエネルギーが零であることによっている。

Drucker-Prager の降伏条件を用いる場合には、式(38)を用いる。一般に岩石は Von Mises の降伏条件よりも Drucker-Prager の降伏条件がよく合うとされている。しかし、実測データの多くは、地山の一軸圧縮強度 σ_0

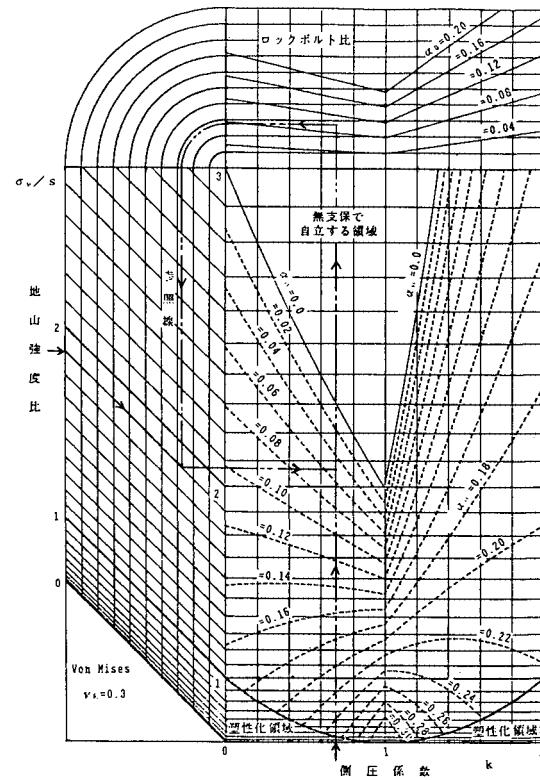


図-5(b) Von Mises の降伏条件に用いた、安全な施工をするための判定図 ($\nu_R=0.3$)

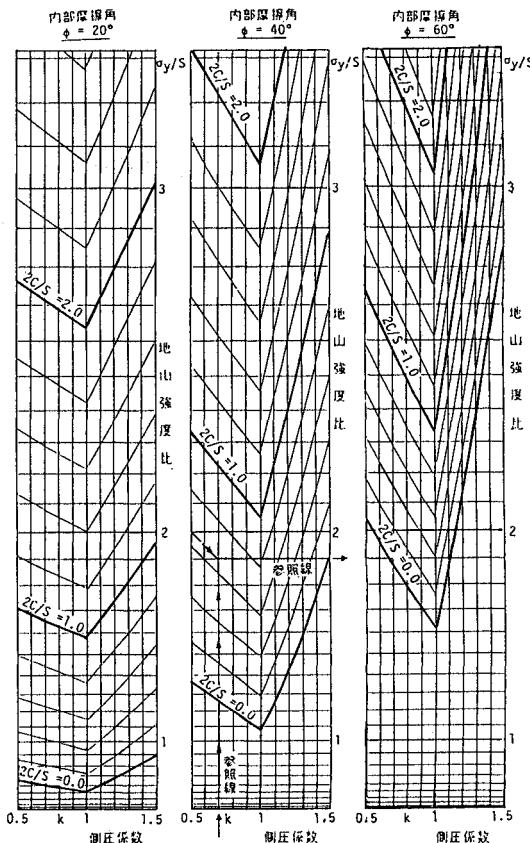
の値は求められていても、粘着力 c および内部摩擦角 ϕ を決定するためには多くの岩石試験を必要とするため、 c および ϕ の値はほとんど求められていない。式 (37) と式 (38) を比較すれば明らかのように、式 (38) を判定に用いるためには式 (37) の a_y/s を、

$$\sigma_y/s = \frac{2(3-k)\sin\phi + 3(2c/s)\cos\phi}{3-\sin\phi} : k \leq 1$$

$$\frac{2(3k-1)\sin\phi + 3(2c/s)\cos\phi}{3-\sin\phi} : k \geq 1$$

.....(40)

と置き換えればよい。したがって、式(40)から地山粘着力比 $2c/s$ 、内部摩擦角 ϕ を用いて、地山強度比 σ_y/s が求められるならば、この σ_y/s の値と図-5からトンネルの安定性を判定することができる。図-6は、このための換算図表である。一例として参照線で示すように、地山粘着力比、内部摩擦角、側圧係数がそれぞれ $2c/s = 0.65$ 、 $\phi = 40^\circ$ 、 $k = 0.7$ (または 1.13) の場合、等価な地山強度比は $\sigma_y/s = 1.9$ になることを読み取ることができる。これを図-5に当てはめ、先と同様の計算を行えばよい。図-5および図-6を用いることによって、吹付けコンクリートの厚さ、ロックボルトの本数の必要な量を決定することができる。以上はトンネルの安

図-6 $2c/s$, ϕ , k の値から等価な σ_y/s を求めるための図表

定機構を総合的、一般的にとらえて解明することを目的としているため、トンネル断面を円形と仮定し、トンネル周辺地山の物性を均一とするなど、大胆な仮定を行っている。実際に施工される個々のトンネルにおいては、地山の物性の局所的な相違とか、馬てい形によって代表されるさまざまなトンネル断面形状などが当然考慮されるべきである。そのためには、さらに有限要素法などの解析手法によって、より詳細な検討が必要となるものと考えられるが、この場合にも、形状弾性ひずみエネルギーの変化を用いた上述の安定性判定方法は容易に有限要素法による解析に組み込むことが可能である。すなわち、トンネル掘削過程をモデル化し、その施工段階における形状弾性ひずみエネルギーを有限要素法の各要素内に作用する主応力から求めれば、トンネル周辺の地山や吹付けコンクリート内のそれぞれの位置での安定性を判定することができる。

8. 結 論

本研究はトンネルの安定性判定基準を地山に蓄えられる形状弾性ひずみエネルギーから求めたものである。解

析にあたっては、トンネル地山を等方性の弾性体とし、かつトンネル断面を円形と仮定したが、実務的な立場からのトンネルの安定判定基準を示すことができたものと考えている。得られた結論をまとめると以下のようになる。

(1) 地山に蓄えられる形状弾性ひずみエネルギーの変化は、トンネルの安定性を判断するうえできわめて有効な指標である。すなわち、トンネルの各施工過程でのトンネル周辺地山に蓄えられる形状弾性ひずみエネルギーを、地山に蓄えられ得る最大形状弾性ひずみエネルギーと比較することによって、トンネルの安定性を判定することができる。この判定基準を有限要素法による解析に適用することによって、さらに詳細なトンネルの設計ができるものと考えられる。

(2) 上述の判定基準より考えれば、トンネルの安定性に影響を与える要因は、地山強度比 σ_y/s 、または地山粘着力比 $2c/s$ と内部摩擦角 ϕ 、さらに側圧係数 k 、構造係数比 a_h 、ロックボルト比 a_b である。

地山粘着力比 $2c/s$ または地山強度比 σ_y/s が大きな値である限り、地山のポテンシャルが大きく、地山は安定である。その安定性は側圧係数 k の値によって左右され、 k の値が 1 に近いほど安定である。

ロックボルトの効果は土被りが比較的浅いトンネルにおいて大きく、土被りに反比例してロックボルトの効果は減少する。

(3) トンネルの計画段階においては、事前に吹付けコンクリートの巻厚とロックボルトの数量を決めておかなければならぬが、安定なトンネルを施工するための判定条件として図-5を用いることができる。すなわち地山強度比 σ_y/s と側圧係数 k から、必要とする吹付けコンクリートの巻厚とロックボルトの数量が求められる。地山粘着力比 $2c/s$ が求められている場合には、図-6を用いて地山粘着力比を地山強度比 σ_y/s に換算する。

参 考 文 献

- 1) 岡 行俊：薄肉理論とその応用（1），トンネルと地下，1976.4.
- 2) 仲野良紀：水路トンネルの地圧と設計，農業土木試験所報告，No.19, 1974.
- 3) 土屋 敬：NATM の設計プログラムの開発，土木学会論文集，No. 346.
- 4) 桜井春輔・進士正人：マイクロコンピューターによる地下空間掘削時の安定評価，土木学会論文集，No. 358, 1985.6.
- 5) Nayack, G. C. and Zienkiewicz, O. C. : Convenient form of stress invariant for plasticity, Proc. ASCE. ST. 98, 949-954, 1972 III-1, 1984.6.
- 6) 山本 稔：ロックボルトの作用効果について，土木学会論文集，No. 277, 1978.9.

- 7) 山本 稔：大野一昭：2枚落し戸の実験からみたロック
ボルトの挙動，土木学会論文集，No. 364，1985. 12.
- 8) An Engineering Foundation Conference : Use of Shot-
crete for Underground Structural Support, ASCE Pub-
lication SP-45, July, 1973.
- 9) 山口柏樹：弾塑性学，pp. 185～188，森北出版，1975.
- 10) 松本嘉司・西岡 隆・鹿野正人：吹付けコンクリートと
ロックボルトを用いたトンネルの特性と事前設計方法，
土木学会論文集，第 376 号／III-6, pp. 101～169, 1986
年 12 月.
- 11) Timoshenko, S. and Goodier, J. N. : Theory of Elasti-
city, McGraw Hill, 1933. ほか
(1986. 4. 26・受付)