

湾曲部の2次流に関する基礎的研究

A BASIC STUDY ON THE DEVELOPMENT OF SECONDARY CIRCULATION
IN CURVED CHANNELS

石川忠晴*・金 舜範**

By Tadaharu ISHIKAWA and Soonbum KIM

An analysis is provided for the spatial variation of the strength of secondary circulation in laminar flow through curved channels. The process of interaction between the main and the secondary flow is definitely shown through experiments. A mathematical model for computing the longitudinal variation of secondary circulation is developed reflecting the effect of the interaction. Experimental results support this model. Because of the important effects of secondary circulation on the river flow profile, techniques used in this model will provide useful improvements in computational methods for river flows.

Keywords: secondary flow, mathematical model, curved channel, open channel

1. はじめに

河川流路はさまざまな形で湾曲している。このため横断面内の流れ、いわゆる2次流が生じる。2次流による側岸付近の下降・上昇流は河床の局所的変動の主要因であるため、2次流強度の推算が河川工学上の重要な問題の1つとなっている。

2次流を理論的に論じる研究はRozovskii¹⁾以来多数ある。そのほとんどは比較的単純な形状(たとえば一様湾曲)を対象に、2次流のパターンおよび断面内の強度分布を論じるものであった。

しかし、河川工学的見地からすれば、複雑に湾曲する流路のどの断面で2次流強度が最大となるかが重要である。すなわち、任意に湾曲する水路での2次流強度の縦断変化を予測する手法が必要とされる。村田ら²⁾は任意に湾曲する円管内層流の2次流を解析するための基礎方程式を厳密に導出している。しかし、現実にこれを解くとすると、曲率変化がかなり単純な関数形で与えられねばならない。

結局、任意に湾曲する流路での2次流の縦断変化を解

析するには、物理的洞察に基づいた方程式の簡略化が不可欠とされよう。この意味から最近池田・西村³⁾が発表した論文は注目に値する。この研究は蛇行流路を対象としているが、基本的には任意の湾曲形状に適應できる2次流強度の推算法が示されている。ただし後に述べるように、かなり簡略化されているため、精度的に多少問題がある。

本研究は“任意”の湾曲形状をもつ流路における2次流強度の縦断変化を比較的簡便に解析する手法の確立を目指すものであり、本論文では、その基礎的段階として2次流強度の一次元解析について検討した結果を述べる。論文は2つの部分より構成されている。前半は、データ解析に基づく2次流強度の変化の機構の解明にあてられている。後に述べるように、2次流と主流の干渉が2次流強度の変化に大きな影響を及ぼしており、この点を明確にすることが一次元モデルの導出に不可欠であったからである。後半では、一次元解析法の定式化と適用性についての実験的検討結果が述べられている。

なお、本論文では実験も理論も層流を対象としている。流線の曲がりにより生じる2次流は、その発生機構も主流との干渉機構も運動方程式中の移流慣性項間のやりとりに着着される。それゆえ、定性的には乱流と層流で本質的に差がないと考えられる⁴⁾。そこで物理機構を正確

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科
(〒152 目黒区大岡山 2-12-1)

** 学生会員 工修 東京工業大学研究生(同上)

にとらえる目的で、現象が明確かつ実験精度の確保できる層流を対象としたものである。

2. 2次流の発達・減衰の機構の実験的検討

(1) 実験装置および測定方法

実験水路の概要を Fig.1 に示す。中心半径 30 cm の 180° 湾曲部を含む全長 250 cm, 幅 10 cm の水平床矩形断面水路である。水は十分な容量をもつポンプによって下流水槽から上流水槽に送られ、ここから一定の流量で整流層に送られる。余剰水は下流水層に戻る。

水位測定にはポイントゲージを用いた。流向流速は、Fig.1 に示す 14 断面で水素気泡を発生させ、直上より写真を撮り座標読み取り機で求めた。水素気泡の発生部には 1 cm 置きにコーティングを施したタングステン線を用いている。低流速であるため水素気泡の上昇量が問題となるおそれがあるため、予備実験⁽¹⁾において上昇速度を計測し補正を加えた。

実験条件を Table 1 に示す。この条件では流速がきわめて遅いので摩擦ロス小さく、水位の縦横断変化はほとんどなかった。すなわち、水平床ではあるが、一次的にはほとんど等流とみなしてよい流れで、流速分布の変化は湾曲による 2 次流に起因する。

(2) データ整理方法

序文で述べたように、本研究では 2 次流強度を一次的に解析することを目的としている。しかし、実験で得られるデータは当然ながら三次元的なので、後の解析と対比できるように、データ整理を行ううえで 2 次流を定義しなければならない。

次章で述べる一次元解析では、全体の流れを、水路軸

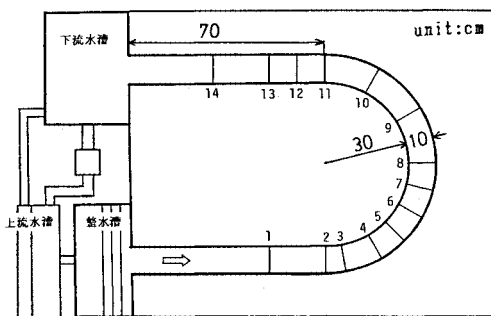


Fig.1 Top View of Experimental Apparatus for Bending Channel Flow.

Table 1 Summary of Hydraulic Condition for Experiments on Bending Channel.

流 量	42.2 cc/s	Re	398
平均流速	4.35 cm/s	Fr	0.14
平均水深	0.97 cm		

線に沿った主流と、横断面内の回転成分としての 2 次流の重ね合わせで簡略に表現する。したがって、2 次流の水平成分の鉛直積分値はゼロとなる。この条件を満たすように、データ整理にあたって 2 次流を次のように定義した。

各地点における流速ベクトルは Fig.2 に示すようにねじれている。このベクトルを鉛直積分すると平均流速ベクトルが求まる。この平均流速ベクトルの向きを主流方向とし、各高さにおける流速ベクトルを主流方向成分と直角方向成分に分解する。直角方向成分の鉛直分布を 2 次流分布とする。この定義によれば 2 次流速の鉛直積分はゼロとなる。

水素気泡の写真から、上述の定義による 2 次流速分布を次の手順で求めた。

① 予備実験⁽¹⁾で求められた水素気泡上昇速度を用いて“計測位置”の高さ z の補正を行った。また流向が中心軸方向とは異なるので、計測位置の横座標 y の補正も写真上で行った（したがって、流速データの計測位置の y, z 座標は一定間隔ではない。なお x 座標の誤差は相対的に重要でないので補正していない）。

② 流速ベクトルを水路中心軸方向成分と横断方向成分に分解する。次に各高さにおける各成分の横断分布図を描き、直線補間によって横断方向に一定間隔のデータに直す。

③ 一定間隔となったデータについて水路中心軸方向成分の鉛直分布図を描き、最小二乗法で多項式の近似関数を求め、これを積分して水路軸線方向の線流量 M (単位幅流量) を求める。

④ M の横断分布図を描き、最小二乗法で多項式の近似関数を求め、これを積分して流量を求める。この値が供給流量とずれている場合は、一致するようにその断面の流速値全体を一定倍した。

⑤ 各断面について、一定の流量フラックスを与える横断位置を求め、これを縦断的に描くことによって“主流向”の平面分布を求める。

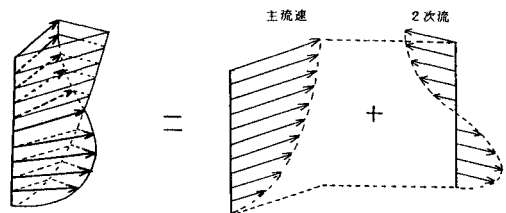


Fig.2 Separation of Velocity into Main Component and Secondary Component.

注1) 本実験と同じ水位に水を貯め、水素気泡発生装置および電極位置も本実験と同じにセットし、上昇する気泡列を写真に撮って上昇速度を写真上で計測した。

⑥ 全流速データをおのおの的主流向とその直角方向に分解し、主流速 u と2次流速 v を求めた。

本研究では2次流強度を次のように定義した。2次流分布の形状は完全には一定ではない。それゆえ、最大流速値とか表面流速値のような“点”の値では実態を表現できないおそれがある。そこで Fig. 3 (a) に示すように、変向点より上部または下部の流速積分値 q_0 を無次元化した $\hat{q} = q_0 / u_0 H$ をもって2次流強度の指標とした。ここに u_0 = 断面平均流速、 H = 水深である。

前述の手順で求められた2次流の分布は、測定誤差および多項式による近似誤差のために、鉛直積分値は必ずしも完全にゼロとはならない。そこで Fig. 3 (b) に示すように上部流量 q_+ と下部流量 q_- の平均値をもって q_0 とした。

(3) 実験結果

2次流強度の縦断変化を Fig. 4 に示す。なお後の計算結果と比較する都合上、縦軸には $3.85 \hat{q}$ をとっている(後の解析における α_3 に対応する)。2次流強度は湾曲部から下流に向かって急増し、湾曲角 30° 付近でピークをもったのち減少して、湾曲角 120° 付近ではば一定の値に安定する。

図中の曲線は、乱流に関する池田・西村³⁾のモデルを転用して得られる計算値である。池田・西村は次のような簡略化された渦度方程式を用いている。

$$u \frac{\partial \Omega}{\partial s} - \frac{2}{r} u \frac{\partial u}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \dots \dots \dots (1)$$

そこで ε を ν と置き換え、2次流分布の近似関数として幅広緩湾曲水路の2次流の定常解の分布を仮定し、後に述べるような重み付き残差法を適用して計算した。この

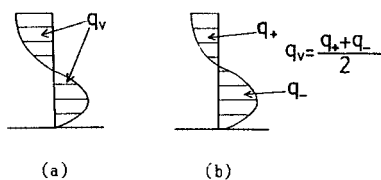


Fig. 3 Definition of Secondary Flow Strength.

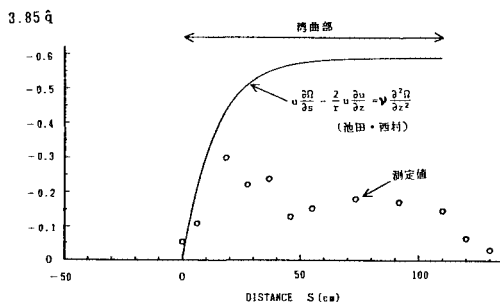


Fig. 4 Longitudinal Variation of Secondary Flow Strength.

解は、式(1)からわかるように指数関数型の漸近解で、漸近する先はRozovskiiの定常解となる。

図からわかるように、式(1)の簡単な数式では、2次流強度の減衰過程と最終的な安定状態を説明できない。

(4) 2次流の発達・減衰の機構

2次流強度が湾曲部途中のピークをもちその後減少するという過程の物理機構を調べる。以下に述べる事項はすでに常識化している部分もあるが、後の定式化の説明の都合上、それらを含めて述べる。

Fig. 5 は、2次流強度の増加区間、ピーク断面、減少・安定区間の水路中心部における、2次流鉛直分布 (v)、主流速鉛直分布 (u) および線流量横断分布 (M) の一例である。次のことがわかる。①増加期においては線流量の横断分布はまだ比較的均一であり、主流速の鉛直分布も直線区間と同じポアズユ分布に近い。②ピーク断面では、線流量の横断分布は外岸付近で加速、内岸付近で減速している。主流速の鉛直分布はポアズユ分布に比較してやや均一化している。③減少・安定期には、線流量の横断分布は完全に強制渦型となり、主流速の鉛直分布はかなり一様化している。

以上の変化は次のように解釈できる。2次流が発生すると、Fig. 6 (a) に示すように外岸付近で下降流が生じ、表層の速い流体が下層の遅い流体に置き換わるため、全体に加速する。内岸側では逆に減速する。この結果、線流量の横断分布が形成される。すると、Fig. 6 (b) に示すように、表層では相対的に流速の小さい内岸側の流体が流入するため減速し、下層では相対的に流速の大き

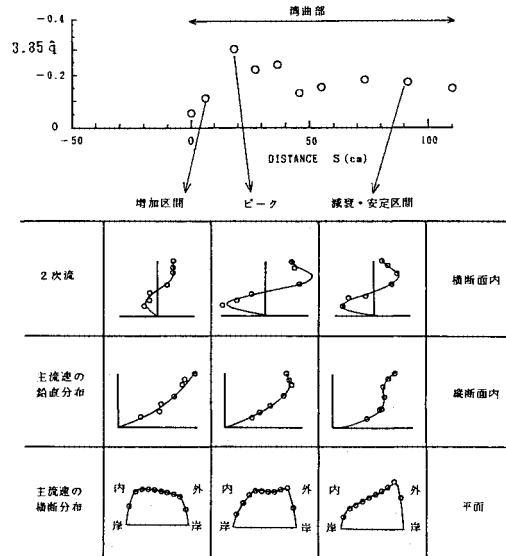


Fig. 5 Variation of Velocity Profile with Secondary Flow Development.

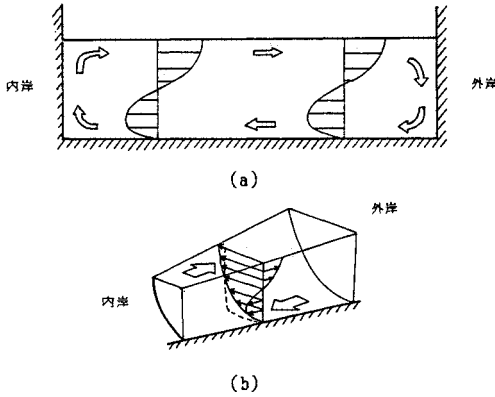


Fig. 6 Effect of Momentum Transport.

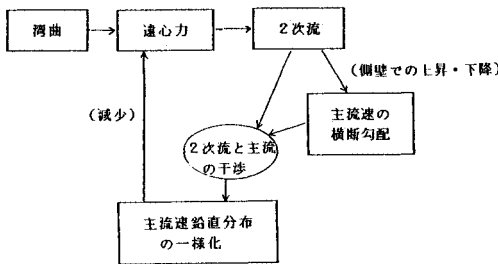


Fig. 7 Process of Secondary Flow Development.

い外岸側の流体が流入するため加速し、全体として主流速の鉛直分布が一様化する。2次流の原動力は主流速鉛直分布が非一様であるため生じる遠心力の不均一であるから、鉛直分布が一様化すれば2次流強度は減少することとなる。

以上の一連の変化を Fig. 7 に総括する。

3. 2次流の発達・減衰の数式モデル

本章では、前述の考察をもとに、重み付き残差法を用いて2次流の発達・減衰に関する一次元計算式を導出する。ただし、対象を次のように限定する。“一定幅一定勾配の幅広矩形断面水路で、水深の縦断変化がきわめて小さい場合”。水面は Frictionless の rigid wall で置き換える。すなわち、以下の解析では水路は矩形断面管路とみなしている。ただし、水路軸線の曲率半径 $r(s)$ は任意である。要するに以下の計算式の目的とするところは、2次流変化の機構の基幹部分のみを抽出してとらえることにある。まず次の条件を設定する。

- ① 河幅に比べて水深が十分小さい。
- ② 河幅に比べて水路曲率半径が十分大きい。

この条件は実際そのような状況が存在するというほかに、“一次元解析”という目的からの要請による。この条件のもとで円筒座標系の Navier-Stokes の式の主要項

のみを残せば次式を得る。

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} = g i_s + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} = g i_n + \frac{u^2}{r} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \dots\dots\dots (3)$$

試験関数を次のようにおく。

$$u = u_0(1 + \alpha_1 \eta) \{ \phi(\xi) + \alpha_2 \psi(\xi) \} \dots\dots\dots (4)$$

$$v = u_0 \alpha_3 \psi(\xi) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 s は水路軸線方向、 n は横断方向、 z は鉛直方向の座標、 r は水路軸線の曲率半径である。また、 u は水路軸線方向の流速、 v は横断方向流速、 u_0 は断面平均流速、 i_s, i_n は s, n 方向の水面勾配である。 η, ξ は Fig. 8 に示すような、横断および鉛直方向の無次元座標 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は無次元流下距離 $\xi = s/B$ のみの関数である。 $\phi(\xi), \psi(\xi)$ は次式で表わされる。

$$\phi(\xi) = \frac{3}{2} (2\xi - \xi^2) \dots\dots\dots (6)$$

$$\psi(\xi) = 6 \left(\xi - \frac{5}{2} \xi^2 + \frac{4}{3} \xi^3 \right) \dots\dots\dots (7)$$

すなわち、 $\phi(\xi)$ はポアズユ流れの鉛直プロファイル、 $\psi(\xi)$ は Rozovskii によって求められた2次流の鉛直プロファイルの近似式である。

式(4)の $(1 + \alpha_1 \eta)$ は線流量の横断分布を表わし、 α_1 が大きくなるほど右岸側に片寄った流れとなる。 $\{ \phi(\xi) + \alpha_2 \psi(\xi) \}$ は主流速の鉛直分布の一様化を表わす項で、Fig. 9 に示すように α_2 が増加するほど一様化する。式(5)は2次流を表わす。

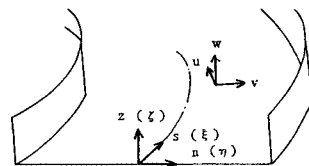


Fig. 8 Definition of Coordinates and Symbols.

s, n, z ; Coordinates
 ξ, η, ξ ; Normalized Coordinates
 u, v, w ; Velocity Components

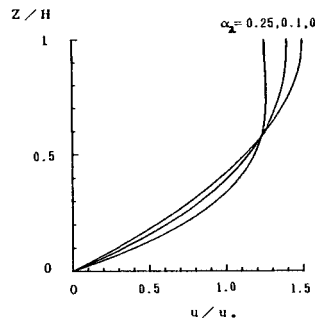


Fig. 9 Variation of Vertical Profile of u with α_2 .

式(4), (5)は連続式を満足しない。式が複雑になることをいとわなければ連続式を満足するように関数形を設定することも可能である。しかし、この現象の本質は Fig. 6, Fig. 7 で説明したとおり横断方向の運動量輸送の具合であって、側岸付近を除いた大部分の領域では連続条件はそれほど重要ではない。

重み関数として、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ にかかる関数を用いた。すなわち、

式(2)に対して $\eta \quad \alpha_1 \rightarrow$ 式(8)

$\psi(\xi) \quad \alpha_2 \rightarrow$ 式(9)

式(3)に対して $\phi(\xi) \quad \alpha_3 \rightarrow$ 式(10)

おのおのの物理的意味はおおむね次のようになっている。式(8)は主流の運動エネルギーの横断方向のバランスを表わす。式(9)は主流の運動エネルギーの鉛直方向のバランスを表わす。式(10)は2次流の運動エネルギーのバランスを表わす。

式(4)~式(7)を式(2), 式(3)に代入し、上述の重み関数を乗じて横断面内で断面積分すると式(8)~式(10)を得る。ただし、側岸境界条件は、式(8)についてはモーメント不透過、式(9), 式(10)についてはモーメント透過とする。このように境界条件を使い分ける理由は以下のとおりである。

式(2), (3)では鉛直流速 w を無視しているので、もともと側岸付近では成立しない。したがって両式に適用すべき境界条件は“物理的境界条件式”ではなく、 w の効果を含めた“実質的境界条件式”でなければならない。 w の効果とは(湾曲外岸を例にとれば)「2次流によって表層を運ばれてきたモーメントを下層に降して送り返す」ということである(ただし、薄い流れを想定しているので側岸の摩擦は無視する)。式(8)のように上下方向に均一の重み関数の式では、横断方向のモーメント輸送量の全層積分値が問題とされる。この値は上記の w の効果ではほとんど変化しないから、側岸ではモーメント不透過条件を用いるのが適当と考えられる。一方、式(9), 式(10)のように上下方向反転する重み関数では方向別の積分値が問題とされるが、上層外岸向きの輸送は w によって“消失”し、また下層内岸向きの輸送は w によって生み出されるから、あたかも側岸を透過して系外に流失または系外から流入するのと同様の結果が生じる。したがって、式(9), (10)については側岸ではモーメント透過条件を用いるのが適当と考えられる。

$$\begin{aligned} & (0.60 - 0.20\alpha_2 + 0.171\alpha_2^2)\dot{\alpha}_1 + (-0.20\alpha_1 + 0.343\alpha_1\alpha_2)\dot{\alpha}_2 \\ & = -0.30\alpha_3 + 0.515\alpha_2\alpha_3 - \frac{1.5}{Re} \left(\frac{B}{H}\right)\alpha_1 - \frac{3.0}{Re} \left(\frac{B}{H}\right)\alpha_1\alpha_2 \\ & \dots\dots\dots(8) \\ & (-0.204\alpha_1 + 0.391\alpha_1\alpha_2 - 0.043\alpha_1\alpha_2^2)\dot{\alpha}_1 + (0.587 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -0.129\alpha_2 + 0.195\alpha_1^2 - 0.043\alpha_1^2\alpha_2)\dot{\alpha}_2 = -0.587\alpha_1\alpha_3 \\ & + 0.129\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \frac{10.8}{Re} \left(\frac{B}{H}\right)\alpha_2 \dots\dots\dots(9) \\ & (0.391 - 0.086\alpha_2)\dot{\alpha}_3 = \frac{B}{r} (-0.407 + 0.782\alpha_2 - 0.136\alpha_1^2 \\ & - 0.086\alpha_2^2 + 0.261\alpha_1^2\alpha_2 - 0.029\alpha_1^2\alpha_2^2) - \frac{7.2}{Re} \left(\frac{B}{H}\right)\alpha_3 \\ & \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

ここで上記の式が表現するシステムの特徴を単湾曲水路の場合について検討しておく。 $\alpha_1 \sim \alpha_3$ は1よりオーダの小さい変数であるので、このことを考慮すると主要項は式中に下線を施した項のみである。右辺の(=)を施した項は左辺の量を発達させる項、右辺の(~~~~)を施した項は減少させる項である。外力(水路曲率 $1/r$)は式(10)右辺にある。したがって外力が作用するとまず α_3 (2次流)が生じる。すると式(8)から α_1 (線流量の横断勾配)が生じ、式(9)から α_1 と α_3 の干渉によって α_2 (主流速の鉛直分布の一樣化)が生じる。その結果、式(10)の右辺第2項により α_3 (2次流)が減少することとなる。

式(8)~(10)は線形常微分方程式であるから、水路曲率 $r(\xi)$ と $\alpha_1 \sim \alpha_3$ の上流端境界値を与えることにより容易に数値積分できる。本章での計算では4次のルンゲクッタ・ジルを用いて積分している。

4. 計算モデルの妥当性の検証

計算モデルの妥当性の検証を2つのケースについて行った。1つは前章で述べた単湾曲水路実験、いま1つは以下に述べる蛇行水路実験である。この2ケースを選定した理由は次のとおりである。2次流を誘起する外力は、大雑把に言えば、水路曲率である。したがって前者は外力がステップ関数的に変化する場合の2次流の応答を調べる実験で、後者は外力が sine 波の場合の応答を調べる実験である。2次流現象はいうまでもなく非線形現象であるけれども、これら2種の基本外力に対する応答を調べることによって計算式の特徴をおおむね把握できると考えた。

蛇行水路の平面図を Fig. 10 に示す。水路幅 10 cm, 波長 100 cm, 最大偏寄角 30° の sine-generated 曲線に

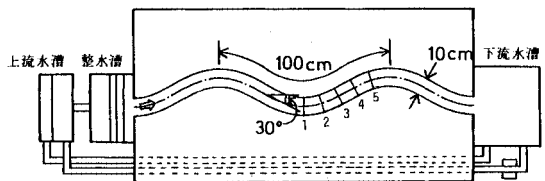


Fig. 10 Top View of Experimental Apparatus for Meandering Channel Flow.

Table 2 Summary of Hydraulic Condition for Experiments on Meandering Channel.

流量	18.1 cc/s	Re	171
平均流速	2.74 cm/s	Fr	0.11
平均水深	0.86 cm		

従う水路である。給排水設備、測定方法は単湾曲水路実験と同じである。通水条件は Table 2 のとおりである。

Fig. 11 に単湾曲水路の実験結果と計算結果を比較する。Fig. 11 (a) は 2 次流強度の変化を示している。計算値はやや大きめであるが、ピークの位置、安定状態に移行する過程がかなりよく一致していることがわかる。

Fig. 11 (b) には主流速横断勾配の計算値と実験値を比較する。実験では遷移域における横断勾配が Fig. 5 に示したように波状を呈するが、ここでは水路中心軸の左右の流量配分が等価となる一定勾配の分布形をあてはめ、その勾配を求めた結果をプロットしている。計算値の方がやや早めに増加するが変化の様子はよく一致している。

Fig. 12 に蛇行流路の実験結果と計算結果を比較する。Fig. 12 (a) は 2 次流強度、Fig. 12 (b) は主流速横断勾配である。どちらも振幅はほぼ一致しているが位相には誤差が現われており、特に主流速横断勾配のずれが大きい。この原因は次のように考えられる。横断方向に流

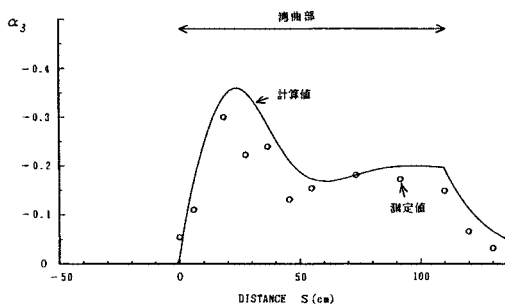


Fig. 11 (a) Longitudinal Variation of Normalized Strength of Secondary Flow (Bending Channel)

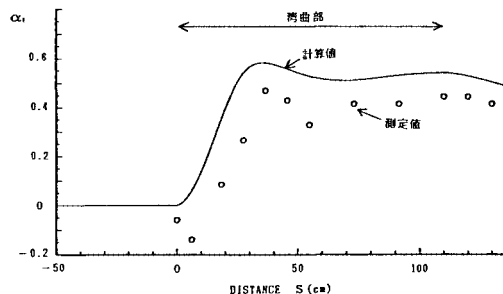


Fig. 11 (b) Longitudinal Variation of Transverse Inclination Factor of Vertical Averaged Velocity (Bending Channel).

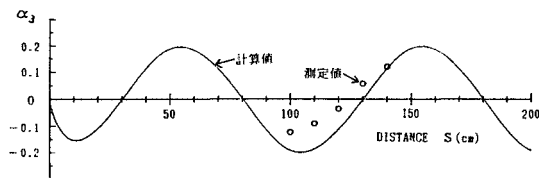


Fig. 12 (a) Longitudinal Variation of Normalized Strength of Secondary Flow (Meandering Channel).

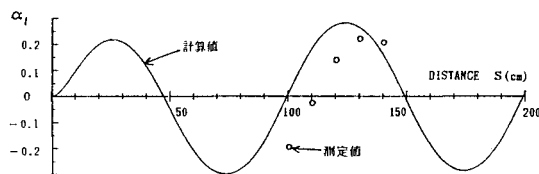


Fig. 12 (b) Longitudinal Variation of Transverse Inclination Factor of Vertical Averaged Velocity (Meandering Channel)

れが偏る運動は当然慣性をもっているはずである。しかし、本計算法では横断方向の全層的運動と水位横断勾配の形成を考慮していないので、横断方向の運動の慣性効果が全く含まれていないのである。

この点についてモデルを改良するのは可能である。しかし、著者はむしろ次のように考えている。本論文に述べた検討の主眼は、2 次流強度の変化の機構を簡略にモデル化することにあり、全く同形式で乱流についての計算式を立ててそのまま河川に適用しようとは考えていない。上述の不一致の原因は平面流解析で扱われる運動機構による。不規則な形状の実河川の流れを予測しようとする場合には、いずれ平面的数値解析は必要である。したがって、本論文で明らかにされた 2 次流の変化の機構を平面流数値解析に組み込むことによって問題は自動的に解消されるはずである。

ここではむしろ次の点を強調したい。上述の解析では 2 次流による運動量輸送を考慮しただけで主流速の横断勾配の変化をここまで表わしている。ということは逆に平面流数値解析を行う場合に、Fig. 7 に示した 2 次流の発達・減衰の機構を取り込むことが不可欠といえる。

5. 結 論

以上、本論文では層流を対象に水路湾曲によって生じる 2 次流強度の縦断変化機構を明らかにし、それに基づいた 2 次流強度の一次元解析手法を示した。層流と乱流では現象は全く同じではないが、序論に述べたように、ここで対象とした 2 次流については定性的に変わるところはないと考えられる。それゆえ本論文で明らかにされた流れの機構と計算式の枠組は河川流計算モデルを構築するうえでの基本になると考える。以下重要な結論を列挙する。

(1) 湾曲流路の2次流は、主流速分布との干渉作用によってその発達を抑制される。干渉機構は Fig. 7 のように表わされる。

(2) Fig. 7 の機構をモデル化した2次流強度の一次元解析法により2次流強度の断面平均値および主流速横断勾配の縦断変化をとらえることができた。それゆえ、平面流数值計算に Fig. 7 の機構のモデルを組み込むことにより、平面流況を精度よく計算できる可能性が高い。

Channels, Israel program for scientific translations, 1961.

- 2) 村田 暹・三宅 裕・稲葉武彦：曲り管内層流，機械学会論文集（第2部）第353号，pp.197～206，昭51.1.
- 3) 池田駿介・西村達也：河床蛇行河川の三次元流れと河床形状，土木学会論文集，第369号／II-5，pp.99～108，1986.
- 4) 土木学会水理委員会研究小委員会（研究代表者：芦田和男）：洪水流の3次元流況と流路形態に関する研究，昭57.3.

(1986.3.12・受付)

引用文献

- 1) Rozovskii, I.L. : Flow of Water in Bends of Open
-