

差分法による津波数値計算の打ち切り誤差

TRUNCATED ERROR OF TSUNAMI NUMERICAL SIMULATION BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD

今村文彦*・後藤智明**

By Fumihiko IMAMURA and Chiaki GOTO

It is well known that truncated error of long wave simulation by the finite difference method appears as the dispersion or dissipation effects and causes numerical damping of wave height. In the present study, the truncated error of tsunami numerical simulation is investigated by using exact and approximate solutions of discretized equations. As a result of one-dimensional initial value problem, it is clarified that numerical error varies dependently of Fourier spectrum of initial wave profile and resolution $\Delta x/L$ and the value $K (= \sqrt{gh} \cdot \Delta t / \Delta x)$ are important parameters to estimate truncated error.

Keywords: tsunami, numerical simulation, truncated error

1. 序 言

近年、津波の挙動を予測するのに数値実験の手法がきわめて有効であることが認識されるようになってきた。実際、適切な初期波形が与えられ十分に細かい差分格子を用いるならば、津波の最大打ち上げ高さを誤差15%以内で再現できるとまでいわれている^{1),2)}。しかしながら、この種の計算を経済的にかつ精度よく実施するうえで最も大切であると思われる差分格子寸法の定め方は難しく、もっぱら経験に頼って計算を行っているのも現状である。

このような背景としては、スーパーコンピュータが実用化されることでわかるように電算機の計算能力の方が数値計算に関するわれわれの技術を上回って発達してきたことがあり、また、計算の安定性を満足する範囲では差分格子が細かいほど精度がよいという取束性に対する絶大なる信頼があることが挙げられる。しかし、電算機が万能視されているといっても限りがあり、大量の計算を経済的に行うことが要求されている今日、数値計算

の原点に振り返って計算誤差に関する検討を再度実施することが必要な時期に来ていると思われる。

そこで本研究では、津波数値計算の主要な誤差として打ち切り誤差を取り上げ、その発生原因および伝播特性について検討を行う。さらに、これらの検討を通し津波数値計算において信頼性の高い結果を得るための条件についても考察する。

ここで行う解析は、一次元伝播問題に関する線形長波計算の初期値問題と等価な差分方程式の厳密解および近似解を新たに求め、本来の微分方程式の解と比較検討するものである。また、代表的な津波波形を初期値にするというように現実問題に関する計算誤差の定量的評価についても行っている。ここで、厳密解とは差分方程式をフーリエ変換することにより導いた解析解を指し、近似解は差分方程式をテーラー級数展開することにより得られた擬似微分方程式から求めたものを意味する。直接差分方程式の解析解を導く方法は数学的には厳密であるが非線形問題への拡張が難しいという欠点がある。一方、擬似微分方程式を用いた方法は近似的なものであるが、物理的なイメージをもちやすく非線形問題への応用が容易であるという長所がある。

ここで取り扱う差分スキームは津波計算によく使用されるリーブ・フロッグ法およびその比較としてクラン

* 学生会員 工修 東北大学大学院 工学研究科
(〒980 仙台市荒巻字青葉)

** 正会員 工博 運輸省港湾技術研究所 水工部
(〒239 横須賀市長瀬 3-1-1)

ク・ニコルソン法，2ステップ・ラックス・ウェンドロフ法である。リープ・フロッグ法およびクランク・ニコルソン法はそれぞれ陽差分法，陰差分法の違いがあるがともに数値分散性を有するものとして知られている。2ステップ・ラックス・ウェンドロフ法は数値散逸性をもつ代表的な陽差分法である。

本研究の立場を明らかにする意味で数値計算の誤差に関する従来の研究を簡単に説明する。過去の数値計算の研究は計算法自体に関するものが多く，同時にその誤差を詳細に検討しているものは少ない。特に，ここで扱うような発展方程式に関するものは von Neuman³⁾，Lax⁴⁾に代表されるごくわずかなものしかない。しかも，それは計算の安定性と収束性に主眼がおかれたものである。差分スキームの数値分散性および数値散逸性を検討した例も若干あるが^{5),6)}，それらは理想化された次元移流方程式の定性的な結果を報告するものであり，具体的な問題に関して打ち切り誤差を研究した例は見当たらないといってもよい。その他，ここで取り上げた津波数値計算の誤差に関する研究^{1),7)}もあるが，これらは差分格子間隔を変えた計算を何種類も実施するといった数値実験的手法を用いて行ったものであり，本研究のように理論的に打ち切り誤差を検討したのではない。

2. 離散化誤差 (エリアジングの効果)

打ち切り誤差の解析を行う前に連続量を計算格子点上だけで定義した離散量とみなすときに生じる誤差すなわち離散化誤差について説明する。従来の数値計算の誤差解析では常微分方程式に関するものが多く，離散化誤差と打ち切り誤差を同じ意味に用いている場合もあるが⁸⁾，ここでは発展方程式について検討するため両者を区別して考える。すなわち，微分を差分で代用することにより生ずる打ち切り誤差と無限級数に関する計算を部分和で表わすことに起因する離散化誤差に分けるのである。

離散化誤差の発生は差分計算において表わし得る最小の波長が格子間隔の2倍のものであることから容易に理解できる。これは，また，フーリエ級数解析におけるエリアジングの効果の問題と考えてもよい。すなわち，有限フーリエ級数展開ではサンプリング間隔 (差分計算では格子間隔に相当する) の2倍を波長とする成分 (ナイキスト波数) までしか表現できずこれより大きい波数成分はナイキスト波数より小さい成分に折り重ねられる現象である。この誤差は初期波形だけを論議する範囲では問題とはならないが，その後伝播することにより打ち切り誤差の効果と重なり合って徐々にその影響が現われてくるものと考えるとよい。

エリアジングの効果は以下のように説明することができる⁹⁾。いま，連続的な波高分布が与えられているもの

とする。このとき波高 $\eta(x)$ は無限フーリエ級数を用いて

$$\eta(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{2\pi i \frac{x}{\lambda} m} \quad j=0, 1, 2, \dots, \infty \dots \dots \dots (1)$$

と表わされる。ここで， A_m は複素フーリエ係数である。また， i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表わす。一方，波高が離散量でありかつ有限個数の場合には次式の有限フーリエ級数で

$$\eta'(x) = \sum_{m=0}^{N-1} a_m e^{2\pi i \frac{x}{\lambda} m} \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1 \dots \dots \dots (2)$$

と表わされることになる。ここで， N は計算点の総数， a_m は有限複素フーリエ係数

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \eta'(x) e^{-2\pi i \frac{x}{\lambda} m} \quad m=0, 1, 2, \dots, N-1 \dots \dots \dots (3)$$

である。フーリエ係数 A_m と a_m の関係を探ってみると，差分の計算点では $\eta(x) = \eta'(x)$ であるので，式(1)を(3)に代入することにより，

$$a_m = A_m + \sum_{l=1}^{\infty} A_{lN+m} \quad m=0, 1, 2, \dots, N-1 \dots \dots \dots (4)$$

を得る。したがって，有限複素フーリエ係数 a_m は同じ波数の無限フーリエ係数 A_m とそのナイキスト波数よりも高次成分 ($lN+m$) の総和として表わされることがわかる。これがエリアジングの効果である。エリアジングの効果に関する具体的な論議は打ち切り誤差のところで行う。

3. 差分方程式の解と打ち切り誤差の性質

ここでは，線形長波式を差分法を用いて計算する場合に発生する打ち切り誤差について擬似微分方程式を用いるものおよび差分方程式の厳密解を用いるものの2種類の方法で検討する。

(1) 線形長波式の差分形

簡単なため水平床上の次元伝播問題を考える。このとき線形長波式は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

で表わされる。ここで， η は水位， M は線流量， c_0 は線形長波の波速 (\sqrt{gh})， h は静水深， g は重力加速度を意味する。

式(5)をリープ・フロッグ法，クランク・ニコルソン法および2ステップ・ラックス・ウェンドロフ法で差分化すると次式のようになる。リープ・フロッグ法では，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} [\eta_{j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{j+1/2}^{n-1/2}] + \frac{1}{\Delta x} [M_{j+1}^n - M_j^n] &= 0 \\ \frac{1}{\Delta t} [M_j^{n+1} - M_j^n] + \frac{c_0^2}{\Delta x} [\eta_{j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{j+1/2}^{n-1/2}] &= 0 \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

であり、クラック・ニコルソン法では、

$$\frac{1}{\Delta t} [\eta_j^{n+1} - \eta_j^n] + \frac{1}{4 \Delta x} [M_{j+1}^{n+1} - M_{j+1}^n + M_{j+1}^n - M_{j-1}^n] = 0$$

$$\frac{1}{\Delta t} [M_{j+1}^{n+1} - M_{j+1}^n] + \frac{c_0^2}{4 \Delta x} [\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1} + \eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n] = 0$$

.....(7)

である。2ステップ・ラックス・ウェンドロフ法は本来は2段の計算ステップを踏むことになるが、それをまとめて1段で表わすと、

$$\frac{1}{\Delta t} [\eta_j^{n+1} - \eta_j^n] + \frac{1}{2 \Delta x} [M_{j+1}^n - M_{j-1}^n] + \frac{c_0^2 \Delta t}{2 \Delta x} [\eta_{j+1}^n - 2 \eta_j^n + \eta_{j-1}^n] = 0$$

$$\frac{1}{\Delta t} [M_{j+1}^{n+1} - M_{j+1}^n] + \frac{c_0^2}{2 \Delta x} [\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n] + \frac{c_0^2 \Delta t}{2 \Delta x} [M_{j+1}^n - 2 M_j^n + M_{j-1}^n] = 0$$

.....(8)

となる。以上の差分式において $(\Delta x, \Delta t)$, (j, n) はそれぞれ (x, t) 軸方向の差分格子間隔, 格子点番号を意味する。また、図-1 にそれぞれの差分法に関して計算点の配置および計算方向を示す。

(2) 擬似微分方程式による近似解

まず、リープ・フロッグ差分式の擬似微分方程式を導くことを考える。式(6)の第1項をテーラー級数展開し差分から微分形式に書き換えると、

$$\frac{1}{\Delta t} [\eta_j^{n+1/2} - \eta_j^{n-1/2}] = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m+1} \eta}{\partial t^{2m+1}}$$

.....(9)

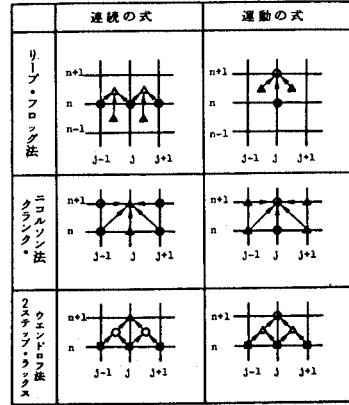
となる。ここで、無限回微分が可能であると仮定している。同様にして、この操作を他の項についても行うと、式(6)は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left[\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m+1} \eta}{\partial t^{2m+1}} + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m+1} M}{\partial x^{2m+1}} \right] = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left[\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m+1} M}{\partial t^{2m+1}} + c_0^2 \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m+1} \eta}{\partial x^{2m+1}} \right] = 0$$

.....(10)

の形で表わされることになる。この式は擬似微分方程式とよばれ、差分方程式(6)に等価なものである。本来の解くべき線形長波式(5)に比べ、第3項が新たに加わったものとなっており、この項の存在が打ち切り誤差の発生を意味する。したがって、数値計算では線形長波式(5)を解くつもりが実際には打ち切り誤差を含む擬似微分方程式(10)を解いていることになるのである。



	既知量	未知量
水位 η	▲, ■	△
線流量 M	●, ■	○

図-1 各差分法の計算点の配置と計算方向

次に、この擬似微分方程式の解を導くことを考える。式(10)は時間に関する高階の微分項が含まれておりそのまま解くことは難しいため、次の線形長波理論からの近似を用いる。すなわち、

$$\frac{\partial^{2m+1} \eta}{\partial t^{2m+1}} \doteq -c_0^{2m} \frac{\partial^{2m+1} M}{\partial x^{2m+1}}, \quad \frac{\partial^{2m+1} M}{\partial t^{2m+1}} \doteq -c_0^{2m+2} \frac{\partial^{2m+1} \eta}{\partial x^{2m+1}}$$

.....(11)

または

$$\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t^{2m+1}} \doteq -c_0^{2m+1} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m}}$$

.....(12)

の関係を用いるのである。式(11)と(12)は x の正の方向への進行波を考える場合には一致する。これらの式から時間に関する高階微分を変換し、線流量 M を消去すると式(10)の近似式として

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - c_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^{2m} \cdot (1-K^{2m}) \frac{\partial^{2m+2} \eta}{\partial x^{2m+2}} = 0$$

.....(13)

が求まる。ここで、 $K = c_0(\Delta t/\Delta x)$ である。式(13)においても第3項が本来の線形長波式に比べ付加されているものであり打ち切り誤差を表わす。付加された項は高階の偶数回微分からなり、線形 Boussinesq 式などからの類推で波数分散を意味するものとなっていることがわかる。

式(13)の性質を具体的に調べるため次のような簡単な初期値問題を考える。すなわち、

$$t=0 \text{ で } \eta(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

.....(14)

なる初期値が与えられた場合である。これは最も簡単な津波の発生・伝播問題に相当している。解として x の

正の方向へ伝播するものを考えると、

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(k) e^{i k(x - c_1 t)} dk \dots\dots\dots(15)$$

が導かれる。ここで、

$$\bar{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i k x} dx \dots\dots\dots(16)$$

$$\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2 = \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^m}{(2m+1)!} \left(\frac{k \Delta x}{2}\right)^{2m} (1 - K^{2m})\right] \dots\dots\dots(17)$$

である。したがって、式 (13) の解はフーリエ変換により分解された各波数成分の合成として表わされ、各成分波は波数に関係した位相速度でそれぞれ伝播するといった波数分散現象を呈するものとなる。この波数分散は式 (13) の第 3 項で表わされる打ち切り誤差により発生したもので、式 (17) から明らかなように差分格子間隔に関する数値的なもので物理的なものと性質を異にしている。

クランク・ニコルソン差分および 2 ステップ・ラックス・ウェンドロフ差分に関しても同様にして

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left[\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m+1} \eta}{\partial t^{2m+1}} \right. \\ \left. + (\Delta x)^{2m} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{2l} \frac{\partial^{2l}}{\partial t^{2l}} \cdot \frac{\partial^{2m+1} M}{\partial x^{2m+1}} \right] = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \left[\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m+1} M}{\partial t^{2m+1}} \right. \\ \left. + c_0^2 (\Delta x)^{2m} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{2l} \frac{\partial^{2l}}{\partial t^{2l}} \cdot \frac{\partial^{2m+1} \eta}{\partial x^{2m+1}} \right] = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(18)$$

および

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left[(\Delta t)^{2m-1} \frac{\partial^{2m} \eta}{\partial t^{2m}} \right. \\ \left. - c_0^2 \Delta t (\Delta x)^{2m-2} \frac{\partial^{2m} \eta}{\partial x^{2m}} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \\ \cdot \left[(\Delta t)^{2m} \frac{\partial^{2m+1} \eta}{\partial t^{2m+1}} + (\Delta x)^{2m} \frac{\partial^{2m+1} M}{\partial x^{2m+1}} \right] = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \left[(\Delta t)^{2m-1} \frac{\partial^{2m} M}{\partial t^{2m}} \right. \\ \left. - c_0^2 \Delta t (\Delta x)^{2m-2} \frac{\partial^{2m} M}{\partial x^{2m}} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} \\ \cdot \left[(\Delta t)^{2m} \frac{\partial^{2m+1} M}{\partial t^{2m+1}} + c_0^2 (\Delta x)^{2m} \frac{\partial^{2m+1} \eta}{\partial x^{2m+1}} \right] = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(19)$$

なる擬似微分方程式が得られる。式 (12) または (13) を用いて近似的ではあるが η のみの式にすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - c_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)!} \left[K^{2m} \frac{\partial^{2m+2} \eta}{\partial x^{2m+2}} \right. \\ \left. + (\Delta x)^{2m} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l)!} K^{2l} \frac{\partial^{2l+2m+2} \eta}{\partial x^{2l+2m+2}} \right] = 0 \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - c_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m)!} (\Delta x)^{2m-1} (1 - K^{2m-2}) \\ \cdot \frac{\partial^{2m+1} \eta}{\partial x^{2m+1}} - c_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)!} (\Delta x)^{2m} (1 - K^{2m}) \\ \cdot \frac{\partial^{2m+2} \eta}{\partial x^{2m+2}} = 0 \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

が導かれる。両式から、クランク・ニコルソン差分はリープ・フロッグ差分のものとは多少異なるが数値分散性を有することがわかり、2 ステップ・ラックス・ウェンドロフ差分は高階の奇数階および偶数階微分項を含むため数値散逸性および数値分散性をともにもつものとなっていることが理解できる。

式 (20) および (21) の初期値問題 (14) の解は x の正の方向への進行波成分のみを考えるなら、

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(k) e^{i k(x - c_2 t)} dk \dots\dots\dots(22)$$

および

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(k) e^{-\gamma \frac{t}{2}} e^{i k(x - c_3 t)} dk \dots\dots\dots(23)$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_2}{c_0}\right)^2 = \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^m}{(2m+1)!} (k \Delta x)^{2m} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(K \frac{k \Delta x}{2}\right)^{2l} - K^{2m} \right\}\right] \dots\dots\dots(24) \\ \gamma = I_m [c_2^*], \quad c_3 = R_e [c_3^*] \dots\dots\dots(25) \\ \left(\frac{c_3^*}{c_0}\right)^2 = \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} (k \Delta x)^{2m} (1 - K^{2m}) \right. \\ \left. - i \frac{K}{k \Delta x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^m}{(2m)!} (k \Delta x)^{2m} (1 - K^{2m})\right] \end{aligned} \dots\dots\dots(26)$$

である。

(3) 差分方程式の厳密解

まず始めに、リープ・フロッグ差分式のフーリエ級数展開による厳密解法について述べる。

水位 η 、線流量 M の差分解は格子点上だけで定義されている有限かつ離散的なものである。したがって、そのフーリエ級数展開としては

$$\begin{aligned} \eta(x, t) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{\eta}_m(t) e^{2\pi i \frac{m}{N} x} \\ M(x, t) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{M}_m(t) e^{2\pi i \frac{m}{N} x} \end{aligned} \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1 \dots\dots\dots(27)$$

を考えればよい。ここで、 $\tilde{\eta}_m, \tilde{M}_m$ は有限フーリエ係数であり、時間だけの関数である。また、 N は格子点数を意味する。式 (27) を差分方程式 (6) に代入し整理すると、

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} \left[\tilde{\eta}_m^{(n+1/2)} - \tilde{\eta}_m^{(n-1/2)} + 2i \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\pi \frac{m}{N}\right) \cdot \tilde{M}_m^{(n)} \right] = 0 \\ \sum_{m=0}^{N-1} \left[\tilde{M}_m^{(n+1)} - \tilde{M}_m^{(n)} + 2i c_0^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\pi \frac{m}{N}\right) \cdot \tilde{\eta}_m^{(n+1/2)} \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots(28)$$

が導かれる。したがって、任意の一成分だけを考え、 \bar{M}_m を両式から消去することにより

$$\bar{\eta}_m^{n+3/2} - \left[2 - 4K^2 \sin^2 \left(\pi \frac{m}{N} \right) \right] \cdot \bar{\eta}_m^{n+1/2} + \bar{\eta}_m^{n-1/2} = 0 \dots\dots\dots(29)$$

なる常差分方程式を得ることができる。この常差分方程式の初期値問題 (14) の解は x の正の方向への進行波成分のみを考えるならば

$$\bar{\eta}_m^n = \frac{1}{2} \bar{\varphi}_m e^{-ik_m c_1 n \Delta t} \dots\dots\dots(30)$$

で与えられる。したがって、差分方程式 (6) の解としては式 (30) の総和をとる形で

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{\varphi}_m e^{i(k_m j \Delta x - c_1 n \Delta t)} \dots\dots\dots(31)$$

となる。ここで、

$$\bar{\varphi}_m = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(x) e^{-2\pi i \frac{m}{N} j} \dots\dots\dots(32)$$

$$k_m = 2\pi \frac{m}{N \Delta x} \dots\dots\dots(33)$$

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{2}{K k_m \Delta x} \sin^{-1} \left[K \cdot \sin \left(\frac{k_m \Delta x}{2} \right) \right] \dots\dots\dots(34)$$

である。以上の解法は展開の途中にいつさいの近似を用いない厳密なものである。式 (34) で表わされる波速は擬似微分方程式の解 (17) と多少異なったものとなるが、やはり波数によって変化する分散現象を意味するものである。

次に、クラック・ニコルソン差分および2ステップ・ラックス・ウェンドロフ差分に関しても同様の厳密解を導いてみる。この場合も同様にして、

$$\left(1 + \frac{S_1^2}{4} \right) \bar{\eta}_m^{n+2} + 2 \left(1 - \frac{S_1^2}{4} \right) \bar{\eta}_m^{n+1} + \left(1 + \frac{S_1^2}{4} \right) \bar{\eta}_m^n = 0 \dots\dots\dots(35)$$

および

$$\bar{\eta}_m^{n+2} + 2(2S_2^2 - 1) \bar{\eta}_m^{n+1} + [(2S_2 - 1)^2 + S_1^2] \bar{\eta}_m^n = 0 \dots\dots\dots(36)$$

が成分波の常差分方程式となる。ここで、

$$S_1 = K \sin(k_m \Delta x), \quad S_2 = K \sin \left(\frac{k_m \Delta x}{2} \right) \dots\dots\dots(37)$$

である。したがって、各差分法の解は、それぞれ

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{\varphi}_m e^{i(k_m j \Delta x - c_2 n \Delta t)} \dots\dots\dots(38)$$

および

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{\varphi}_m e^{-\Gamma n} e^{i(k_m j \Delta x - c_3 n \Delta t)} \dots\dots\dots(39)$$

で与えられる。ここで、

$$\frac{c_2}{c_0} = \frac{1}{K k_m \Delta x} \cos^{-1} \left[\frac{1 - S_1^2/4}{1 + S_1^2/4} \right] \dots\dots\dots(40)$$

$$\Gamma = \log \sqrt{(2S_2 - 1)^2 + S_1^2} \dots\dots\dots(41)$$

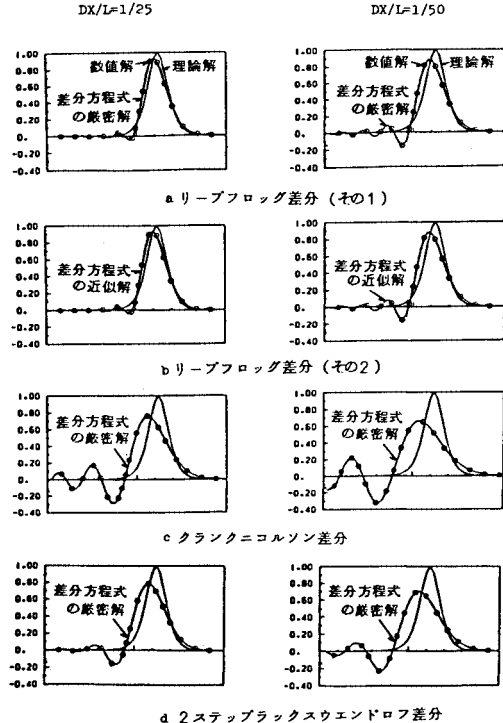


図-2 数値解と理論解の比較

$$\frac{c_3}{c_0} = \frac{1}{K k_m \Delta x} \cos^{-1} \left[\frac{1 - 2S_2}{\sqrt{(2S_2 - 1)^2 + S_1^2}} \right] \dots\dots\dots(42)$$

である。

(4) 打ち切り誤差の性質

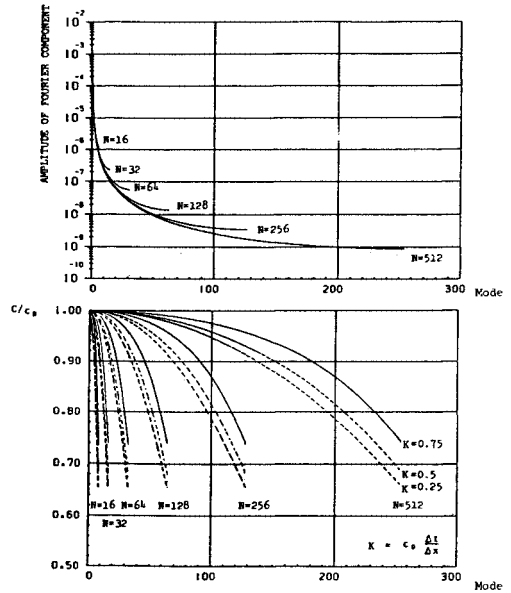
まず始めに、ここで導いた差分方程式の解が数値計算結果を説明し得るものかどうかを考察する。図-2は波高水深比0.1の孤立波(第1次近似)を初期値にして数値計算結果、線形長波式の理論解、差分方程式の厳密解および擬似微分方程式による近似解を比較した一例である。理論解、厳密解、近似解は離散化誤差が同じになるようにして高速フーリエ変換を用いて計算している。左側の図は1波長(静水面上の体積が95%含まれる区間長で定義している)を25分割する差分格子を用いて4波長伝播させた結果であり、右側の図は50分割で8波長伝播させたものである。Kの値は両者ともに0.5である。図から、理論解は孤立波形を保ったまま伝播するが、数値解は波数分散および散逸のため波高が減衰するとともにさざ波が主峰の後端に起こることがわかる。また、差分方程式の厳密解および近似解はともに数値解とよく一致し、数値計算結果は本研究で示した方法で精度よく評価できることも理解される。

次に、打ち切り誤差の性質に関する考察を行う。ともに離散化誤差のところで説明したように数値計算の誤差は打ち切り誤差のみならず離散化誤差との兼ね合いも考

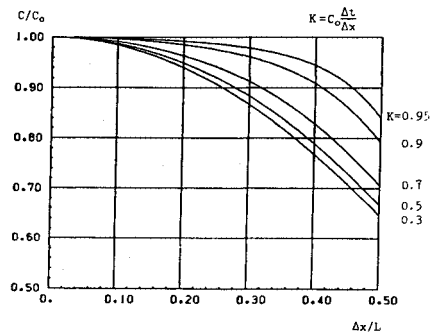
慮する必要があり、ここでは両者と同時に説明する。数値計算の誤差にはこのほかに電算機の有限桁性に起因する丸め誤差があるが、付録Aに示すようにその大きさは8桁浮動小数点計算で 10^{-4} %程度の誤差であり打ち切り誤差、離散化誤差に比べ無視できるくらい小さい。図一3は波高水深比0.02の孤立波を初期値としたときの離散化誤差と打ち切り誤差を説明したものである。上段の図は初期波形のフーリエスペクトルを意味し、分割数 N を変化させた場合のエリアジングの効果(離散化誤差)を調べたものである。この図から、1波長当たりの分割数 N に応じてモード $m=N/2$ に相当するナイキスト波数まででフーリエスペクトルが打ち切られるため、それより高波数(高モード)成分は低波数側に折り重ねられている様子がよくわかる。片対数図で描かれているためわかりづらいが各分割数のフーリエスペクトルの積分値は当然一致している。下段の図はリーブ・フロッグ差分の打ち切り誤差である数値分散性を上段のフーリエスペクトル図に合わせて描いたものである。3種類の K の値に関して厳密解である式(34)で計算している。この図から、リーブ・フロッグ差分の数値分散性は K の値で多少異なるもののナイキスト波数でその効果が最も大きくなり、ナイキスト波数近傍の成分が打ち切り誤差の影響を大きく受けることがわかる。したがって、ナイキスト波数近傍の成分は離散化誤差、打ち切り誤差とともに大きくなることが予想され、数値計算で再現すべきフーリエ成分とナイキスト波数との間の差が十分とれる差分格子を採用する必要があることが理解できる。

リーブ・フロッグ差分に関して K の違いによる数値分散性の差を調べたものが図一4である。式(34)から数値計算結果の波速は K と $k_m \Delta x$ に関係することがわかっており、横軸には $k_m \Delta x$ に相当する1波長当たりの分割数の逆数 $\Delta x/L$ を用い、内部パラメーターとして K を使っている。ナイキスト波数は $\Delta x/L=0.5$ に相当する。 $K=1$ がリーブ・フロッグ差分法の弱安定条件⁹⁾の限界であり $c/c_0=1$ となる理想的な差分格子の組合せの条件であるが、実際は任意形状の海底地形に関する計算が普通であり安定条件が最大水深で規定されるため K の値が1以下になる。したがって、計算の安定条件を満たす範囲で K の値を大きく採ることが打ち切り誤差を小さくするひとつの条件である。

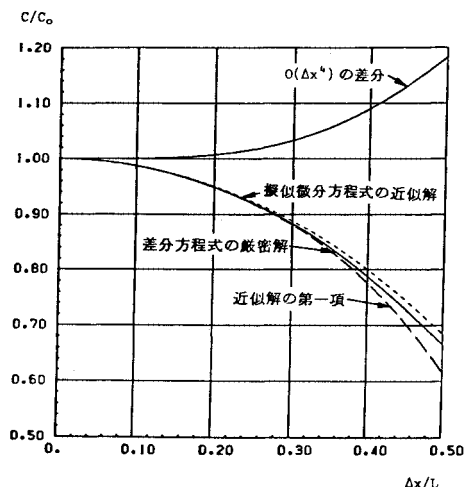
図一5はリーブ・フロッグ差分に関して厳密解と近似解を比較したものである。 $K=0.5$ の場合である。数値分散性に関して近似解の方が多少小さなものとなるが両者の差は小さく、近似解を用いても数値計算結果を十分な精度で評価できることがわかる。また、図には近似解の第1項(式(17)の総和をとる項で $m=1$ のもの)に関して描いてあるが、これだけでも非常によ



図一3 エリアジングの効果と数値分散性(厳密解)



図一4 リーブ・フロッグ差分の数値分散性(厳密解)



図一5 リーブ・フロッグ差分の厳密解と近似解の比較

い近似になることがわかる。したがって、非線形問題の誤差解析を考える場合には擬似微分方程式による近似解法が有力な手段となることが想像される。図中に、 $0(\Delta x^4)$ の差分として示されているのは擬似微分方程式における $0(\Delta x^2)$ の項を打ち消すように人為的な項を差分式に加えた場合のものを意味する。この場合、差分式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} [\eta_{j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{j+1/2}^{n-1/2}] + \frac{1}{\Delta x} [M_{j+1}^n - M_j^n] \\ & - \frac{f}{\Delta x^2} [M_{j+2}^n - 3M_{j+1}^n + 3M_j^n - M_{j-1}^n] = 0 \\ & \frac{1}{\Delta t} [M_{j+1}^{n+1} - M_j^n] + \frac{c_0^2}{\Delta x} [\eta_{j+1/2}^{n+1/2} - \eta_{j-1/2}^{n-1/2}] \\ & - c_0^2 \frac{f}{\Delta x^2} [\eta_{j+3/2}^{n+1/2} - 3\eta_{j+1/2}^{n+1/2} + 3\eta_{j-1/2}^{n-1/2} - \eta_{j-3/2}^{n-1/2}] = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(43)$$

となる。ここで、

$$f = \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 (1 - K^2) \dots\dots\dots(44)$$

である。波速は

$$\left(\frac{c_1}{c_0} \right)^2 = \left[1 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^m}{(2m+1)!} \cdot \left(\frac{k_m \Delta x}{2} \right)^{2m} F(m) \right] \dots\dots\dots(45)$$

$$F(m) = (1 - K^{2m}) + \frac{1}{8} (1 - K^{2m}) (3^{2m} - 1) \dots\dots\dots(46)$$

で表わされる。通常の $0(\Delta x^2)$ の差分より精度が高くなるのが期待されるが、高波数成分の波速が線形長波理論のものより速くなるため主峰の前面にさざ波が起こるといふ不都合が生じ、あまり利点のあるものとはならないことが予想される。

図-6は物理的な分散性を有する微小振幅波理論の波速とリープ・フロッグ差分のものを比較した結果である。微小振幅波理論の方が線形長波理論に比べ精度が高いものであるため、多少分散性を有した方が現実の現象に近いという考え方もあるが、図から判断すると物理的な分散と数値的な分散がほぼ同じ振る舞いを示すのは非常に長周期の波に関する計算で差分格子を水深の2倍程度にできる場合に限られるようである。したがって、遠地津波を扱う場合には差分格子間隔を適当に選ぶことにより線形長波理論を用いた計算で物理的な分散効果を考慮したものに近い結果を得ることができると考えられる。

図-7はクラランク・ニコルソン差分、2ステップ・ラックス・ウェンドロフ差分の数値分散性をリープ・フロッグ差分のものと比較したものである。リープ・フロッグ差分に比べ他のものの分散効果が大きいことを示している。これは、式(6)から(8)に示したように連立の差分方程式を解く方法になっているので見通しが悪いが、線流量Mを消去し水位ηだけの差分方程式にすると1時間ステップ計算するのに必要な空間ステップ数は

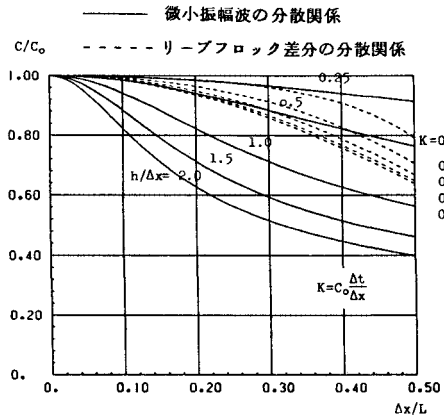


図-6 微小振幅波理論の分散特性との差

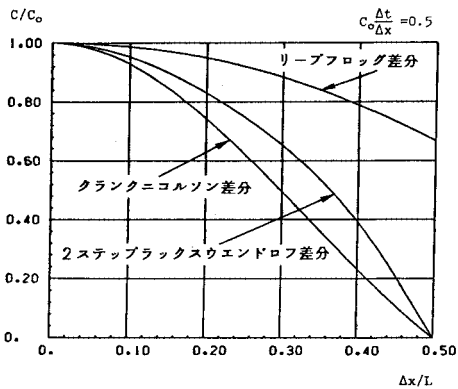


図-7 各差分法の数値分散性の比較

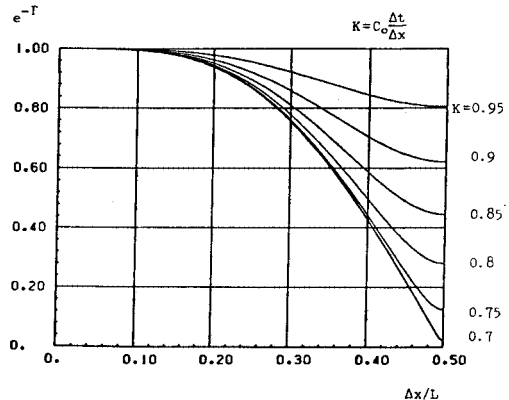


図-8 2ステップ・ラックス・ウェンドロフ差分の数値散逸性

リープ・フロッグ差分に比べ他の差分が2倍となっていることに起因している。どちらにせよリープ・フロッグ差分の方が約半分の分割数で同程度の精度を得ることになる。

2ステップ・ラックス・ウェンドロフ差分は数値分散性のほかに数値散逸性の効果も有しており、この数値散

逸性について調べた結果が図-8である。図の縦軸は1時間ステップ当たりの減衰率に相当する e^{-r} を採っている。2ステップ・ラックス・ウェンドロフ差分の数値分散性はクランク・ニコルソン差分のものとはさほど変わらないが数値散逸性の効果により図-2に示した波形のように主峰後端に現われるさざ波の波高が小さくなるのである。

4. 所要の精度を得る条件

前節までの検討により差分法を用いた津波数値計算の打ち切り誤差を定量的に評価する方法が示された。打ち切り誤差は数値分散性または数値散逸性の効果として説明され、ともに波高を減衰するように働くことが明らかにされた。その大きさはフーリエ成分波の波数および差分格子間隔に関係し、また、伝播距離にも比例することが同時に示された。これらの解析は一次元伝播問題について検討されたものであるが、その主要な結果は現実の問題である二次元伝播問題に関しても使用可能なものである。なぜなら、付録Bに二次元伝播問題の打ち切り誤差を調べた結果の一例を示してあるが、その結論から座標軸方向へ伝播する成分の誤差が最も大きくなり、しかもその値は一次元伝播問題の結果に一致することが導けるからである。

ここでは、以上の打ち切り誤差の評価法を利用して、逆に、津波数値計算で所要の精度を得るための差分格子間隔に関する条件について考察する。

代表的な津波波形として選んだものは1964年アラスカ地震津波と1896年明治三陸大津波の一次元波形である。図-9に津波初期波形とそのパワースペクトルを示す。アラスカ津波は陸地近くで発生したもので、陸上部の地盤変化は測量により詳細に求められ海側の部分はそれから推定されて決められたものであり¹⁰⁾、この種の津波波源としては精度の高いものと考えてよい。明治三陸大津波は相田¹¹⁾のモデルを用いている。両者のパワースペクトル形状が大きく異なっているのは、アラスカ津波が主断層と副断層の2重のものが原因となっているのに比べ明治三陸大津波の方はMansinha-Smylie¹²⁾の方法で計算された主断層一面で推定されているからである。したがって、ここでは複雑な津波初期波形と簡単な場合の2種類のケースを取り扱っていることになる。設定した水深は4000mである。

図-10はこの2種類の津波に関して数値計算結果と線形長波式の理論解、リーブ・フロッグ差分方程式の厳密解を比較したものである。図の横軸は初期波形の主峰の位置を原点としたときの伝播距離を表す。アラスカ津波は高波数成分を多く含むため打ち切り誤差の効果である分散性が強く現われた結果となる。その結果、主峰

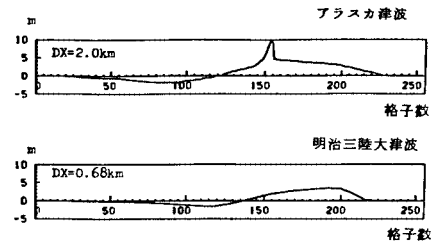


図-9 代表津波の初期波形とそのパワースペクトル

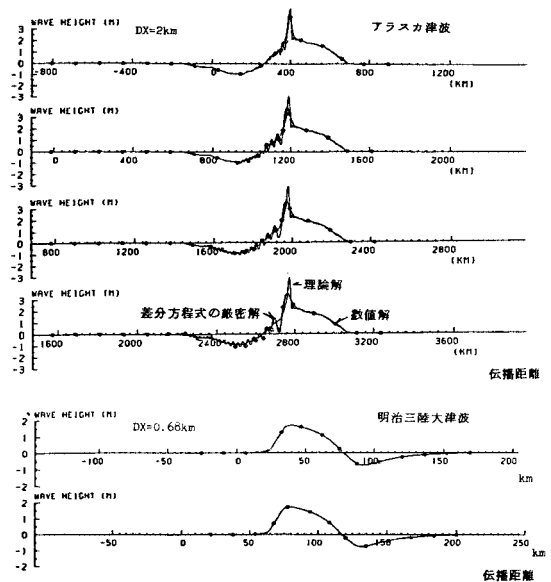


図-10 代表津波の数値計算結果と理論解・厳密解の比較 ($K=0.5$)

の波高減衰量も著しい。明治三陸大津波は数値計算結果と理論解の差はほとんどみられず、打ち切り誤差の影響が少ない。また、差分方程式の厳密解は主峰背後に発生したさざ波の部分まで数値計算結果と一致し、非常に複雑な初期波形の場合についても本研究で提示した方法で打ち切り誤差の評価ができることがわかる。

以上のような比較から、2種類の代表的な津波数値計

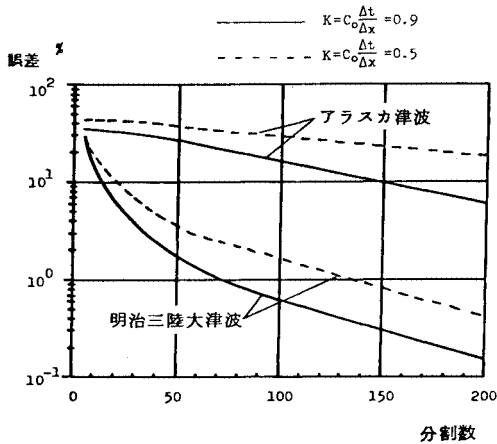


図-11 代表的な津波数値計算の波高に関する誤差と分割数

算において所要の精度を得るための差分格子間隔の条件を求めた結果が図-11である。図-11は1波長伝播後の波高減衰量に関して

$$(\text{誤差}) = \frac{[(\text{理論解}) - (\text{数値解})]}{(\text{理論解})} \times 100 \quad \dots\dots\dots(47)$$

で定義した誤差である。Kの値は0.5と0.9の2種類のケースに関して示されている。図の横軸は各津波初期波形の差分分割数である。この図から、平均的なKの値が0.9の場合に誤差を10%以内にすることを求めることができる。

1波長以上伝播したときの誤差評価に関しても同様の関係を容易に得ることができるが、1波長程度伝播すると高波数成分は遅れそれ以後の波高減衰が大きくなることは考えにくい。また、本研究で主として対象としているのは日本近海で発生する津波であり、この場合は1波長程度で日本沿岸に到達するので伝播距離としてそれ以上を考える必要はない。ここでアラスカ津波を取り上げたのは、初期波形の精度がよいことそしてその形状が複雑であるという理由による。

5. 結 言

本研究では、線形長波式を用いた津波数値計算の打ち切り誤差を定量的に評価する方法として差分方程式の厳密解を利用するものおよび擬似微分方程式を導きその近似解を求める方法の2種類を提示した。さらに、代表的な津波としてアラスカ津波および三陸大津波を選び津波数値計算で所要の精度を得るための差分格子間隔に関する条件を明らかにした。

差分格子間隔に関して従来の研究では1波長当たり20~40分割といわれてきたが、実際は初期波形のスペクトル形状が大きく異なり、高波数成分を多く含むもの

は100分割以上細かくする必要があることが明らかとなった。

また、本研究で行った打ち切り誤差の解析法は基本的な誤差評価法として津波数値計算以外の発展方程式の計算や有限要素法を用いた計算にも原理的には使用できるものであることを付記しておく。さらに、差分方程式の厳密解を利用する方法は線形問題以外には適用が難しいが、擬似微分方程式による近似解法は、数値計算で発生する誤差を数値計算で評価するといった手法を用いることにより非線形問題へも拡張できるものである。

謝 辞：本研究を遂行するにあたり東北大学工学部土木工学科 首藤伸夫教授にはご指導・ご助言を賜った。また、東北水工研究会諸先生方（幹事：日本大学工学部 高橋迪夫・長林久夫講師）には熱心な討議をいただいた。ここに記して謝意を表する。

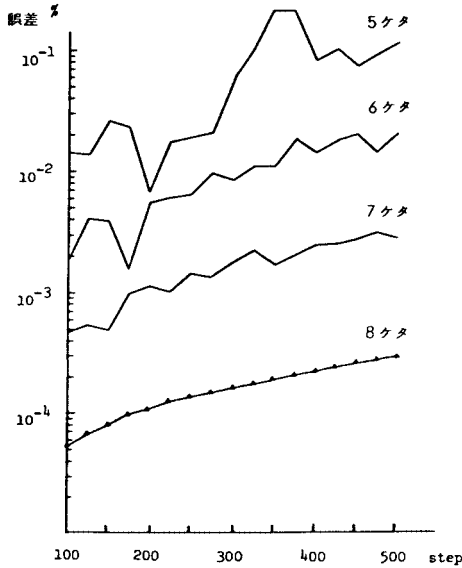
付録A 丸め誤差の大きさ

差分法による津波数値計算の丸め誤差の大きさについて数値実験的手法を用いて調べた結果を報告する。従来の丸め誤差に関する研究⁸⁾では打ち切り誤差について本研究で提示したような決定論的な取り扱いはなされておらず確率的な色彩が強いものであった。これは、与える初期値によって計算の出発点における丸め誤差の分布が変化するため普遍的な丸め誤差の初期値が与えられないという難しさがあったためである。

ここで行うものは数値実験的なもので、計算に利用する桁数を固定する比較的簡便な方法である。現在の電算機の計算処理法としては浮動小数点法が用いられており、正負によって桁数が若干異なるのが普通であるが、ここでは使用桁数を固定する最も単純な方法で調べている。

図-9は波高水深比0.1の弧立波を初期値にしてリーブ・フログ差分法で計算したものの丸め誤差について示したものである。正解値として4倍精度(35~36桁)計算の結果を採用し、5桁から16桁計算の波高に関する差を式(47)の形で計算したものである。横軸は計算の時間ステップ数を表わしている。500ステップが1波長伝播する時間に相当している。通常の単精度(7~8桁)計算では $10^{-3} \sim 10^{-4}$ %程度の誤差となり、本文で述べた打ち切り誤差の大きさ $10^1 \sim 10^{-1}$ %から判断すると丸め誤差は小さくあまり問題とはならないことがわかる。図には示していないが倍精度(15~16桁)計算における丸め誤差の大きさは 10^{-15} %程度の大きさである。

以上の結果は36ビット電算機(東北大学大計センター ACOS 1000)で計算したものである。他の汎用電算機は32ビットのものが多く、この場合丸め誤差が多



付図 差分法による津波数値計算の丸め誤差の大きさ

少大きくなることも考えられる。

付録B 二次元伝播問題の打ち切り誤差

ここでは、二次元伝播問題に関するリープ・フロッグ差分の打ち切り誤差について若干の検討を試みる。解析法としては擬似微分方程式を用いた近似的なものとする。

最も簡単なものとして空間方向の差分格子間隔が等しい場合を考えると、擬似微分方程式は

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right] - c_0^2 \frac{(\Delta x)^2}{12} \left[(1 - K^2) \cdot \left\{ \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial y^4} \right\} - 2K^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = 0 \dots \dots \dots (B \cdot 1)$$

となる。この式は二次元伝播問題では式(13)に相当する。ただし、式(B・1)の第3項で表わされる打ち切り誤差は第1次近似である。

式(B・1)から、リープ・フロッグ差分は二次元伝播問題と同様に数値分散性を有しており、成分波の波速 c_i は

$$\left(\frac{c_i}{c_0} \right)^2 = \left[1 - \frac{2}{3!} (1 - K^2) \left(\frac{k \Delta x}{2} \right)^2 + \frac{4}{3!} \frac{k_x^2 k_y^2}{k^4} \left(\frac{k \Delta x}{2} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (B \cdot 2)$$

で表わされることがわかる。ここに、 k_x, k_y は x, y 各方向の波数であり、 $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ である。式(B・2)から明らかなように、 k_x または k_y が零の場合、数値分散が最も大きくなり、しかもその大きさは二次元伝播の結果と一致している。したがって、打ち切り誤差の評価としては二次元伝播問題による結果よりも二次元伝播結果を用いた方がより厳しいものになっているといえる。

参考文献

- 1) Shuto, N., Suzuki, T., Hasegawa, K. and Inagaki, K. : A study of numerical technique on the tsunami propagation and run-up, International Tsunami Symposium, p. 88, 1985.
- 2) Goto, C., Shuto, N. and Imamura, F. : Accuracy and speed of numerical simulation as a means of tsunami warning, International Tsunami Symposium, p. 82, 1985.
- 3) O'Brien, G.G., Hyman, M.A. and Kaplan, S. : A study of numerical solution of partial differential equations, J. Math. Phys., Vol. 29, p. 223, 1951.
- 4) Lax, P. D. : Hyperbolic difference equations : A review of the Courant-Friedrichs-Lewy paper in the light of recent developments, I. B. M. J. of Res. and Development, Vol. 11, p. 235, 1967.
- 5) たとえば、矢嶋信男・野木達夫：発展方程式の数値解析，応用数学叢書，岩波書店，1977。
- 6) 久保成隆：各種の数値計算法の比較研究，農業土木学会論文集，Vol. 117, p. 71, 1985.
- 7) 高梨和光・清川哲志：浅海長波方程式の有限要素法解析における問題点とその解決法，海岸工学講演会論文集，Vol. 31, p. 118, 1984.
- 8) たとえば、一松 信・戸川隼人：数値計算における誤差，共立出版，1983.
- 9) 力石国男・光易 恒：スペクトル計算法と有限フーリエ係数，九州大学応用力学研究所所報，Vol. 39, 1973.
- 10) Plafker, G. : Tectonics of the March 27, 1964, Alaska earthquake, U. S. Geological Survey Professional Paper 543- I, Washington Government Printing Office, p. 74, 1969.
- 11) 相田 勇：200 m 等深線上の津波波形と浸水高，東京大学地震研究所彙報，Vol. 30, p. 11, 1977.
- 12) Mansinha, L. and Smylie, D. : The displacement field of inclined faults, Bull. Seismol. Soc. Amers., Vol. 61, p. 1433, 1971.

(1986. 4. 16・受付)