

平衡および非平衡浮遊砂量算定の確率モデル

A STOCHASTIC MODEL TO CALCULATE EQUILIBRIUM AND NON-EQUILIBRIUM SUSPENDED LOAD IN OPEN CHANNEL

芦田和男*・藤田正治**

By Kazuo ASHIDA and Masaharu FUJITA

A method to calculate suspended load is proposed for equilibrium and non-equilibrium conditions. The diffusion theory is conventional for these problems, but it is difficult to decide the concentration at a reference level and the diffusion coefficient of particle. In the present theory which is based on the stochastic analysis of motion of suspended particles and pick up rate, suspended load can be predicted without these parameters, and it is found to be useful in calculating non-equilibrium suspended load.

Pick up rate is studied for nonuniform sediment theoretically and experimentally by considering sheltering effect of gravels, and suspended load can be calculated for uniform and nonuniform sediment. Equilibrium concentration distribution and concentration at reference level which are calculated from the present model are compared with the previous results. Then, this method is applied to calculating non-equilibrium suspended load with armouring process.

Keywords : suspended load, non-equilibrium suspended load, pick up rate, reference level concentration, armour coat

1. 緒 言

浮遊砂に関連する流砂現象の解析では、平衡浮遊砂量を議論すれば十分な場合と、非平衡浮遊砂量の算定が重要になる場合とがある。たとえば、河川中・下流域では河床材料が比較的均一であり、かつ、浮遊砂の飛行距離に比べて、十分長い区間にわたって河道条件が一樣とみなせるため、浮遊砂は平衡状態に達しており、このような場では平衡浮遊砂量の算定問題が重要な課題である。一方、河川上流域のように、河床材料が混合砂で構成されている場合やダムによって流れが不等流になっている場合には、アーモアコートの形成・破壊やダム堆砂が生じる。これらの過程では、河床条件や水理条件が時間的・場所的に変化するのに伴って、河床砂礫の浮上率や浮遊砂の運動特性が変化するために、非平衡浮遊砂量の算定が不可欠となる。また、河川中・下流域であっても、河床波が形成されている場合には、一波長の区間での乱流特性の空間的分布のために浮遊砂は非平衡となっている。このため、河床波上の浮遊砂量の算定や浮遊砂と河床波の相互作用の解明には、河床波上の浮遊砂の非平衡

特性を明確にしなければならない。

このような諸問題に対して、浮遊砂量の算定法が拡散理論、確率過程理論およびエネルギー理論に基づいて提案されている。しかし、定常・等流かつ一様砂の条件の場合に対しても、十分よい精度の推定法が確立されているとはいいがたい。この最大の原因として、浮遊砂の挙動と流れの構造との関係が明瞭でなく、それを記述する方法が適切でないことが挙げられる。すなわち、拡散理論では、粒子の拡散係数および基準点濃度の推定法が不十分であること、確率過程理論では、河床からの粒子の浮上率や粒子の浮遊運動の解析法が明確でないこと、エネルギー理論では、粒子を浮上させるのに必要なエネルギーが乱れエネルギーの生成数の数%のオーダーで、それを精度よく評価する方法が得られていないことによる。著者らは、この点に鑑み、平坦河床を対象として、乱流構造と粒子の浮遊運動との関連性を明らかにし、浮遊機構のモデル化を行っている¹⁾。

本論文では、この成果に基づいて浮上率の計算法を検討し、確率過程理論によって平衡および非平衡浮遊砂量の算定モデルを提案するものである。この方法を用いると、直接(基準点濃度を介さずに)、濃度分布が計算でき、さらに、非平衡浮遊砂量の算定への適用が容易となる。しかし、計算手法は数値計算によらざるを得ず、平衡浮

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所
(〒611 宇治市五ヶ庄)

** 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所(同上)

遊砂量の計算などでは、拡散理論による方が実用的であると考えられる。そこで、拡散理論の問題点である拡散係数や基準点濃度を、確率過程理論の立場から再検討し、本理論を拡散理論に適用する。さらに、アーマーコート形成過程に伴って生じる非平衡浮遊砂量の算定に本理論を適用し、その妥当性について検証する。

2. 河床砂礫の浮上率

(1) 理論式

河床砂礫が浮遊砂として浮上する機構には、静止、揺動、転動、滑動および小跳躍状態から浮遊状態へ遷移する場合が考えられる。著者ら¹⁾は、粒子が河床に接触している状態から浮遊する機構について詳しく検討しており、中川・辻本ら²⁾は、小跳躍状態から浮遊する機構について、小跳躍運動の確率的解析を進展させて検討している。両者は共存するとも考えられるが、著者らの実験¹⁾や後述の浮上率に関する実験では前者の方が卓越していた。そこで、本理論では、河床砂礫が直接浮遊砂となる場合を対象とし、揚圧力によってそれらが浮上すれば浮遊砂となるという結果¹⁾より浮上率を算定する。しかし、どのような条件のときどちらの機構が卓越するか、または両者が共存するのかについては、今後、詳細に検討していく必要がある。また、混合砂を対象とする場合では、礫の遮蔽効果が浮上率の値に大きく影響する。この効果をいかに評価するかが浮上率の推定精度の向上の一因となる。著者らの研究では¹⁾、遮蔽効果と粒子の存在高さとの関係が詳しく述べられており、この概念を本理論に適用する。

河床表面の粒子は揚圧力 F_{L0} の作用を受けて半粒径程度浮上し浮遊砂となることが考察されている¹⁾。河床表面の粒子が F_{L0} によって浮上する時間間隔を t_c 、その確率密度関数を $f_{tc}(t_c)$ 、単位面積当たり存在する粒径 d の粒子の個数を N_B 、 N_B 個の粒子の中に占める浮上可能な状態の粒子の割合を k_1 とすると、単位時間、単位面積当たり浮上する粒径 d の粒子の浮上量 q_{su} は次式のように表わされる。

$$q_{su} = k_1 \frac{\pi}{6} \sigma d^3 N_B \int_0^\infty \frac{1}{t_c} f_{tc}(t_c) dt_c \dots\dots\dots (1)$$

F_{L0} の作用時間 t_* は粒子の鉛直方向の初速度を w_{p0} とすると $t_* = d/w_{p0}$ で表わされ¹⁾、 t_c は t_* と同程度の値と考えられるがここでは t_* に比例するとして、 $t_c = k_2 t_*$ とおく。ここに、 k_2 : 比例定数である。 t_* を著者らの研究¹⁾より求めると、 t_c は次式ようになる。

$$t_c = \frac{k_2 d^2}{\sqrt{6(F_{L0} - G)(\sigma\pi)}} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 G : 粒子の水中重量で、 $G = (\pi/6)(\sigma - \rho)gd^3$ 、 σ : 粒子の密度、 ρ : 流体の密度である。

F_{L0} の確率分布 $f_{F_{L0}}(F_{L0})$ は、平均 0、標準偏差 $F'_{L0} = ck^2 \rho u_*^2 d^2$ の正規分布とおく¹⁾。ここに、 c : 揚圧力係数、 k : 遮蔽係数であり、礫の間隙中における鉛直方向の乱れ強度を河床付近の鉛直方向の乱れ強度で割った値を表わす¹⁾。

N_B は、粒径 d の粒子の河床表面における混合割合を p_f とすると、

$$N_B = p_f \frac{1}{(\pi/4)d^2} \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。以上より、 q_{su} は次式のように導かれる。

$$q_{su} = K p_f \frac{2}{3} \frac{\sigma}{d} \sqrt{\frac{6}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{F_{L0} - G} \frac{1}{\sqrt{2\pi F'_{L0}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{F_{L0}^2}{F'_{L0}{}^2}\right) dF_{L0} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $K = k_1/k_2$ である。ここで、Rubey の抵抗則を用いて、 G を粒子の沈降速度 w_0 で表示すると、 $G = C_{D0} \rho w_0^2 (\pi/8)d^2$ となる。ここに、 $C_{D0} = 2 + 24 \nu / (w_0 d)$ である。また、 $\eta = F_{L0}/F'_{L0}$ とおくと、 q_{su} の無次元表示 $\hat{q}_{su} = q_{su} / \rho \sqrt{gd}$ は次式となる。

$$\hat{q}_{su} = \frac{2}{3} K p_f \sqrt{\frac{6}{\pi}} (s+1) \int_{\eta_0}^\infty \frac{u_*}{\sqrt{gd}} \sqrt{ck^2 \eta - \frac{\pi}{8} C_{D0} \xi_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2\right) d\eta \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\eta_0 = (\pi/8) C_{D0} \xi_0^2 / (ck^2)$ 、 $s = \sigma/\rho - 1$ 、 $\xi_0 = w_0/u_*$ である。揚圧力係数 c および遮蔽係数 k は、砂粒レイノルズ数 $u_* d_m / \nu$ および無次元粒子存在高さ Δ_s/d_r の関数として求められる¹⁾。ここに、 d_m : 河床表面の平均粒径、 d_r : 河床表面の代表粗度径、 Δ_s : 代表粗度の頂部からの粒子の存在高さである。

ところで、揚圧力が十分粒子に作用するためには、その作用時間 t_* が河床付近で発生する上昇流のオイラー的継続時間 t_e より小さい必要がある。式 (5) が成り立つためには、 $t_* < t_e$ という条件が必要であり、これ

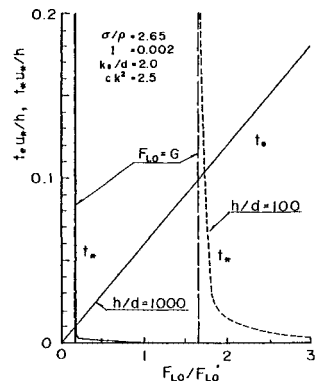


Fig. 1 Relation between exchange time into suspension of particles on bed and duration time of upward flow.

について検討する。 t_e は文献1) より次式で与えられ、

$$\frac{t_e u_*}{h} = 0.06 \frac{F_{L0}}{F'_{L0}} \dots \dots \dots (6)$$

文献1) より t_* は次式となる。

$$\frac{t_* u_*}{h} = \sqrt{\frac{\pi s + 1}{6}} \frac{1}{ck^2} \frac{1}{h/d} \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 I : エネルギー勾配である。 Fig. 1 は、 $s=1.65$, $ck^2=2.5$, $I=0.002$ の条件で、 $t_e u_*/h$ と $t_* u_*/h$ の F_{L0}/F'_{L0} による変化を、 h/d をパラメーターとして計算した結果を示したものである。 この図より、 $F_{L0} > G$ となると急激に $t_* \ll t_e$ となり、 1 回の上昇流の発生で、 粒子を浮上させるのに十分な継続時間の揚圧力が生起することがわかる。

(2) 実験結果と理論結果との比較

式(5)の適合性を検証するために、 浮上率について以下のような実験を行った。 長さ 8 m、 幅 30 cm の水路に粒径 4.8 mm の礫を敷き、 Fig. 2 に示すような給砂装置で、 礫の間隙から粒径 1.4 mm、 比重 1.05 のポリスチレン粒子を供給した。 実験方法は、 勾配、 流量および給砂量一定の条件で、 粒子の存在高さがその給砂量に見合っただ常になった時点で、 河床を浮上する粒子の運動を水路横方向から高速ビデオ撮影した。 流量および給砂量の条件を変えて、 同様の実験を行い、 $\xi_0 (=w_0/u_*)$ と粒子の無次元存在高さ Δ_s/d_r に対する浮上率をビデオ解析から求めた。 なお、 本実験における河床からの浮上粒子のほとんどの軌跡は、 離脱後重力の作用のみで鉛直方向の運動が決まる小跳躍粒子の場合とかなり異なっていたので、 浮上する粒子はすべて浮遊砂として取り扱った。

Fig. 3 は、 \hat{q}_{su} の実験値と理論値を ξ_0 と ck^2 をパラメーターとして示したもので、 両者とも $p_r=1.0$ に換算している。 ck^2 の実験値は、 Δ_s/d_r と d_m から文献1) より求めた。 実験値からわかるように、 浮上率は粒子の存在高さによってかなり異なるが、 本理論ではそれが十分考慮されており、 $K=0.035$ としたとき、 理論値は実験値の傾向をよく表わしている。 図中には、 芦田・道上³⁾ および Itakura・Kishi⁴⁾ の基準点濃度の推算式で用いられた浮上率の理論曲線も描かれている。 これらは一様砂

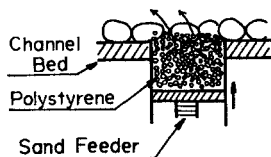


Fig. 2 Experimental apparatus for supply of particles.

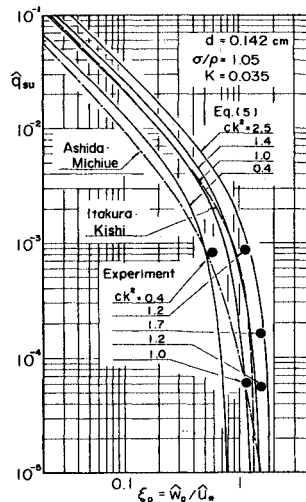


Fig. 3 Comparison between theoretical results and experimental ones concerning pick up rate.

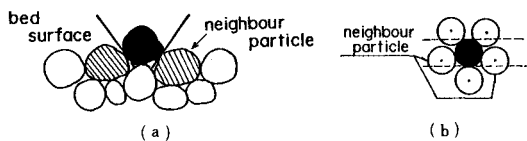


Fig. 4 Situation of contacts of particles on bed and compacted particles.

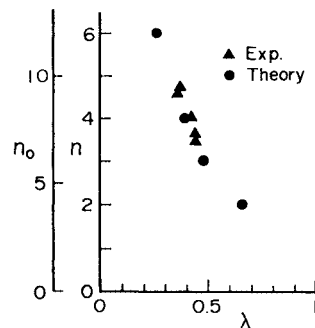


Fig. 5 Relation between the number of contacts on a particle in random packing or the number of neighbour particles of a particle on bed and porosity.

を対象にしたもので、 本理論では $u_* d_m / \nu > 50$ のとき $ck^2=2.5$ に対する曲線に対応する。 本理論結果は、 従来のもものと比べて若干大きい値となっているが、 その傾向はほぼ一致している。

次に、 実験定数 $K (=k_1/k_2)$ の値の物理的意味について検討しよう。 $k_2 (=t_e/t_*)$ は 1 程度と考えると、 K は河床粒子が浮上可能な状態にある確率 k_1 と等しくなる。 この確率は Fig. 4(a) に示すように、 河床上の粒子とそれと隣接する粒子との接線がすべて上で開くよう

な状態になる確率，すなわち，隣接粒子個数を n とすると， $(1/2)^n$ に等しいものと考えられる．ところで，球を充填したときの1つの粒子の周囲に接触する粒子個数 n_0 と空隙率 λ の関係は Fig. 5 のようになる⁵⁾．いま， n を接触粒子の中でその中心が被接触粒子の上端から下端の間に存在する個数で表わされるものとする (Fig. 4 (b) 参照)， $n = n_0/2$ となり， n と λ の関係が Fig. 5 のように得られる．この図より， $\lambda = 0.4$ のとき， $n = 4.5$ であり， $K = 0.044$ となる．この値は先に述べた $K = 0.035$ とほぼ一致し， K の物理的な意味が隣接粒子との接触状況から説明できる．なお，実際の河床で，浮上可能な粒子の割合を測定すると， $k_1 = 0.03 \sim 0.06$ であった．以上より，一様砂および混合砂の浮上率の計算に対する本理論の妥当性がうかがえる．

3. 確率過程理論による平衡および非平衡浮遊砂量の算定法

(1) 平衡浮遊砂量の算定法

著者らは，個々の粒子に着目した浮遊砂の運動特性の確率的解析を行い，河床離脱後の粒子の存在高さの確率分布 $f(z, \tau)$ について検討した¹⁾．ここに， τ ：粒子が河床を離脱してからの経過時間である．これと前章で得られた浮上率の推定式から，二次元等流条件下の平衡浮遊砂濃度分布は次式で表わされる．

$$C(z) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma} q_{su} \cdot f(z, \tau) d\tau \dots\dots\dots (8)$$

$f(z, \tau)$ の計算法は文献1) に詳述しているので，ここでは説明しないが，基本的な考え方は次のようである．すなわち，河床粒子が静止状態から浮遊する過程を，乱れの寿命時間ごとに揚圧力や流体力を評価して運動方程式から解き，外力の確率分布を考慮して $f(z, \tau)$ を求めている．Yalin・Krishnappan⁶⁾ は，初期浮上高さおよび乱れ速度の確率分布と寿命時間を与え，鉛直方向の粒子の速度を $w_p = w_r - w_0$ として $f(z, \tau)$ を算定している．ここに， w_r ：鉛直方向の乱れ速度， w_0 ：粒子の沈降速度である．本理論は，初期浮上高さを物理的に求める点

や粒子の運動と乱れとの応答性を考慮している点が Yalin らのモデルと異なり，より厳密に $f(z, \tau)$ を解析しているといえる．

Fig. 6 は一定の w_r に対する w_p の応答性を， $\sigma/\rho = 2.65$ で $d = 0.2 \text{ mm}$ ， 0.5 mm および 1 mm の粒子と $\sigma/\rho = 1.05$ で $d = 1.42 \text{ mm}$ の粒子について調べるために，著者らの理論¹⁾に従って $w_r = 0 \text{ cm/s}$ の条件に対して，それぞれの粒子の w_p の時間変化を例示的に計算したものである．ただし， w_p の初期条件は $w_p = 10 \text{ cm/s}$ としている．乱れの平均継続時間 T_e は著者らの研究¹⁾より $T_e u_* / h = 0.1$ で表わされるとすると，実河川の規模の条件，たとえば $u_* = 20 \text{ cm/s}$ ， $h = 100 \text{ cm}$ では $T_e = 0.5 \text{ s}$ ，実験水路の規模の条件，たとえば $u_* = 5 \text{ cm/s}$ ， $h = 5 \text{ cm}$ では $T_e = 0.1 \text{ s}$ となるので，この計算条件の場合，浮遊砂量の算定問題で対象となるような小粒径の細砂やシルトでは， T_e に比べて非常に短い時間で w_p は $w_r - w_0$ に近づくことがわかる．また，河床粒子の浮遊運動のシミュレーション¹⁾に用いた $\sigma/\rho = 1.05$ ， $d = 1.42 \text{ mm}$ の粒子では $w_p = w_r - w_0$ になるまでの時間は T_e に比べて無視できないために，浮遊運動の解析には本理論を用いる必要がある．このように，粒径が小さい場合，粒子運動の乱れに対する追従性がよいために，初期浮上高さを著者らの理論によって求めれば，Yalin らのモデルと著者らのモデルで計算した $f(z, \tau)$ はそれほど差がない．そこで，このような場合を対象とするための，Yalin らのモデルを用いた簡易的な $f(z, \tau)$ の算定法について説明する．河床付近で生じる大規模な上昇流と同程度のスケールの乱れの平均寿命時間 t_{em} ごとに時間ステップを区切り，各ステップで，鉛直方向の乱れ速度 w_r を平均0，標準偏差 u_* の正規分布に従って与える．鉛直方向の粒子の速度を $w_r - w_0$ で近似すると，ステップ n 後に $z = z_{pn}$ に存在する粒子がステップ $(n+1)$ 後に存在する高さ $z_{p,n+1}$ の確率分布は次式で表わされる．

$$g(z_{p,n+1} | z_{pn}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} u_* t_{em}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{z_{p,n+1} - z_{pn} + w_0 t_{em}}{u_* t_{em}} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ステップ1後の粒子の位置 z_{p1} は文献1) の手法に従って求められる浮上高さの平均値 \bar{z}_{p1} で与える．これより，ステップ n 後の粒子の存在高さの確率分布は次の漸化式から計算できる．

$$\eta_1(z_{p1}) = \delta(z_{p1} - \bar{z}_{p1}) \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

$$\eta_n(z_{pn}) = \int_0^h f_{n-1}(z_{p,n-1}) g(z_{pn} | z_{p,n-1}) dz_{p,n-1} \dots\dots (10 \cdot b)$$

ここに， δ ：デルタ関数である．また， t_{em} は実験と混

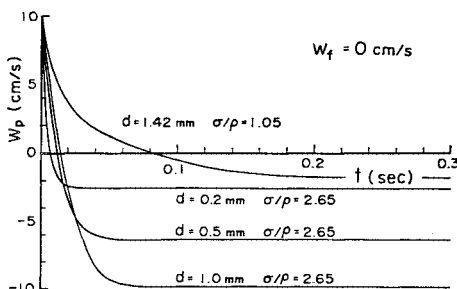


Fig. 6 Variations of vertical velocity of particle with time in the case that w_r equals zero.

合距離理論から求めた次式より求められる¹⁾。

$$t_{em} = 0.3 \eta_s \frac{h}{u_*} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\eta_s = z_{pm}/h$ 、 z_{pm} ：粒子の平均浮遊高さである。これより、粒子が河床を離脱してから τ 時間後に、ステップ n の運動過程にあるとすれば、 $f(z, \tau)$ は、

$$f(z, \tau) = \frac{(\tau - T_{n-1})\eta_{n-1}(z) + (T_n - \tau)\eta_n(z)}{t_{em}} \dots\dots\dots (12)$$

となる。ここに、 T_n ：ステップ n の終了時刻である。したがって、平衡浮遊砂量 q_s は式 (8)～(12) より、

$$q_s = \int_0^h C(z)u(z)dz \dots\dots\dots (13)$$

で計算される。ここに、 $u(z)$ ：流下方向の流速分布関数である。

従来の拡散理論や確率過程理論では、浮遊砂量の算定において、掃流砂量と浮遊砂量の境界の高さとその点の濃度を設定する必要がある。しかし、河床付近では掃流砂と浮遊砂が混在しており、明確にその位置を決めることは難しく、それゆえその点の濃度の推定もあいまいなものになっている。この点が、浮遊砂量の推定精度が低下する大きな要因の1つとなっている。一方、本理論では、基準点の位置や基準点濃度を与える必要がなく、直接、式 (8)～(13) を用いて浮遊砂量の計算ができる。また、式 (8) の積分を 0 から任意の時間まで行えば、濃度が平衡になるまでの非平衡状態の議論が行える。

(2) 非平衡浮遊砂量の算定法

アーマールコート形成過程やダムの堆砂過程では、河床砂礫の浮上率や水理条件が場所的・時間的に変化するために、浮遊砂は非平衡状態となっている。非平衡浮遊砂量の算定のためには、浮遊粒子の運動履歴、すなわち粒子がいつ、どこで河床を離脱したかを知ることが重要である。したがって、 q_{su} と $f(z, \tau)$ が離脱時刻 $t = t_0$ と離脱地点 $x = x_0$ の関数となる。また、混合砂の場合を対象にすると、これらは遮蔽効果を考慮して求めなければならない。このような非平衡浮遊砂量の算定は一般的な河床条件、水理条件に対する個々の粒子の解析に基づくのが便利であり、著者らの行った浮遊粒子の運動解析¹⁾が有用である。以下では、混合砂の中の粒径階 i の粒子 (以後粒子 i) の非平衡浮遊砂量について検討する。

$x < 0$ および $t < 0$ で河床粒子の浮上がないものとし、粒子が河床を離脱して河床に戻るまでの間に水理条件が変化しないものとする、粒子 i の $x = X$ 、 $t = T$ における浮遊砂濃度分布は次式で表示される。

$$C_i(X, z, T) = \int_0^{\tau_{maxi}} \frac{1}{\sigma} q_{su}(x_0, t_0) f_i(x_0, z, \tau, t_0) d\tau \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 $\tau = T - t_0$ 、 $X = x_0 + u_{pi}(\tau) \cdot \tau$ 、 $\tau_{maxi} = \min(T,$

$X/u_{pi}(\tau_{maxi}))$ である。ここに、 $q_{su}(x_0, t_0) : t = t_0$ 、 $x = x_0$ における粒子 i の浮上率、 $f_i(x_0, z, \tau, t_0) : t = t_0$ に $x = x_0$ から離脱した粒子が τ 時間後存在する高さの確率分布、 $u_{pi}(\tau)$ ：粒子 i の浮上してから τ 時間後までの流下方向の時間平均移動速度である。

q_{su} は式 (5) より次式で計算できる。

$$q_{su}(x, t) / \rho \sqrt{gd_i} = \frac{2}{3} K p_i \sqrt{\frac{6}{\pi} \frac{1}{s+1}} \int_{\eta_{0i}}^{\infty} \frac{u_*}{\sqrt{gd_i}} \cdot \sqrt{c_i k_i^2 \eta - \frac{\pi}{8} C_{D0i} \xi_{0i}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \eta^2\right) d\eta \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $\eta_{0i} = (\pi/8) C_{D0i} \xi_{0i}^2 / c_i k_i^2$ 、 $C_{D0i} = 2 + 24 \nu / (w_{0i} d_i)$ 、 $\xi_{0i} = w_{0i} / u_*$ で、 d_i ：粒子 i の平均粒径、 w_{0i} ：粒子 i の平均沈降速度、 k_i ：粒子 i に対する遮蔽係数、 c_i ：粒子 i に対する揚圧力係数である。

$f_i(x_0, z, \tau, t_0)$ は平衡浮遊砂量の場合と同様、文献1)の解析法、もしくは式 (9)～(12) と同様の方法で計算できる。したがって、 $t = T$ 、 $x = X$ における粒子 i の浮遊砂量 $q_{si}(X, T)$ は、次式で求められる。

$$q_{si}(X, T) = \int_0^h C_i(X, z, T) u(z) dz \dots\dots\dots (16)$$

式 (15) では、遮蔽係数 k_i がパラメーターとなっており、浮遊砂量の算定に遮蔽効果が考慮されている。 k_i を求めるためには、河床の粒度分布から粒子 i の河床表面における存在高さを求める必要がある¹⁾。まず、簡単な場合として、Fig. 7 に示すような二粒径混合砂の場合を考える。粗砂の粒径を d_1 、細砂の粒径を d_2 、それぞれの混合割合を p_1 、 p_2 とする。このとき、粗砂の頂部から細砂の表面までの距離 Δ_s と p_2 の関係は、粗砂の間隙に存在する細砂と粗砂の体積比と p_1 、 p_2 との関係から、Fig. 7 のように求められる。これより、 p_1 (または p_2) がわかれば、 Δ_s/d_1 が求まり、これより k_2 が推定される。次に、連続的な粒度分布の場合についても、この方法を応用して k_i が求められる。すなわち、混合

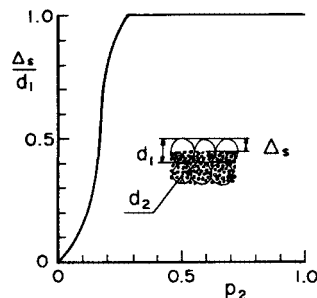


Fig. 7 Relation between percentage of sand on bed and the position of it among gravels.

砂を $d > d_i$ と $d \leq d_i$ の 2 種類に分類し、それぞれの混合割合を p_{i1} および p_{i2} とする。粒子 i に遮蔽効果を及ぼすのは $d > d_i$ の粒子であるので、Fig. 7 の d_i に相当するものを、 $d > d_i$ の粒子の平均粒径 d_{i1} で与える。また、 $d > d_i$ と $d \leq d_i$ の粒子の体積比と p_{i1} 、 p_{i2} から、 d_{i1} の粒子の頂部から河床表面の粒子 i までの距離 Δ_{si} が求められる。これより、 $\Delta_s/d_i = \Delta_{si}/d_{i1}$ に対する k が、粒子 i に対する遮蔽係数 k_i として求められる。

4. 拡散理論への本理論の適用

本理論の問題点は、浮遊砂量の計算法を数値解析に頼らざるを得ないことである。一方、拡散理論では、平衡濃度分布に関していえば、たとえば Rouse 分布のように解析解が求められ、実用性の面では優れている。そこで、平衡濃度分布算定の簡易的な方法として拡散理論を用いるために、この理論の問題点である拡散係数と基準点濃度について、本理論に基づいて検討する。

(1) 濃度分布型と拡散係数

濃度分布の基準点の高さを $z=a$ とすると、その点の濃度は式 (8) より、

$$C_B = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma} q_{su} f(a, \tau) d\tau \dots\dots\dots (17)$$

で求められ、濃度分布型は次式となる。

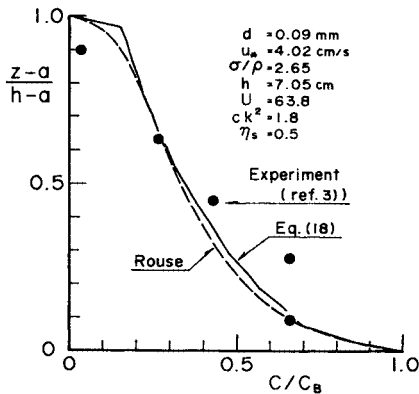


Fig. 8 Equilibrium concentration profile of suspended load.

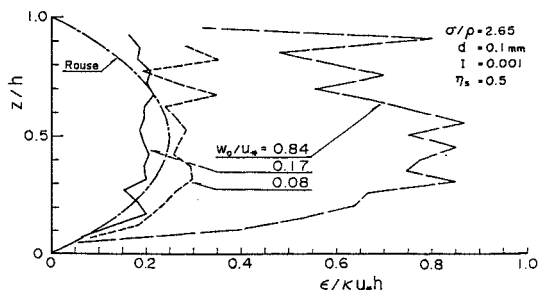


Fig. 9 Coefficient of diffusion of particle.

$$C(z)/C_B = \int_0^\infty f(z, \tau) d\tau / \int_0^\infty f(a, \tau) d\tau \dots\dots\dots (18)$$

Fig. 8 は、芦田・道上²⁾による平坦河床上の濃度分布の実測値と式 (18) の計算値を比較したものである。ただし、 $a/h=0.05$ とおいた。また、Rouse 分布も示されている。式 (18) の結果と実験値は良好に適合しており、本理論の妥当性が示唆される。

次に、式 (18) と Rouse 分布との相異、すなわち、両者の拡散係数の相異について検討する。Fig. 8 の結果から、両者の類似性は予想されるが、 $d=0.01$ cm、 $\sigma/\rho=2.65$ 、 $I=1/1000$ の条件で、 $u_* = 1, 5$ および 10 cm/s のときの濃度分布を例示的に計算し、その結果より拡散係数を求め、Rouse の拡散係数と比較する。ただし、本理論では、水面で粒子の運動の境界条件を考慮していない。特に、 w_0/u_* が小さいとき、この条件が重要であるが、確率過程理論ではこれを物理的にモデル化することが難しい問題となる。ここでは、水面から粒子が消失することを防ぐことを主眼として、ステップ n 後に水面を飛び抜ける場合は、ステップ n 後の粒子の位置にステップ $n-1$ 後の粒子の位置を与えることにする。Fig. 9 は拡散係数の比較を行ったもので、Rouse の拡散係数 ϵ と運動量の拡散係数 ϵ_m との比 ϵ/ϵ_m は 1.0 としている。この図より、 w_0/u_* が小さいとき本理論結果は Rouse のものとはほぼ一致しているが、 w_0/u_* が大きくなると本理論結果の方が大きくなる傾向があることがわかる。本理論による拡散係数を Rouse の拡散係数 (運動量拡散係数) で割った値は、 $w_0/u_* = 0.08, 0.17, 0.84$ のときそれぞれ $1.1, 0.9, 3.2$ であり、これらの値は従来の研究成果³⁾ とほぼ一致する。したがって、本理論で w_0/u_* に応じて拡散係数を求めると、それを用いて平衡濃度分布型は Rouse 分布で近似できるものと考えられる。

(2) 基準点濃度

従来の基準点濃度の算定法の欠点は、基準点の高さがあいまいなことである。中川・辻本²⁾は、この点に鑑み、粒子のサルテーション運動から浮遊運動への遷移機構を考え、基準点の高さのあいまいさを改善して、便宜上 $z/h=5\%$ (従来、この位置を基準点としている研究が多い) の位置の濃度を基準点濃度として算定している。本理論でも、任意の高さの濃度が求まるので、 $z/h=5\%$ の高さを基準点の位置として、基準点濃度 C_B を計算する。

Fig. 10 は、 $d=59 \mu$ と 163μ の粒子 (比重 2.65) で構成された一様砂の場合について、 C_B の w_0/u_* による変化の実測値³⁾ と計算値を比較したものである。両者はよく一致しており、本理論の妥当性がうかがえる。

従来、 C_B を計算するときのパラメーターは、芦田・

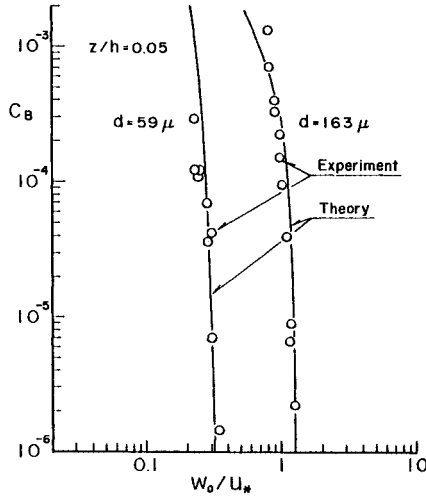


Fig. 10 Comparison between theoretical results and experimental ones concerning concentration at reference level.

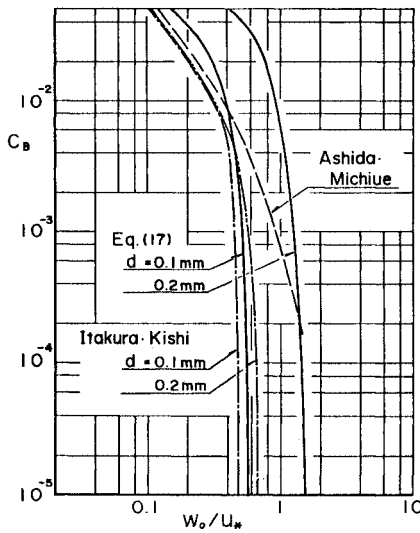


Fig. 11 Concentration at reference level.

道上の理論³⁾では、 w_0/u_* 、 σ/ρ 、Itakura・Kishiの理論⁴⁾では、 w_0/u_* 、 σ/ρ 、 d である。本理論では、 w_0/u_* 、 σ/ρ 、 d 、 c 、 k 、 I がパラメーターとなり、河床条件(c 、 k)と勾配 I が導入されている点が他の理論と異なる。 I は水深と関連して乱れの寿命時間を表わすパラメーターであるが¹⁾、 I の変化は C_B にそれほど影響しない。また、本理論は混合砂についても適用でき、遮蔽係数 k による C_B の変化について検討できる。しかし、ここでは、特に一様砂($\sigma/\rho=2.65$)の場合を対象として、 $k=1$ のときの C_B を w_0/u_* と d をパラメーターとして計算する。Fig. 11は、 $d=0.01$ cmおよび 0.02 cm

の粒子($\sigma/\rho=2.65$)に対して、 C_B の w_0/u_* による変化を示したものである。ただし、 $I=1/1000$ とした。図中には、芦田・道上式およびItakura・Kishiの式も示されている。本理論と他の理論との傾向はほぼ等しいが、浮遊限界のときの w_0/u_* の値が違っている。本理論では、文献1)で詳細に検討した浮遊条件が考慮されているため、Fig. 10にも示されているように、浮遊限界付近の適合性がよい。

実際に、 C_B の算定にこの理論を用いる場合には、いろいろな条件に対して C_B と w_0/u_* の関係を求め、それを適当な関数で近似しておくとう便利であろう。また、本理論では、 w_0/u_* が減少すると C_B の増加率が従来のものより小さくなる傾向がある。これについては、 $w_0/u_* < 0.1$ での実験を行い、理論の妥当性を検証してゆきたい。

5. アーマーコートの形成過程に伴う非平衡浮遊砂量

(1) 浮遊砂を考慮したアーマーコートの形成過程のモデル

a) 流砂および粒度分布の連続式

河床条件はFig. 12に示すとおりで、上流($x < 0$)で固定床、それより下流($0 \leq x$)で混合砂の移動床とする。混合砂の中の最大粒径の礫は移動しないような条件で通水し、いわゆるparallel degradationの状態を対象とする。このような条件で浮遊砂量を算定するためには、河床変動や河床表面の粒度分布の変化が明らかでなければならぬ。掃流砂と河床砂の交換モデルは、平野¹⁰⁾が混合層厚の概念を用いて提案している。そこで、ここでもそれに従って、最大粒径 d_{max} を混合層厚 δ_{mix} として、Fig. 13のように河床砂、掃流砂および浮遊砂の交換を考える。空隙率 λ が変化しないものとする、流砂および河床砂礫の粒度分布の連続式は次のようになる。

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_B}{\partial x} + \frac{(q_{su} - q_{sd})/\sigma}{1-\lambda} = 0 \dots \dots \dots (19)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{1}{\delta_{max}} \left\{ -\frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_{Bi}}{\partial x} - \frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{\sigma} (q_{sui} - q_{sdi}) - \frac{\partial z}{\partial t} p_{oi} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

ここに、 z_s : 河床面の高さ、 $q_B = \sum_i q_{Bi}$ 、 $q_{su} = \sum_i q_{sui}$ 、

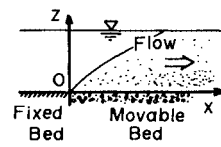


Fig. 12 Definition sketch.

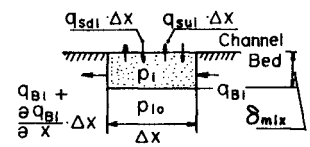


Fig. 13 A model for exchange of bed materials.

$q_{sd} = \sum_i q_{sdi}$ で、 q_{bi} , q_{sui} および q_{sdi} : 粒径階 i の粒子の掃流砂量, 浮上率および沈降率, p_i , p_{i0} : 粒径階 i の粒子の河床表面における粒度割合とその初期値 (混合層より下層での値) である。

b) 掃流砂量式

掃流砂の解析も非平衡特性を考慮すべきであるが, 浮遊砂のステップレングスに比べて掃流砂のステップレングスは非常に短いので, 各地点で平衡状態に達しているとして, 芦田・道上の平衡掃流砂量式¹¹⁾

$$\frac{q_{bi}}{p_i u_* d_i} = 17 \tau_{*i} \left(1 - \frac{\tau_{*ci}}{\tau_{*i}} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_{*ci}}{\tau_{*i}}} \right) \dots\dots\dots (21)$$

を用いる。ここに, τ_{*i} : 粒子 i に対する無次元せん断応力, τ_{*ci} : 粒子 i の無次元限界掃流力である。 τ_{*ci} は Egiazaroff の粒径別限界掃流力の式¹²⁾と芦田・道上によるその修正式¹¹⁾を用いて次式で算定する。

$$\frac{d_i}{d_m} \geq 0.4; \frac{\tau_{*ci}}{\tau_{*cm}} = \left\{ \frac{\log_{10} 19}{\log_{10}(19 d_i/d_m)} \right\}^2 \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{d_i}{d_m} < 0.4; \frac{\tau_{*ci}}{\tau_{*cm}} = 0.85 \frac{d_m}{d_i} \dots\dots\dots (23)$$

ここに, d_m : 混合層の平均粒径, τ_{*cm} : 粒径 d_m に対する無次元限界掃流力である。

c) 非平衡浮遊砂量式

非平衡浮遊砂量は式 (16) から算定できるが, 粒子の流下方向の移動速度 u_p が τ の関数となるため計算が複雑になる。そこで, ここでは, u_p を平均流速 U と結び付けて,

$$u_p(\tau) \equiv \bar{u}_p = k_u U \dots\dots\dots (24)$$

として解析を簡単にする。ここに, k_u : 比例定数であり, この決め方が問題であるが, 浮遊時間の平均値に対する u_p を文献 1) から求め, それより k_u を決めるものとする。

式 (24) を仮定し, 式 (16) 中の $u(z)$ を式 (24) で置き換えると, 式 (16) は次式のように変形される。

$$q_{si}(X, T) = \int_{x_{min}}^X \frac{1}{\sigma} q_{sui} \left(x_0, T - \frac{X-x_0}{\bar{u}_p} \right) \cdot p_{si} \left(x_0, \frac{X-x_0}{\bar{u}_p}, T - \frac{X-x_0}{\bar{u}_p} \right) dx_0 \dots\dots\dots (25)$$

ここに, p_{si} は河床を離脱した粒子 i が, τ 時間後に浮遊状態にある確率で,

$$p_{si}(x_0, \tau, t_0) = \int_0^h f_i(x_0, z, \tau, t_0) dz \dots\dots\dots (26)$$

と表わされる。また, $X_{min} = (0, X - \bar{u}_p T)$ である。

d) 沈降率

沈降率 (単位時間, 単位面積当たり河床に沈降する砂の量) q_{sdi} は, 式 (15), (21) を用いて次式で計算される。

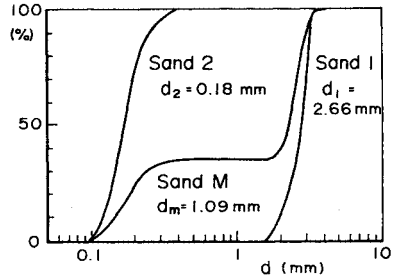


Fig. 14 Grain size distribution of the sands used in the experiment.

$$q_{sdi}(X, T) = \int_{x_{min}}^X q_{sui} \left(x_0, T - \frac{X-x_0}{\bar{u}_p} \right) \cdot \frac{d}{dx} p_{si} \left(x_0, \frac{X-x_0}{\bar{u}_p}, T - \frac{X-x_0}{\bar{u}_p} \right) dx_0 \dots\dots\dots (27)$$

(2) 実験結果と理論結果の比較

実験は幅 30 cm, 長さ 8 m, 勾配 0.008 の水路を用いて行った。実験用砂は, 平均粒径 $d_1 = 2.66$ mm の Sand 1 と平均粒径 $d_2 = 0.18$ mm の Sand 2 を約 7 : 4 の割合で混合した Sand M であり, その粒度分布を Fig. 14 に示す。Sand M を 5.5 m の区間に敷き, 単位幅流量 57 cm²/s, 初期摩擦速度 3.3 cm/s の条件で通水し, 河床位, 水位, 浮遊砂量, 下流端全流砂量, 河床の粒度分布などの測定を行った。この条件では Sand 2 のみが流送され, アーマーコートが形成される。浮遊砂の採集には, 流下方向に 4 か所設置された直径 0.75 cm のサイフォンを用い, 河床から一定の高さにおける濃度を測定した。浮遊砂量は簡単のために, 浮遊砂濃度の測定結果と Rouse の濃度分布および対数則を使って近似的に換算して求められた。なお, 移動床部の上・下流は固定床とし, 上流からの給砂は行っていない。

Fig. 15 は, $x = 5.5$ m (移動床部の下流端) における

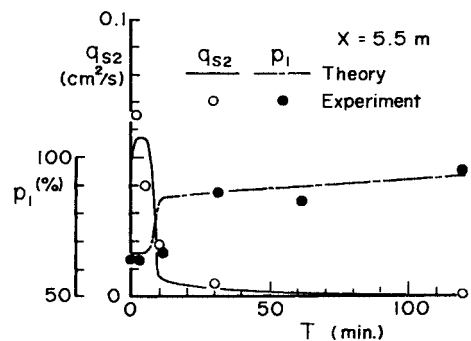


Fig. 15 Comparison between theoretical results and experimental ones concerning percentage of gravel on bed and suspended load of sand at $x = 5.5$ m.

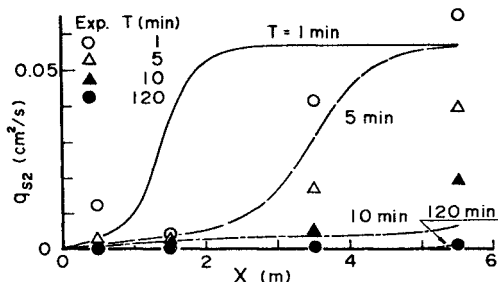


Fig. 16 Comparison between theoretical results and experimental ones concerning variation of suspended load with longitudinal distance.

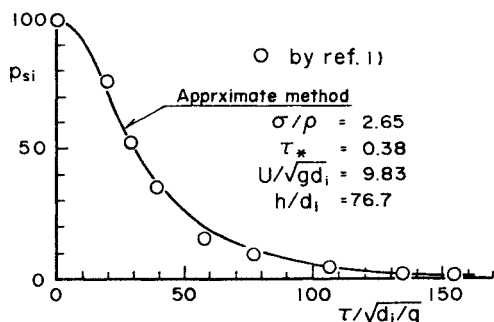


Fig. 17 Comparison between p_{si} calculated by ref. 1) and its approximate method.

粗砂の割合 p_1 と浮遊砂量 q_{s2} の時間変化を示したものである。この図から、通水を開始してから約 10 分後にアーマールコートが伝播しており、浮遊砂量や河床表面の細砂の割合が急激に減少していることがわかる。Fig. 16 は、 q_{s2} の縦断分布の時間変化を示したものである。実験値が少ないことや通水開始時等流になるまでに上流の細砂が若干流送されたことなどの理由で、浮遊砂量が平衡状態になっている領域がはっきりしないが、時間の経過とともに、非平衡浮遊砂の領域が下流へ拡がっている様子がわかる。

ついで、本実験のシミュレーションを差分法で行った。ただし、擬似等流を仮定し、抵抗則には対数則を適用し、流下方向の差分を $\Delta x = 5 \text{ cm}$ 、時間差分を $\Delta t = \Delta x / \bar{u}_p$ 、 $k_s/d_m = 2$ 、 $\eta_s = 0.25$ とおいた。ここに、 k_s ：相当粗度高である。また、粒子の x 方向の平均移動速度は簡単のために平均流速で近似し、 p_{si} (式(26)) の計算には、Yalin らの近似解 (式(9)~(12)) を用いた。Fig. 17 は、 p_{si} を文献 1) の解析法および近似解法によって求めた結果を比較したものである。この図より、本条件に対しては両者がよく一致していることがわかる。

Fig. 15, 16 に、 $x = 5.5 \text{ m}$ における粗砂の割合 p_1 、浮遊砂量 q_{s2} の時間変化および浮遊砂量の縦断分布の時間変化についての理論結果を示す。これらの図から、理論

値はアーマールコートの形成過程を比較的良好に模擬しており、それに伴って生じる非平衡浮遊砂の問題に対して、本理論は十分適用することができるものと考えられる。

6. 結 語

本研究では、浮上率の予測式について理論的・実験的に明らかにし、粒子の浮遊運動の確率的解析を行った著者らの研究成果を用いて、平衡および非平衡浮遊砂量の算定法について検討した。本研究の特徴は、濃度分布が直接計算できること、混合砂で遮蔽効果を考慮しなければならないときにも適用できること、非平衡浮遊砂量の算定に有効であることなどである。以下、主要な結果を列挙する。

(1) 河床砂礫の浮上率の推定式を遮蔽効果を考慮して導いた。したがって、この式は一樣砂および混合砂に対して適用できるものである。礫の遮蔽効果の変化に対して、浮上率が適切に計算できることを実験から検証した。

(2) 著者らの浮遊砂の運動機構に関する研究と浮上率に関する本理論から、平衡および非平衡浮遊砂量の算定法を確率過程理論に基づいて定式化した。この方法では、従来のモデルと違って、基準点濃度の算定は不要であり、また、礫の遮蔽効果があるときにも適切に浮遊砂量が計算される。

(3) 平衡浮遊砂濃度分布を本確率過程理論に基づいて計算した結果、分布型はほぼ Rouse 分布に一致することがわかった。また、本理論に従って算定した基準点濃度 ($z = 0.05 h$ の高さの濃度) は、従来のものと比べて、浮遊限界付近で実験値との適合性がよくなることが明らかにされた。これより、平衡濃度分布については、実用性の面から考えると、Rouse 分布と本理論による基準点濃度から計算するのが便利であると思われる。

(4) アーマールコートの形成過程を例にとりて、その過程で生じる非平衡浮遊砂量の算定法について検討した。これの妥当性は、二粒径混合砂を用いた実験より検証された。

参 考 文 献

- 1) 芦田和男・藤田正治：河床粒子の浮遊機構とそのモデル化，土木学会論文集，第 375 号，1986。
- 2) 中川博次・辻本哲郎・村上正吾・小藪 仁：浮遊砂の基準濃度の推定について，第 28 回水理講演会論文集，pp. 665~670，1984。
- 3) 芦田和男・道上正規：浮遊砂に関する研究 (1)——河床付近の濃度——，京都大学防災研究所年報第 13 号 B，pp. 233~242，1970。
- 4) Itakura, T. and Kishi, T. : Open Channel Flow with Suspended Sediments, Proc. ASCE, HY8, August, pp. 1325~1343, 1980.

- 5) 久保輝一郎・水渡英二・中川有三・早川宗八郎：粉体，丸善，pp.208~211, 1964.
- 6) Yalin, M.S. and Krishnappan, B.M. : A probabilistic method for determining the distribution of suspended solids in open channels, I. A. H. R., International symposium on river mechanics, A 52-1~A 52-12, 1973.
- 7) 芦田和男・道上正規：浮遊砂量に関する実験的研究，京都大学防災研究所年報，第10号B，pp.63~79, 1967.
- 8) 辻本哲朗：乱流による土砂輸送——浮遊砂の拡散係数に対する検討——，第30回水理講演会論文集，pp.637~642, 1986.
- 9) 芦田和男・岡部健士・藤田正治：粒子の浮遊限界と浮遊砂量に関する研究，京都大学防災研究所年報，第25号B-2，pp.401~416, 1982.
- 10) 平野宗夫：Armouringをともなう河床低下について，土木学会論文報告集，第195号，pp.55~65, 1971.
- 11) 芦田和男・道上正規：移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第206号，pp.59~69, 1972.
- 12) Egiazaroff, I.V. : Calculation of Nonuniform Sediment Concentrations, Proc. ASCE, Vol.91, HY4, pp.225~247, 1965.

(1986.1.13・受付)