

## 底部破壊を考慮した粘性土斜面の三次元安定解析

### THREE-DIMENSIONAL STABILITY ANALYSIS OF COHESIVE SLOPES WITH CONSIDERATION OF BASE FAILURE

鵜飼 恵三\*・細堀 建司\*\*

By Keizo UGAI and Kenji HOSOBORI

This paper discusses stability analysis of isotropic, and homogeneous cohesive slopes with finite length, with consideration of base failure. The method of analysis is based on limit equilibrium techniques and variational calculus. The three-dimensional stability factors are calculated as the functions of the ratio of failure length to slope height and slope angle. Based on these calculations the three-dimensional stability charts are presented. And a method of inverse calculation of cohesion  $c$  on a three-dimensional slip surface is proposed.

*Keywords:* base failure, cohesive slope, stability analysis, three dimension

#### 1. まえがき

著者の1人（鵜飼）は、最近<sup>1),2)</sup>、粘性土斜面の三次元安定性を極限平衡法の立場から変分計算を用いて厳密に検討し、最危険すべり面形状と最小安全率を求める方法を示すとともに、三次元安定図表を作成した。しかし前報では主に斜面先破壊を対象としており、底部破壊については近似的に完全円筒すべり面を仮定したのみで、それ以上の厳密な解析は行わなかった。本研究では前報の内容を一步進め、底部破壊を考慮した粘性土斜面の三次元安定解析を変分法を用いて厳密に行い、より精密な安定図表を作成した。ただし、地盤は均質・等方と仮定した。ところで、実際の斜面が崩壊した場合、崩壊時の安全率を1とおいて地盤の強度定数を逆算することがよく行われる。従来のように、三次元効果（端部効果）を無視して二次元仮定のもとでこのような逆算を行うと、粘性土斜面の場合には粘着力  $c$  が大きめに見積もられることになる<sup>3)</sup>。このため本研究では、粘着力  $c$  の逆算値に及ぼす三次元効果を簡単に見積もる図表を作成し、逆算問題への適用を試みた。

なお、従来の三次元斜面安定に関する研究の概要について文献1), 2)を参照されたい。最近、Leshchinsky ら<sup>6)</sup>は、変分法と極限平衡法に基づく  $c \cdot \phi$  斜面の三次元解析法を提案しており、興味深い。ただし、粘性土斜面については、本研究の方が精度のよい結果を与える。

#### 2. 最小安定係数(もしくは最小安全率)の導出

Fig. 1 (a), (b) に勾配  $\beta$  の斜面と想定すべり面を示す。すべり面は  $P-P'$  を回転軸とする回転体と仮定し、円筒面(1)の両端に曲面(2)と鉛直平面(3)を接続したものと仮定する。曲面部(2)は変分計算によってその形状を定める。またすべり面は左右対称と仮定し、その半分の崩壊幅  $L$  のみを考える。Fig. 1 (a) に示すように  $x$ ,  $y$ ,  $z$  座標をとると、回転体の半径は円筒面(1)において一定値  $R_0$ 、曲面(2)において  $y$  の関数  $R(y)$  となる。変分計算によって曲面(2)の形状を定めることは関数  $R(y)$  を決定することにほかならない。

Fig. 1 (a), (b) よりすべり土塊に対する抵抗モーメント  $M_r$  は次式で表わされる<sup>2)</sup>。ただし、 $F$  は安全率。

$$M_r = \int_0^L \int_{\theta_1(y)}^{\theta_2(y)} (c/F) R(y)^2 \sqrt{1+(dR/dy)^2} dx dy$$

\* 正会員 工博 群馬大学助教授 工学部建設工学科  
(〒376 群馬県桐生市天神町一丁目)

\*\* 学生会員 群馬大学院生 工学部建設工学科(同上)

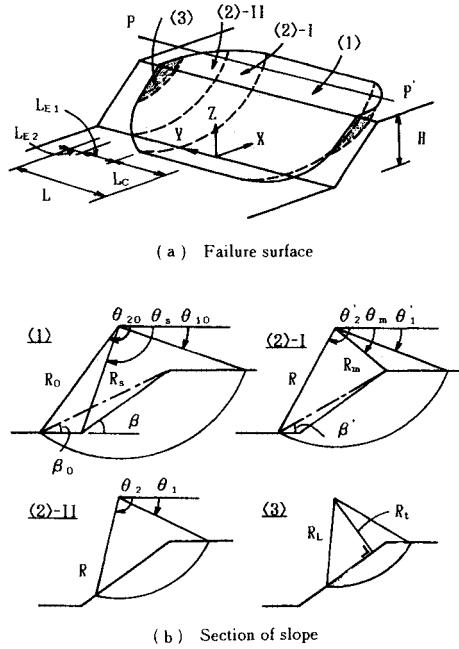


Fig. 1 Three-dimensional failure surface.

$$= M_{r1} + M_{r2} + M_{r3} + M_{r4} + M_{r5} \quad (1)$$

ここで、 $M_{r1}$  は円筒面（1）における抵抗モーメント、 $M_{r2}$  は曲面（2）のうちすべり面が斜面先の下を通過するもの（Fig. 1 (a) の (I) の部分）、 $M_{r3}$  はすべり面が斜面内を通過する部分（Fig. 1 (a) の (II) の部分）における抵抗モーメント、 $M_{r4}$ 、 $M_{r5}$  は鉛直平面（3）に対応する。 $\theta_1(y)$ 、 $\theta_2(y)$  はすべり円弧の両端の水平面からの角度である。 $M_{r1} \sim M_{r5}$  は以下のようになる。

$$M_{r1} = (c/F) L_c R_0^2 (\theta_{20} - \theta_{10}) \quad (2)$$

ここで、 $L_c$  は円筒部（1）の長さの半分、 $\theta_{10}$ 、 $\theta_{20}$  は円筒部上下端の水平面からの角度。

$$M_{r2} = (c/F) \int_0^{L_{E1}} |R(y_E)|^2 \sqrt{1 + (dR/dy_E)^2} \cdot |\theta'_2(y_E) - \theta'_1(y_E)| dy_E \quad (3)$$

ここで、  

$$\begin{cases} y_E = y - L_c \\ \theta'_1 = \sin^{-1}(R_0 \sin \theta_{10}/R) \\ \theta'_2 = \pi - \sin^{-1}(R_0 \sin \theta_{20}/R) \end{cases}$$

$$M_{r3} = (c/F) \int_{L_{E1}}^{L_{E1} + L_{E2}} |R(y_E)|^2 \sqrt{1 + (dR/dy_E)^2} \cdot |\theta_2(y_E) - \theta_1(y_E)| dy_E \quad (4)$$

ここで、  

$$\begin{cases} \theta_1 = \sin^{-1}(R_0 \sin \theta_{10}/R) \\ \theta_2 = \pi - \beta - \sin^{-1}(R_s \sin(\theta_s + \beta)/R) \end{cases}$$

ただし、 $R_s$ 、 $\theta_s$  は中心軸  $P-P'$  から斜面先までの距離および回転角を表わす。 $L_{E1}$ 、 $L_{E2}$  は Fig. 1 (a) に示すように、曲面部（2）の  $y$  方向の幅を表わす。

$$M_{r4} = (c/F) \int_{R_m}^{R_t} (\theta_2 - \theta_1) R^2 dR \quad (5)$$

$$M_{r5} = \begin{cases} 0 & (\theta_m + \beta \geq \pi/2) \\ (c/F) \int_{R_t}^{R_m} (\theta'_2 - \theta'_1) R^2 dR & (\theta_m + \beta < \pi/2) \end{cases} \quad (6)$$

ここで、  

$$\begin{cases} \theta'_1 = \pi - 2\beta - \theta'_2 \\ \theta'_2 = \pi - \beta - \sin^{-1}(R_s \sin(\theta_2 + \beta)/R) \end{cases}$$

ただし、 $R_m$ 、 $\theta_m$  は中心軸  $P-P'$  から斜面天端までの距離および回転角、 $R_t$  は  $P-P'$  から斜面におろした垂線の長さ (Fig. 1 (b)) である。 $R_L$  はすべり面が曲面部（2）から鉛直平面（3）へ接続するときの半径である。 $M_{r5}$  は前報 2) の Fig. 2 (b) の右隅に示した斜線部の抵抗モーメントを表わす。

すべり土塊に対する滑動モーメント  $M_d$  は次式で表される<sup>5)</sup>。

$$M_d = M_{d1} + M_{d2} + M_{d3} \quad (7)$$

ここで、

$$M_{d1} = \gamma L_c R_0^2 \{ f_1(\theta_{20}, \theta_{10}) - f_2(\theta_{20}, \theta_{10}) - f_3(\theta_{20}, \theta_{10}) - f_4(\theta_{20}, \theta_{10}) \} \quad (8)$$

$$M_{d2} = \gamma \int_0^{L_{E1}} |R(y_E)|^2 \{ f_1(\theta'_2, \theta'_1) - f_2(\theta'_2, \theta'_1) - f_3(\theta'_2, \theta'_1) - f_4(\theta'_2, \theta'_1) \} dy_E \quad (9)$$

$$M_{d3} = \gamma \int_{L_{E1}}^{L_{E1} + L_{E2}} |R(y_E)|^2 \{ f_1(\theta_2, \theta_1) - f_2(\theta_2, \theta_1) - f_3(\theta_2, \theta_1) \} dy_E \quad (10)$$

$$f_1(\theta_2, \theta_1) = (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)/3$$

$$f_2(\theta_2, \theta_1) = l(2 \cos \theta_1 - l) \sin \theta_1 / 6$$

$$f_3(\theta_2, \theta_1) = |\sin(\theta_2 - \theta_1) - l \sin \theta_2| (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 - l) / 6$$

$$f_4(\theta_2, \theta_1) = (H/R)^2 \sin(\theta - \theta') / (2 \sin \beta \sin \beta') \cdot |\cos \theta_1 - l - (1/3)(H/R)(\cot \beta' + \cot \beta)|$$

$$l = \sin(\theta_2 - \theta_1) / \sin \theta_2 - \sin(\theta_2 + \theta') (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) / (\sin \theta_2 \sin \beta')$$

$$\beta' = \tan^{-1} [H/(H \cot \beta'_0 + R_0 \cos \theta_{20} - R \cos \theta_2)]$$

ただし、式 (9)、(10) の中の  $\theta_1$ 、 $\theta'_1$ 、 $\theta'_2$ 、 $\theta_2$  は式 (3)、(4) の中に定義されたものと一致する。また  $\gamma$  は土の単位体積重量である。

抵抗モーメントと滑動モーメントとのつり合いより

$$M_r = M_d \quad (11)$$

が成り立つ。いま安定係数  $N_s$  を

$$N_s = \gamma HF/c \quad (H : 斜面高さ) \quad (12)$$

で定義すると、与えられた問題は式 (11)、(12) より、 $N_s$  を最小にするように未定定数  $R_L$  と未知関数  $R(y)$  を決定するという問題に帰着する。定式化は Baker ら<sup>4)</sup>による変分計算法に従って行った<sup>1), 2)</sup>。なお、式 (11)、(12) より得られる解  $N_s$  は極限解析における上界値となることを付記する<sup>6)</sup>。

### 3. 計算の方法

計算の方法は前報<sup>2)</sup>と同様である。計算の考えは、 $\beta$ ,  $L/H$ を既知とし、 $\theta_{10}$ ,  $\theta_{20}$ ,  $\beta'_0$ ,  $L_c/H$ を変数として $N_s$ の最小値( $(N_s)_{\min}$ )を求めることがあるが、あらかじめ $(N_s)_{\min}$ を与える $\theta_{10}$ ,  $\theta_{20}$ ,  $\beta'_0$ の値の目安をつけておくと計算量を少なくできる。このため、まず中央部が円筒面、端部が梢円形体面であるようなすべり面に対する計算を行ってこれらの値の目安をつけたのち、 $(N_s)_{\min}$ の正しい値を計算した。

計算は無次元化された崩壊幅 $L/H = 0.5, 1, 2, 4, 6$ に対して、斜面先破壊の場合 $\beta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ 、底部破壊の場合 $\beta = 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ$ の各ケースについて行った。

### 4. 計算結果

Fig. 2 に三次元最小安定係数 $N_{s3}(=(N_s)_{\min})$ と崩壊幅( $L/H$ )および勾配 $\beta$ との関係を示す。この図は均質な粘性土斜面の三次元安定図表を表わす。この図より、 $L$ が大きいほどもしくは $\beta$ が小さいほど底部破壊が起こりやすいため、実線(斜面先破壊)と破線(底部破壊)は離れることがわかる。

よく知られているように、二次元の場合には $\beta$ が $53^\circ$ 付近(著者らの計算では $53.6^\circ$ )で斜面先破壊から底部破壊への移行が生じ、これより小さな $\beta$ では計算上無限に深いすべりが生じる。しかし、三次元効果を考慮する場合にはこのようなことは起こらず、すべり面は有限の深さとなる。Fig. 3 は、 $\beta = 30^\circ$ の斜面について、 $L/H = 0.5, 2, 6$ の場合の三次元最危険すべり面の中央部断面形状を示したものである。崩壊幅が小さくなるほどすべり面は浅くなり、斜面先破壊に近づくことがわかる。

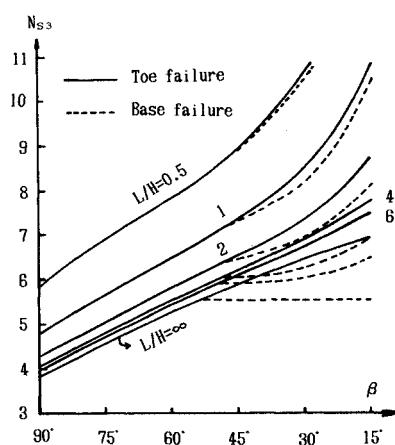


Fig. 2 3-D stability chart for cohesive slopes.

Fig. 2 を  $N_{s3}$  と  $L/H$  との関係で示したのが Fig. 4 である。ただし、この図で縦軸には  $N_{s3}$  を二次元の最小安定係数  $N_{s2}$  で割ったもの ( $= N_{s3}/N_{s2}$ 、これは端部効果による安定係数もしくは安全率の増加率を表わす) を用いた。この図より、勾配の小さい ( $\beta = 15^\circ, 30^\circ$ ) 斜面では端部効果が大きく、特に底部破壊が生じるケースではこの傾向が著しいことがわかる。

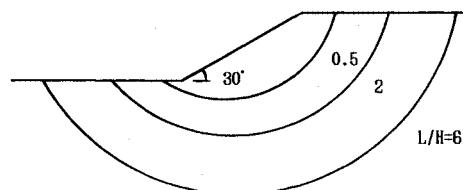


Fig. 3 Variations of 3-D failure surfaces.

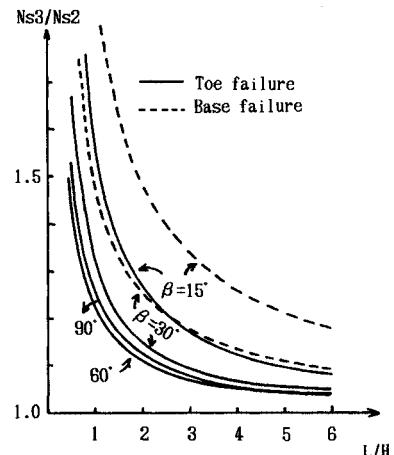


Fig. 4 3-D minimum stability factor vs.  $L/H$ .

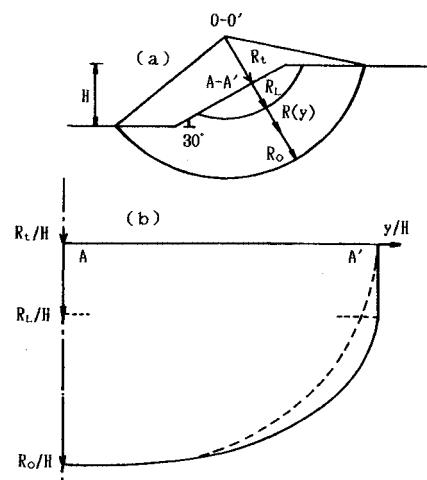
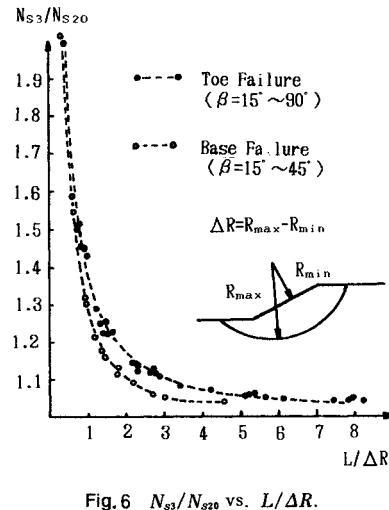


Fig. 5 Example of 3-D failure surface ( $\beta = 30^\circ$ ,  $L/H = 2$ , Base failure).

Fig. 6  $N_{s3}/N_{s20}$  vs.  $L/\Delta R$ .

理論計算より得られる三次元最危険すべり面形状の一例を Fig. 5 (a), (b) ( $\beta=30^\circ$ ,  $L/H=2$ , 底部破壊) に示す。Fig. 5 (a) はすべり面の断面形状を, Fig. 5 (b) はすべり面の半径  $R(y)$  と座標  $y$  との関係を示す。ただし, (b) 図では  $R$  と  $y$  は高さ  $H$  で割られ、無次元化されている。(b) 図にはすべり面端部を橢円近似(破線で表示)した場合も示した。このケースでは近似度は比較的よいことがわかる。近似度をさらに上げるには、すべり面形状を(1)中央の円筒面,(2)端部の鉛直平面,(3)両者をつなぐ橢円体面、の3部から構成されると仮定すればよい。変分計算による安定係数と橢円近似による安定係数の値の差は1~2%以内であり、このような近似は実用上十分な精度を有し、計算量も大幅に削減される。

崩壊時の安全率を1とおいて斜面の強度定数(粘着力  $c$ )を逆算する場合、従来のように二次元仮定で行うと、強度定数を大きめに見積もることになる<sup>3)</sup>。そこで、逆算値に及ぼす端部効果の影響を見積もるために簡便な図(Fig. 6)を作成した。この図は、三次元最小安定係数  $N_{s3}$  を同じすべり面位置における二次元安定係数  $N_{s20}$  ( $> N_{s20}$ )で割った値を、 $L/\Delta R$  に対してプロットしたものである<sup>5)</sup>。ここで、 $\Delta R$  は三次元すべり面の円筒部分の半径  $R_{\max}$  と地表面までの最短距離  $R_{\min}$  の差である。この図からわかるように、 $N_{s3}/N_{s20}$  と  $L/\Delta R$  との関係は、斜面先破壊と底部破壊とでそれぞれ  $\beta$  に無関係にほぼ1つの曲線(破線)で表わすことができる。また、

$L/\Delta R$  に対する両者の  $N_{s3}/N_{s20}$  の平均値を用いた曲線を考えると近似的に斜面先破壊と底部破壊を同一の曲線で表わすことができ、その誤差は約3%以内である。すなわち、粘性土斜面の強度の逆算問題に対して、Fig. 6 はよい精度で適用し得る可能性がある。

## 5. 結 論

粘性土斜面の安定性に及ぼす三次元効果(端部効果)に関して、底部破壊を考慮した理論解析より得られる結論は次のようである。

(1) すべり面は回転体面であるとし、(i) 中央の円筒面、(ii) 端部の鉛直平面、(iii) 両者をつなぐ曲面、の3部から構成されると仮定して、極限平衡法と変分計算法から斜面の最小安定係数を算出する方法を示した。実用上は、(iii) の部分を橢円体面で近似しても十分な精度を有し、計算量も大幅に削減される。

(2) 底部破壊を考慮した場合の粘性土斜面の三次元安定図表を作成した。

(3) 端部効果はすべり面を浅くし、底部破壊を起こりにくくする。勾配の小さい斜面では端部効果が著しい。特に、底部破壊が生じるケースではこの傾向が著しい。

(4) 崩壊後の斜面の強度定数(粘着力  $c$ )の逆算値に及ぼす端部効果を見積もるために簡便な図を作成した。この図は、均一、等方な粘性土斜面に対して、よい精度で適用し得る。

## 参 考 文 献

- 1) Ugai, K. : Three-dimensional stability analysis of vertical cohesive slopes, Soils and Foundations, Vol. 25, No. 3, pp. 41~48, 1985.
- 2) 鵜飼：粘性土斜面の3次元安定解析、土木学会論文集、第364号／III-4, 1985.
- 3) Azzouz, A. S. et al. : Three-dimensional stability analysis of four embankment failures, 10th ICSMFE, Vol. 3, pp. 343~346, 1981.
- 4) Baker, R. and Garber, M. : Variational approach to slope stability, 9th ICSMFE, Vol. 2, pp. 9~12, 1977.
- 5) Baligh, M. M. et al. : End effects on stability of cohesive slopes, ASCE, Vol. 101, GT 11, pp. 1105~1117, 1975.
- 6) Leshchinsky, D. : Three dimensional analysis of slope stability, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 9, pp. 199~223, 1985.

(1986.4.12・受付)