

境界要素法による非定常自由水面問題の解析

ANALYSIS OF TRANSIENT FREE SURFACE FLOW PROBLEMS BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

吉松弘行*

By Hiroyuki YOSHIMATSU

Boundary element methods have recently come to be widely employed for the analysis of porous media because of the reduction of the dimensions and the consequent saving of computer time. However, even if double nodal points are used, it has so far proven difficult to use these methods and achieve a high degree of accuracy in the computation of the potential flux at corners of domains and at seepage points. In order to obtain a flux value having a high degree accuracy, this paper investigates the use of the Laplace equation as the governing equation for the direct solution of the equation for the continuous condition of flux at the seepage point. Finally, several examples of using this method of analysis for transient free surface problems are given.

Keywords : groundwater, transient flow, numerical method, boundary element method

1. まえがき

近年、解析領域全体を対象とする有限要素法(FEM)などの領域型解法に比較して、入力データ作成の省力化や演算時間の短縮化が期待できることから、境界要素法(BEM)による数値解析法が種々の問題に広く利用されている¹⁾⁻⁴⁾。さらに、計算機の記憶容量が少なくすむことからパソコンでも解析可能である^{5), 6)}ため身近な解析法として期待を一層高めている。

多孔体中の浸透問題においても FEM とならんで強力な数値計算手法として広く利用されるに至っており^{7), 8)}、特に、自由水面を有する飽和浸透問題においては自由水面形状の時間的推移を明らかにすべきことが多く、こういった場合、FEM の領域型解法に比較して、BEM は自由水面を含む境界域のみを未知量とする境界型解法であることから、当問題に対しきわめて適した解法となっている。

浸透問題に対するBEMの適用例は、定常拘束流れ^{9), 10)}や定常自由水面問題^{11)~14)}を解析したものが多く、非定常自由水面解析に関しては、非定常問題で苦慮している浸出点の決定においてFEMより望ましい結果が

得られるという BEM の有用性を報告している山上と岡田⁸⁾や Liggett と Li⁵⁾⁻⁸⁾らの一連の研究がみられるのみである。

しかしながら、多孔体の浸出点は、非定常自由水面上に位置する節点であり、ポテンシャルおよびフラックスとも未知量で、境界条件型としては Dirichlet 型または Neumann 型のいずれにも属さない。したがって角点や浸出点においては、フラックス値が一義的に決定されないため、当点において近接 2 節点を設け解析が実施されている^{8), 10), (11), 14), 16)}。このため浸出点等でのフラックス値は解析精度が悪く解析を進めるうえで種々の工夫が必要となっている⁸⁾。

本論文では、これら浸出点での解析精度を上げるべく近接2節点を設定せず、ポテンシャルおよび2法線方向のそれぞれのフラックス値を直接求める手法について検討を行った。

2. 基礎式の導入

解析は、簡単化のため均質、等方性二次元浸透場とし、多孔体および間隙流体とも非圧縮性を有すると仮定すると、定常、非定常を問わず地下水水流の支配方程式は速度ポテンシャルを用いて次の Laplace 式で与えられる。

* 正会員 建設省土木研究所新潟試験所
(〒944 新潟県新井市錦町 2-4-6)

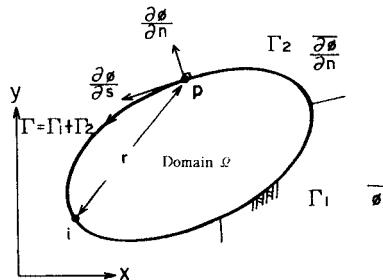


Fig. 1 Definition of boundary condition.

境界条件としては、Fig. 1 に示すように 2 種類の型がある。すなわち、基本境界条件 $\phi = \bar{\phi}$ が与えられる。Dirichlet 型の Γ_1 境界と自然境界条件 $\partial\phi/\partial n = \bar{\partial\phi}/\partial n$ が与えられる Neumann 型の Γ_2 境界である。いま Laplace 式の基本解として次式を採用し

$$\phi^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \dots \dots \dots \quad (2)$$

ここで、 r は単位ポテンシャルを負荷した点 i から考へている点 P までの距離である。

式 (1) に重みつき残差法¹⁹⁾、またはグリーンの公式²⁰⁾を適用すれば、境界上の積分方程式として次式が得られる。

$$C^i \phi^i + \int_{\Gamma} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* d\Gamma \dots \dots \dots \quad (3)$$

ここで、 \int は Cauchy の主値積分を意味し、 C^i は境界要素に分割された節点 i における内角を意味し、要素の幾何学的形状から決定され、なめらかな境界上では $1/2$ の値をとる。

境界域を N 個の要素節点に分割した後、各節点間の ϕ や $\partial\phi/\partial n$ が線形に変化するすれば式 (3) より次式が求められる。

$$C^i \phi^i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi^* d\Gamma \dots \dots \dots \quad (4)$$

ここで、 ϕ 、 $\partial\phi/\partial n$ は次式で与えられる。

$$\phi = [N_1, N_2] \begin{bmatrix} \phi_j \\ \phi_{j+1} \end{bmatrix} \dots \dots \dots \quad (5)$$

$$\cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} = [N_1, N_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial n_j} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n_{j+1}} \end{bmatrix} \dots \dots \dots \quad (6)$$

ここで、 N_1, N_2 は Fig. 2 で与えられる係数である。式 (4)、(5)、(6) より、最終的に支配方程式の離散化式として次式が求められる。

$$C^i \phi^i + \sum_{j=1}^N H_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j \dots \dots \dots \quad (7)$$

3. 角点および浸出点における特異点の導入

解析領域境界に角点および浸出点を有する非定常自由

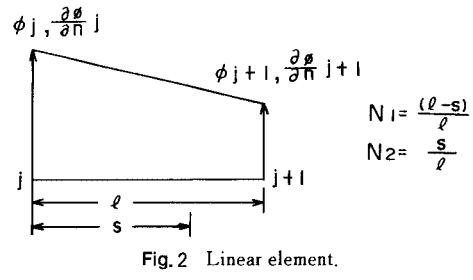


Fig. 2 Linear element.

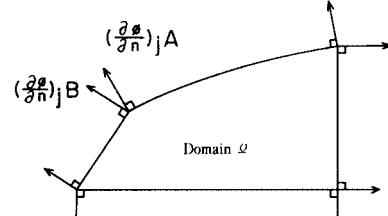


Fig. 3 Distribution of fluxes on the corner and seepage point.

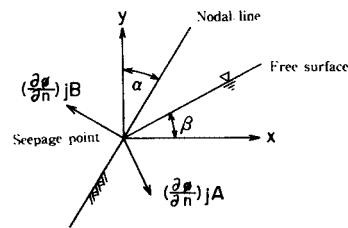


Fig. 4 Explanation of kinematic condition on seepage point.

水面問題を考えると、Fig. 3 に示すように、これら浸出点等では 2 つの法線方向でのフラックスが存在することとなる。このように、浸出点において 2 つのフラックスおよび 1 つのポテンシャルを考えると Alarcón²¹⁾によつて示されるように、式 (7) は次式で与えられる。

$$C^i \phi^i + \sum_{j=1}^N H_{ij} \phi_j = \sum_{j=1}^{N+K} G_{ij} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j \dots \dots \dots \quad (8)$$

ここで、上式では角点等の特異点は K 個あると仮定する。

式 (8) は、左辺第 2 項が $[N \times N]$ 、右辺が $[N, N+K]$ のマトリックスで与えられ、浸出点では既知境界条件の不足から正方マトリックス化できない。

一方、拘束流れや定常自由水面問題では、角点および浸出点において、いずれか一方のフラックス値が、Neumann 型境界条件として与えられるため式 (7) に帰結され容易に解くことができる。これら問題点を克服するため、流束方向近似法²¹⁾、混合要素法²²⁾や 2 重節点法^{8), 16)}が用いられているが、前述のように精度の高いフラックス値が必ずしも得られるわけではなく、多孔体からの浸出量の計算に誤差を伴ったり、自由水面上の節点の

シフト計算に工夫が必要となる。

いま、浸出点でのフラックスに関して水粒子の連続条件を考えると、その条件は Fig. 4 に示される幾何学関係から次式として求められる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial s_j} \cos(\beta+\alpha) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j_A} \sin(\beta+\alpha) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{j_B} \quad \dots \dots \dots (9)$$

ここで、 s は自由水面の境界領域、 β は自由水面の x 軸に対する角度、 α は nodal line の y 軸に対する角度、 A, B の添字は j 節点におけるそれぞれの方向におけるフラックス値を意味する。

したがって、この条件式と式 (8) を連立方程式として解くことにより、精度の高い 2 法線方向フラックス値が求められることとなる。

4. 自由水面の追跡

非定常自由水面問題においては、タイムステップごとの自由水面形状を追跡することとなるが、境界要素法ではこれまでに 2 つの手法が提案されている。

1 つは、Liggett¹⁵⁾によって提案されている手法で式 (10) で表わされる運動境界条件式を時間項に関して線形近似化し、支配方程式である式 (8) に代入し、所要時刻でのポテンシャル、フラックスを未知量とする離散化式に組みなおすものである。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\cos(\beta+\alpha)}{\cos \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

しかし、当手法では H_{ij} , G_{ij} マトリックスの係数値が t_0 時刻いわゆるタイムステップ Δt 以前の水面形状から評価されるため繰返し計算が必要である。

他の手法は、山上ら⁸⁾によって提案されている手法で Neuman ら²³⁾, France ら²⁴⁾や Desai²⁵⁾が有限要素法による飽和浸透流解析で利用している手法を工夫応用したものであって、タイムステップごとのポテンシャル分布から当時刻でのフラックス値を求めた後、ダルシー則を適用して真の水分子速度を求めておいて、これにタイムステップ Δt を乗じて所要時刻での自由水面形状を nodal line に沿ってシフトし求める手法である。

したがって、両手法の違いは、Liggett の手法がタイムステップが比較的大きくとれる反面煩雑である。山上の手法はタイムステップを小さくとる必要があり、簡便な手法である反面計算誤差が累積していくおそれがある。

本分では、タイムステップが大きくとれるメリットと非定常自由水面形状での浸出点のフラックス値を全体方程式の解として求める必要性から前者の概念を採用することにするが、Liggett の手法と相違して、式 (10) を直接支配方程式である式 (8) に代入せず、プログラム

作成時の煩雑化を防ぐ目的で式 (8), (9), (10) を連立方程式として解くこととした。

そこで、自由水面の運動境界条件である式 (10) の離散化式を得るために、当式に重みつき残差法を適用すれば次式が得られる。

$$\int_s w \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\cos(\beta+\alpha)}{\cos \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial t} \right] ds = 0 \quad \dots \dots \dots (11)$$

ここで、 w は重み関数で、 $\partial D / \partial t$ は、中山²⁶⁾や吉松²⁷⁾によって用いられている誤差の補正項である。

この誤差の補正項を採用したのは以下の理由による。

1) タイムステップごとの H_{ij} , G_{ij} マトリックスの初期値がタイムステップ前の水面形状から決定され、この水面形状はそれぞれタイムステップごとに次式で与えられる誤差ノルムで繰返し計算が打ち切られるため、式 (10) を厳密に満足しておらず誤差を含んでおり、この誤差の累積化を防ぐこと、

$$\max \left| \frac{\phi_j^{i+1} - \phi_j^i}{\phi_j^i} \right| < \epsilon \quad \dots \dots \dots (12)$$

ここで j は自由水面上の節点番号、 i は繰返し演算回数、 ϵ は打ち切り誤差である。

2) 演算時間の短縮を計るため、要素節点数を少なく設定すると、節点間隔が広くなり、一次要素を採用しているため、要素形状と水面形状が合致しなくなり、解析精度の低下が予想され、これら誤差の累積化を防ぐこと、

3) 計算機の丸め誤差や打ち切り誤差による計算誤差の累積化を防ぐこと

式 (11) において、時間項に関しては次式で与えられる線形近似化を行う。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi - \phi_0}{\Delta t} \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{D - D_0}{\Delta t} = - \frac{D_0}{\Delta t} \quad \dots \dots \dots (14)$$

ここで、 ϕ_0 , D_0 はタイムステップ前の t_0 時刻での値を意味する。

式 (11) に式 (13), (14) を代入し、若干の計算を行い整理すると次式が求められる。

$$\sum_{j=1}^M l [w_j, w_{j+1}] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial n_j} \\ \frac{\partial \phi}{\partial n_{j+1}} \end{bmatrix} + \frac{\cos(\beta+\alpha)}{\cos \alpha} \begin{bmatrix} \frac{(\phi - \phi_0)}{\Delta t_j} \\ \frac{(\phi - \phi_0)}{\Delta t_{j+1}} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} \frac{D_0}{\Delta t_j} \\ \frac{D_0}{\Delta t_{j+1}} \end{bmatrix} = 0 \quad \dots \dots \dots (15)$$

ここで、 l は節点 j と $j+1$ 間の距離、 w はそれぞれの節点の重み関数、 M は自由水面の節点総数である。

なお誤差の補正項の値は、それぞれのタイムステップごとに求められた自由水面形状から所要の値を用いて次式で算出し、次のタイムステップの D_0 の値として使用

する。

$$D = D_0 + \Delta t \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\cos(\beta+\alpha)}{\cos \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \quad (16)$$

そこで、式(15)において重み関数の任意性を考慮し、式(8)、(9)との連立方程式を求める最終的に次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、 A 、 B 、 C 、 R は、式(8)、(9)、(15)から組み立てられる係数マトリックスである。

したがって、式(17)における全体系の係数マトリックスはフルマトリックスではなく、またFEM解析にみられるような対象性を有せず、部分的にスパースなマトリックスとなるため、計算機の記憶容量が従来の手法^{8), 15)}に比較して大きめに必要となる。

式(17)を解くことによって、タイムステップごとの浸出点での2方向フラックス値を含め自由水面上のポテンシャル値が求められ、自由水面形状の非定常追跡が可能となる。当手法では、自由水面形状の決定において最小二乗法等²⁴⁾を用いての平滑化作用は、自由水面の運動境界条件を満足しない誤差以外の誤差を導入するおそれがあることと、誤差の補正項を導入しているため次章で述べる解析例においてはなんらの平滑化作用を施していない。

5. 解析例

はじめに、検証した問題は、Muskat²⁸⁾により浸出点においてフラックスの理論解が求められている、Fig.5に示す左端一定水位で右端水位が急速低下した矩形多孔体断面での定常解析問題である。解析結果はFig.6に示

すが、定常自由水面形状はVerruijt²⁹⁾のFEM解析における自由水面節点分割数に比較して少ないにもかかわらず理論解析との一致は非常によい。フラックス値に関しても、Fig.6中のB点でLiggett¹⁵⁾の提唱する特異点処理を実施していないため一部不一致箇所のみられるものの、浸出点では理論解とよく一致している。

次の解析事例は、BEMとFEMとの対比検討を行う意味で、Cheng and Li³⁰⁾によって解かれた問題である。境界条件はMuskatの解析例の概念と同じであるが、非定常自由水面形状を追跡するものとなっている。解析結果はFig.7に示されるが、彼らの計算結果とそくぶるよく一致している。

次に取り上げた事例は、駒田ら³¹⁾が実施したHele-Shaw模型実験およびFEM解析との比較計算例であ

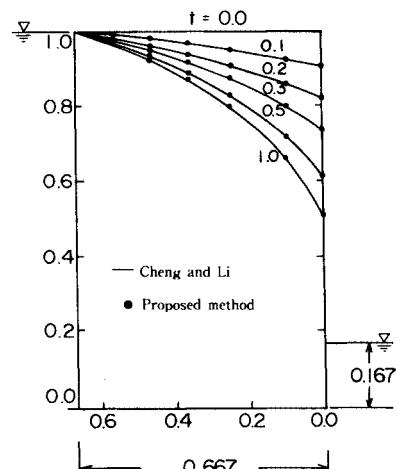


Fig. 7 Time development of free surface in rectangular earth model.

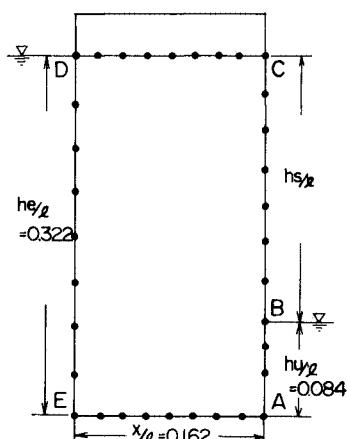


Fig. 5 Sketch of nodal points for Muskat model.

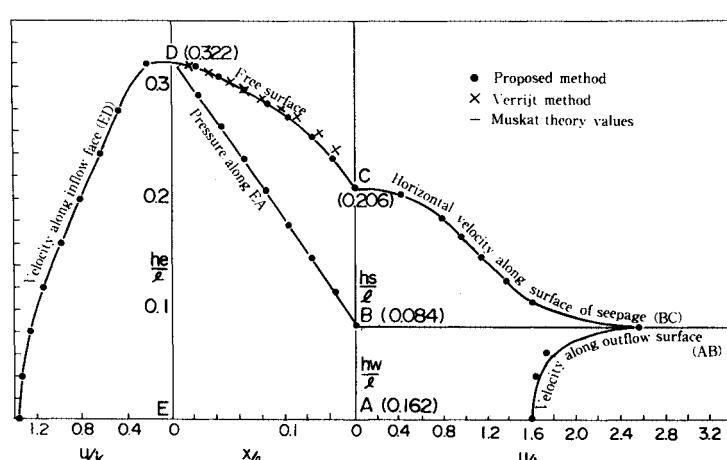


Fig. 6 Computed Flux on each surface of Muskat model.

る。当問題は、自由水面の変動に伴って要素節点があらかじめ規定された任意角度を有する nodal line に沿って自動的に移動する様子を検討したものである。Fig. 8 に初期要素分割を示すが、当図の節点番号 18~25 は近接して設定してある。これは、前述の近接 2 節点の意味ではなく、解析当初は浸出点と境界条件としての左端低下水位の標高が一致するため近接して設定したのであって、解析が進むにつれ、浸出点と左端低下水位間の距離がこの要素節点数で等分割される。

境界条件の全体マトリックスへの導入は、前例と相違して右端面が遮水壁であるため $\partial\phi/\partial n=0$ の Neumann 型条件を与える一方 ϕ を未知数として式 (17) を構成している。解析はタイムステップを 0.5 日として進め、その結果を Fig. 9 に示すが、Hele-Shaw 模型実験および山上⁸⁾による計算結果とよく一致しており、FEM 解析にみられるような浸出点が下がりすぎるということはない。

最後の事例は、杉尾³²⁾によって理論解が求められている不圧浸透層内の円形暗きよ排水による自由水面問題である。解析は、Fig. 10 に示すように対象性を考慮し、角点の境界条件は、2 つの法線方向フラックスのうち 1 つが Neumann 型境界条件で与えられるため次式によつて解析を進めた。

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

Fig. 11, 12 に、定常自由水面形状時刻でのそれぞれの円形暗きよ内圧力水頭における自由水面および暗きよ内流入量の計算結果を示す。図中、 H_A 、 H_0 、 y 、 y_0 、 x 、 Q 、 k 、 r はそれぞれ暗きよ内圧力水頭、解析当初の圧力水頭、不透水層からの地下水頭の距離、不透水層から暗きよ中心までの距離、暗きよ中心からの水平方向の距

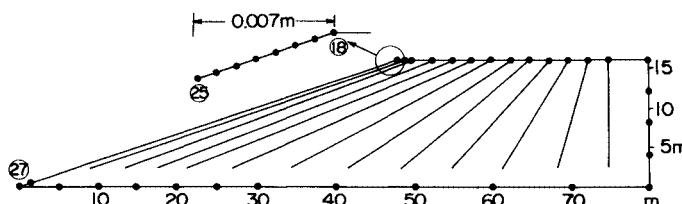


Fig. 8 Initial nodal points of earth dam model.

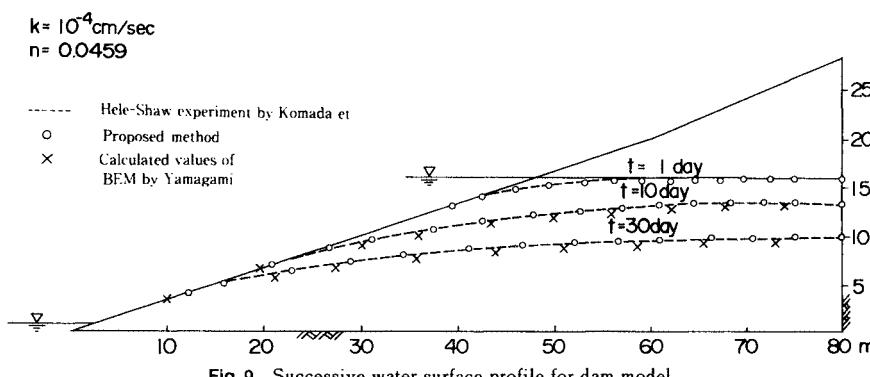


Fig. 9 Successive water surface profile for dam model.

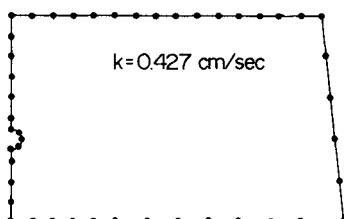


Fig. 10 Sketch of nodal points for gallery model.

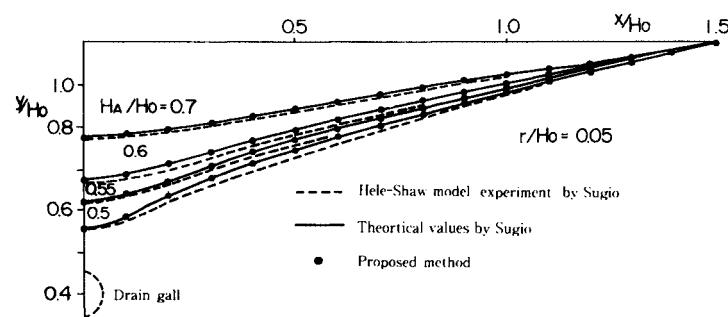


Fig. 11 Final free surface location of steady state on each boundary condition.

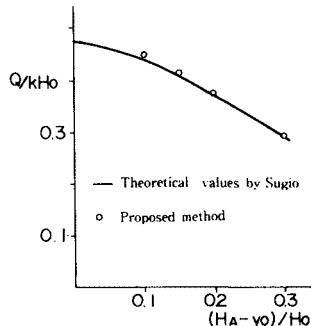


Fig. 12 Computed drainage discharge of galley.

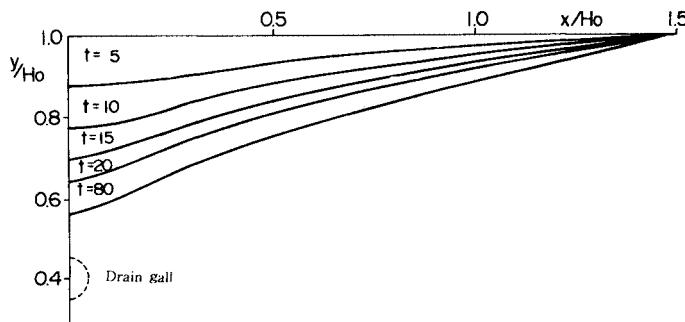


Fig. 13 Time development of free surface of galley model.

離、暗きよ内流入量、透水係数、暗きよ半径である。さらに、Fig. 13 には $H_A/H_0=0.5$ の場合について自由水面の非定常追跡結果を示す。解析結果は Hele-Shaw 模型実験といくぶんの不一致を示すが理論解との一致はよい。

これまでの解析例における計算時間を参考までに記すと Fig. 6 において 9.01 秒（節点総数 $n=34$ 、タイムステップ $\Delta t_* = 0.1$ 、計算終了時刻 $t_* = 1.0$ ）、Fig. 7 で 24.66 秒 ($n=21$, $\Delta t_* = 0.01$, $t_* = 1.0$)、Fig. 9 で 2 分 36.23 秒 ($n=37$, $\Delta t=0.5$ 日, $t=35$ 日)、Fig. 11 の $H_A/H_0=0.6$ の事例で 1 分 18.96 秒 ($n=46$, $\Delta t_* = 0.1$, $t_* = 80.0$) である。なお添記号 * は $t_* = kt/nl(k, n, l$ はそれぞれ透水係数、有効間隙率、解析領域の最大長さ) で表わされる無次元時刻を意味し、計算機はいずれも Hitac-M 280 によるものである。

6. 結 語

近年、演算時間の短縮化の期待と小型容量記憶装置の計算機でも解析可能であるとして注目をあびている BEM を用いて非定常飽和浸透流解析を実施した。本文では、角点および浸出点における未知量としての 2 つの法線方向のフラックスの取扱い方、自由水面での運動境界条件の全体方程式への導入手法について述べた。次いで解析事例を通して本解析手法の妥当性について検討を行った。この事例を通して得られた結論を要約すると以下のとおりである。

(1) 角点および浸出点における精度の高いフランクス値を求めるためには、これら節点に未知量として 2 つのフランクス値を設定する必要がある。このため未知数が増加するため一義的に解けないこととなるが、これら節点においてフランクスの連続条件としての式 (9) を導入することにより容易に求めることが可能である。

(2) 自由水面の運動境界条件を支配方程式と連立して解くことにより、直接未知量としてのポテンシャル、

フランクス値を求める能够があるので、計算機の記憶容量は多く必要としても解の安定性は高い。

(3) 精度の高いフランクス値が求められることにより容易に非定常時刻での暗きよ内排水量、堤体からの排水量が求められる。

(4) 解析事例の結果、自由水面上での要素分割数から判断して、BEM の解析精度は FEM のそれに劣るところはない。

BEM の地下水浸透流解析への適用性において、非均質多孔体の場合、FEM のそれに比較して多くの労力、制約がある。しかし、解析場の条件に応じて FEM との結合解析を志向すればその汎用性は大きく、今回提案する手法は近接 2 節点を設定しないため容易に FEM との結合が可能であると考えている。

参 考 文 献

- 1) 神谷紀生・大西和栄：境界要素法による計算力学、森北出版、1985.
- 2) Brebbia, C. A., Telles, J. C. and Wrobel, L. C. : Boundary Element Techniques, Pub. Springer-Verlag, 1984.
- 3) Brebbia, C. A. : Topics in Boundary Element Research, Pub. Springer-Verlag, 1984.
- 4) 田中正隆・田中道彦：境界要素解析の基礎、培風館、昭和 57 年。
- 5) 櫻園正人：マイコンによる境界要素解析、培風館、1984.
- 6) 戸川隼人・下関正義：パソコンによる境界要素法入門、サイエンス社、1983.
- 7) Liggett, J. A. and Liu, P. F. : Boundary integral equation method for porous media flow, Pub. George Allen and Unwin, 1983.
- 8) 山上拓男・岡田洋志：非定常自由水面問題への境界要素法の一適用例、土木学会論文報告集、第 336 号、pp. 113 ~119, 1983.
- 9) Wrobel, L. C. and Brebbia, C. A. : Boundary elements in groundwater flow problems, NATO. adv. study Inst. Ser. Vol. 92, pp. 355~364, 1982.
- 10) Lafe, O. E., Montes, J. S. et al. : Singularities in

- Darcy flow through porous media, J. of Hydra. Div., ASCE, Vol.106, HY6, pp.977~997, 1984.
- 11) 渡辺 忠・吉武美孝：境界要素法によるコア、フィルター系の浸透流解析，農業土木学会論文集，第 90 号，pp.55~62, 1980.
 - 12) 近藤 武・河端俊典：境界要素法によるフィルダム浸透流量に関する一考察，農業土木学会論文集，第 104 号，pp.81~87, 1983.
 - 13) Brebbia, C. A. (田中正隆監訳)：境界要素法の応用・1，企画センター，昭和 58 年。
 - 14) Bischoff, H. : An integral equation method to solve problems of plane groundwater movement, New development in BEM, Proc. 2th. Inter. Seminar, pp. 208~226, 1980.
 - 15) Liggett, J. A. : Location of free surface in porous media, J. of Hydra. Div., ASCE, Vol.103, HY4, pp. 353~365, 1977.
 - 16) Liu, P. L-F. and Liggett, J. A. : Boundary solution to two problems in porous media, J. of Hydra. Div., ASCE, Vol.105, HY3, pp. 171~183, 1979.
 - 17) Lennon, G. P., Liu, P. L-F. and Liggett, J. A. : Boundary integral equation solution to axi-symmetric potential flow, 2 Recharge and well problems in porous media, Water Resources Res. Vol. 15, No. 5, pp. 1107~1115, 1979.
 - 18) Lennon, G. P., Liu, P. L-F. and Liggett, J. A. : Boundary integral solutions to three-dimensional unconfined Darcy's flow, Water Resources Res. Vol. 16, No. 4, pp. 651~658, 1980.
 - 19) Brebbia, C. A. and Walker, S. (神谷・田中・田中共訳)：境界要素法の基礎と応用，培風館，昭和 58 年。
 - 20) 犬井鉄郎：偏微分方程式とその応用，コロナ社，昭和 55 年。
 - 21) Alarcon, A., Martin, A. and Paris, F. : Boundary elements in potential and elasticity theory, Computer and Structures, Vol. 10, pp. 351~362, 1978.
 - 22) Martin, A., Rodriguez, I. and Alarcon, I. : Mixed element in the boundary theory, New development in B. E. M., Proc. 2th Inter. Seminar, pp. 34~42, 1980.
 - 23) Neuman, S. A. and Witherspoon, P. A. : Analysis of nonsteady flow with a free surface using the finite element method, Water Resources Res. Vol. 7, No. 3, pp. 611~623, 1971.
 - 24) France, W. A., Parekh, C. J. and Taylor, C. : Numerical analysis of free surface seepage problems, J. of Irrig. and Drain. Div. ASCE, Vol. 97, IR1, pp. 165~179, 1971.
 - 25) Desai, C. S. : Seepage analysis of earth bank under drawdown, J. of Soil Mech. and Found. Div., ASCE, Vol. 98, SM11, pp. 1143~1162, 1972.
 - 26) 中山 司・鷺津久一郎：非線型造波問題に対する積分方程式を用いた新解法，第 5 回海洋工学シンポジウム，pp. 75~85, 昭和 56 年。
 - 27) 吉松弘行・水山高久・鈴木浩之：湛水した砂防ダムに流入する土石流の影響，第 29 回水理講演会論文集，pp. 639~644, 1985.
 - 28) Muskat, M. and Wyckoff, R. D. : The flow of homogeneous fluids through porous media, J. W. Edwards, Inc. 1964.
 - 29) Verruijt, A. : Ground water flow, The macmillan press led. 1982.
 - 30) Cheng, R. Ta-Shun and Li, C-Yem : On the solution of transient free surface flow problems in porous media by the finite element method, J. of hydrology, Vol. 29, pp. 49~63, 1973.
 - 31) 駒田広也・金沢紀一：フィルダムの貯水池水位急降下の非定常浸透流解析および安定解析，土木学会論文報告集，第 240 号，pp. 51~62, 1975.
 - 32) 杉尾 哲：水平帯状の不圧浸透層内の円形暗きよへの浸透流，土木学会論文報告集，第 321 号，pp. 71~78, 1982.

(1986.2.19・受付)