

# 多変数最大エントロピー分布とその基礎特性に関する研究

## A STUDY ON MULTIVARIATE MAXIMUM ENTROPY DISTRIBUTION AND ITS BASIC CHARACTERISTICS

寒川典昭\*・荒木正夫\*\*・佐藤健次\*\*\*

By Noriaki SOGAWA, Masao ARAKI and Kenji SATO

The equation of multivariate maximum entropy distribution is evolved for the hydrologic frequency analysis, and its characteristics, which include the applicability to hydrologic data, are investigated in detail.

It is proved that the maximum entropy distribution is based on the same level as Pearson's system of frequency-curves because it derives some distributions which are well-known in statistics. The general equation of multivariate maximum entropy distribution with the restriction of arbitrary function  $g_r(\cdot)$  is obtained by Lagrange's method of multipliers. In the case of the moment problem, the parameters of the distribution are identified by the iteration method. When three-variate normal distribution and hydrologic data are adopted as the populations, the conformity of multivariate maximum entropy distribution is investigated in connection with low-order moments, and it is proved that 3M (2, 2, 2, 2) is in a good agreement with actual data.

*Keywords*: maximum entropy distribution, frequency analysis, moment problem

### 1. ま え が き

相関のある多変数を同時に統計解析するためには、多変数の同時分布が必要であるが、従来の研究は主として多変数正規分布<sup>1)</sup>と多変数ガンマ分布<sup>2)</sup>に立脚したものであった。多変数ガンマ分布は、対称形しか表現できない多変数正規分布の欠点を是正し、広く非対称分布に適用できるが、その解法は困難であり、現在のところ水文統計分野への導入ははかられていない。また、水水量はしばしば小標本であるため、母集団としていかなる分布を採用すべきかという問題に多くの不確定さが存在している。

本論文は、このような問題に対処するために、多変数最大エントロピー分布を提案し、その基礎特性を検討するものである。なお、われわれは、今までエントロピーを最大にする分布を MEP 分布とよんでいたが、他の分野での呼称と整合性をとり、かつその意味が一見して理解できるように、以後最大エントロピー分布とよぶこ

とにする。

#### (1) 従来の研究と検討

1972年、Sonuga<sup>3)</sup>は、不確定さの尺度であるエントロピーの概念を水文頻度解析に導入し、最大エントロピー原理 (MEP) を用いて確率密度関数を決定する方法を提案した。この手法は、標本から得られる母集団についての情報は積極的に取り入れ、それ以外はできるだけ確率変数がランダムに発生する、すなわちエントロピーを最大にする確率密度関数を求めるもので、密度関数自体は一定の形を有せず、分布形は制約条件 (母集団からの情報の取り入れ方) によって決定されるため、分布形の採用に理論的な妥当性をなした点で高く評価される。しかし、Sonugaの方法は、3次以上のモーメントを制約条件に加え難いという欠点を有していた。

そこで、われわれは<sup>4), 5)</sup>、情報理論の分野で Wragg & Dowson<sup>6)</sup>が示した展開法を導入し、任意次数までのモーメントを制約条件とした1変数最大エントロピー分布の特性を研究し、水水量への適用をはかった。さらに、それを2変数に拡張し、同様な検討を行った<sup>7)</sup>。

#### (2) 本研究の目的と概要

本研究は、上述の2変数最大エントロピー分布を多変数に拡張した、多変数最大エントロピー分布について議論するものである。

\* 正会員 工修 信州大学助手 工学部土木工学科  
(〒380 長野市若里500)

\*\* 正会員 工博 信州大学教授 工学部土木工学科(同上)  
\*\*\* 正会員 工修 (株)東京建設コンサルタント(研究当時  
信州大学大学院工学研究科学生)(〒171 豊島区西池袋1-  
28-6 大和産業ビル)

まず最初に、確率分布の領域における最大エントロピー分布の位置付けを行う。次に、多変数最大エントロピー分布の一般式を求め、任意次数のモーメントと相乗モーメントを制約条件とした場合の理論式を展開し、そのパラメーター同定法を示す。さらに、適切な制約条件を与えることにより既存分布を導出する。最後に、3変数正規分布および実測水文資料に対する適合度を、採用するモーメントの次数との関連から検討し、この分布の実用性を調べる。

2. 最大エントロピー分布の位置付け<sup>2)</sup>

最大エントロピー分布は、制約条件の与え方によって統計学においてよく知られている分布形のいくつかを表現することができる。いま、1変数最大エントロピー分布を例にとって説明する。

連続変数  $x$  に対する確率密度関数を  $p(x)$  とすると、エントロピー  $H(x)$  は

$$H(x) = - \int p(x) \ln p(x) dx \dots\dots\dots (1)$$

また、任意関数  $g_r(x)$  の期待値は

$$\int g_r(x) p(x) dx = E[g_r(x)], \quad r=1, 2, \dots, m \dots\dots (2)$$

ここで、 $E[\cdot]$  は期待値記号であり、式 (2) は確率密度関数が具備すべき条件  $g_r(x)=1$  を含む。

式 (2) を制約条件として、式 (1) を最大にする  $p(x)$  を求めると、

$$p(x) = \exp \left\{ -1 - \sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x) \right\}^{4)} \dots\dots\dots (3)$$

上式は一般的な1変数最大エントロピー分布であり、適切な  $g_r(x)$  を与えることにより既存分布が導出される。

1) 1変数一様分布<sup>8)</sup>

$$g_1(x) = 1 \dots\dots\dots (4)$$

とし、確率変数の存在範囲を  $[0, l]$  として式 (2) を次のように書き換える。

$$\int_0^l p(x) dx = 1 \dots\dots\dots (5)$$

このとき式 (3) は

$$p(x) = \frac{1}{l} \dots\dots\dots (6)$$

となり、これは1変数一様分布である。

2) 1変数正規分布<sup>9)</sup>

$$g_1(x) = 1 \dots\dots\dots (7)$$

$$g_2(x) = (x - \mu)^2 \dots\dots\dots (8)$$

とし、確率変数の存在範囲を  $(-\infty, \infty)$  として式 (2)

を次のように書き換える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \dots\dots\dots (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx = \sigma^2 \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $\mu, \sigma^2$  は定数である。

このとき、式 (3) は

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

となり、これは1変数正規分布である。

3) 1変数対数正規分布<sup>9)</sup>

$$g_1(x) = 1 \dots\dots\dots (12)$$

$$g_2(x) = (\ln x - \lambda)^2 \dots\dots\dots (13)$$

とし、確率変数の存在範囲を  $[0, \infty)$  として式 (2) を次のように書き換える。

$$\int_0^{\infty} p(x) dx = 1 \dots\dots\dots (14)$$

$$\int_0^{\infty} (\ln x - \lambda)^2 p(x) dx = \zeta^2 \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $\lambda, \zeta^2$  は定数である。

このとき式 (3) は

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta^2} x} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\zeta^2} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

となり、これは1変数対数正規分布である。

4) 1変数指数分布<sup>9)</sup>

$$g_1(x) = 1 \dots\dots\dots (17)$$

$$g_2(x) = x \dots\dots\dots (18)$$

とし、確率変数の存在範囲を  $[0, \infty)$  として式 (2) を次のように書き換える。

$$\int_0^{\infty} p(x) dx = 1 \dots\dots\dots (19)$$

$$\int_0^{\infty} xp(x) dx = \eta \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 $\eta$  は定数である。

このとき式 (3) は

$$p(x) = \frac{1}{\eta} \exp \left( -\frac{x}{\eta} \right) \dots\dots\dots (21)$$

となり、これは1変数指数分布である。

5) グンベル分布<sup>10)</sup>

$$g_1(x) = 1 \dots\dots\dots (22)$$

$$g_2(x) = (x - a)/\beta \dots\dots\dots (23)$$

$$g_3(x) = \exp \{ -(x - a)/\beta \} \dots\dots\dots (24)$$

とし、確率変数の存在範囲を  $(-\infty, \infty)$  として式 (2) を次のように書き換える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \dots\dots\dots (25)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x - a}{\beta} \right) p(x) dx = \gamma \dots\dots\dots (26)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\left( \frac{x - a}{\beta} \right) \right\} p(x) dx = 1 \dots\dots\dots (27)$$

注) このことは2変数最大エントロピー分布をもとに文献7)で触れているが、ここでは1変数最大エントロピー分布に基づいて詳細に議論し直している。

ここで、 $\alpha, \beta$  は定数、 $\gamma$  はオイラー定数である。

このとき、式 (3) は

$$p(x) = \frac{1}{\beta} \exp \left[ -\left( \frac{x-\alpha}{\beta} \right) - \exp \left\{ -\left( \frac{x-\alpha}{\beta} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (28)$$

となり、これはグンベル分布である。

一方、ピアソンは、統計学に出てくる確率密度関数の多くは、微分方程式

$$\frac{1}{p(x)} \frac{dp(x)}{dx} = \frac{k_0 + x}{k_1 + k_2 x + k_3 x^2} \dots\dots\dots (29)$$

の解であることを示した。ここで、 $k_0, k_1, k_2, k_3$  は定数である。 $p(x)$  は定数相互間の関係により、3個の main types と 10個の transition types に分類され、それらはピアソン系の分布とよばれている<sup>11)</sup>。

いま、両者を比較すると、最大エントロピー分布の制約条件、すなわち式 (2) は、ピアソン系の分布の定数相互間の関係に、任意関数  $g_r(x)$  を制約条件とした最大エントロピー分布、すなわち式 (3) は、式 (29) の微分方程式に相当する。

このことは、最大エントロピー分布はピアソン系の分布等と同レベルで議論されるべきものであり、具体的な  $g_r(x)$  を与えて得られた最大エントロピー分布、たとえば式 (6), (11), (16), (21) および (28) は、ピアソン系の分布の1つであるピアソンⅢ型分布等と対応されるべきものであることを示している。

### 3. 理論式および既存分布の導出

#### (1) 理論式

##### a) 多変数最大エントロピー分布

連続な確率変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  に対する  $n$  次元同時確率密度関数を  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  とすると、エントロピー  $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$  は

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \int \dots \int p(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \ln p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \dots\dots\dots (30)$$

また、任意関数  $g_r(x_1, x_2, \dots, x_n)$  の期待値は、

$$\int \dots \int g_r(x_1, x_2, \dots, x_n) p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = E[g_r(x_1, x_2, \dots, x_n)], \quad r=1, 2, \dots, m \dots\dots\dots (31)$$

なお、式 (31) は、確率密度関数が具備すべき条件  $g_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$  を含む。

式 (31) を制約条件として、式 (30) を最大にする  $p(\cdot)$  を求めること (最大エントロピー法) は、母集団から得られる情報は  $g_r(\cdot)$  の期待値の形で取り入れ、それ以外ではできるだけ確率変数がランダムに発生する分布を算定していることになる。積率法、最尤法は仮定された確率分布の母数推定法であるのに対し、最大エント

ロピー法では母集団の分布形をあらかじめ仮定せず、あるいは経験によって決定せず、分布形は  $g_r(\cdot)$  に依存して決まり、その母数は式 (31) を満足するように決定される。換言すれば、それは情報 ( $g_r(\cdot)$ ) の与え方には主観が入るが、それ以外ではできるだけ客観的な分布を求めていることになる。われわれは、水文事象のようにデータ数が少なく不確定性の強い現象の説明に、このような確率分布を導入することを妥当と考える。また、多変数確率分布が前述のような状況にある現在、このような分布を開発することは有意義である。

そこで、上記の問題をラグランジュの未定乗数法で解く。ラグランジュ関数は、

$$L = H + \sum_{r=1}^m \lambda_r \{ E[g_r(x_1, x_2, \dots, x_n)] - \int \dots \int g_r(x_1, x_2, \dots, x_n) p(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n \} \dots\dots\dots (32)$$

上式を  $p(\cdot)$  について変分をとり 0 とおくと、

$$-[1 + \ln p(x_1, x_2, \dots, x_n)] - \sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \dots\dots\dots (33)$$

ゆえに

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp \left\{ -1 - \sum_{r=1}^m \lambda_r g_r(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\} \dots\dots\dots (34)$$

上式は一般的な多変数最大エントロピー分布であり、種々の  $g_r(\cdot)$  を与えることができる。

##### b) パラメーター同定法

いま、式 (31) として、取扱いが容易で 4 次までは分布の形状との関係が明らかにされている原点まわりのモーメントを採用し、積分区間は水流量を対象としていることから  $[0, \infty)$  とする。そのとき、式 (31) は次式のように書き換えられる。

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{a_1} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = {}_1\mu_{a_1}, \quad a_1 = 1, 2, \dots, N_{a_1} \dots\dots\dots (35 \cdot 1)$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_2^{a_2} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = {}_2\mu_{a_2}, \quad a_2 = 1, 2, \dots, N_{a_2} \dots\dots\dots (35 \cdot 2)$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_n^{a_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = {}_n\mu_{a_n}, \quad a_n = 1, 2, \dots, N_{a_n} \dots\dots\dots (35 \cdot n)$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \mu_{b_1 b_2 \dots b_n}, \quad b_1 = 0, 1, \dots, N_{b_1}, \quad b_2 = 0, 1, \dots, N_{b_2}, \dots, \quad b_n = 0, 1, \dots, N_{b_n} \dots\dots\dots (35 \cdot n+1)$$

ここで、 $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$  は確率密度関数が具備すべ

き条件であり、 $\mu_{0\cdots 0}=1$ とする。また、 $b_i$ の1つが1以上の整数で、他は0となることはない。なぜなら、このような情報は式(35・1)から式(35・n)に含まれるからである。

式(35・1)~(35・n+1)を制約条件とした最大エントロピー分布は次式となる。

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp \left\{ -1 - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \gamma_{a_1} x_1^{a_1} - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \gamma_{a_2} x_2^{a_2} \right. \\ \left. - \dots - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} \gamma_{a_n} x_n^{a_n} - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \right. \\ \left. \cdot \delta_{b_1 b_2 \dots b_n} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

ここで、 $\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}, \dots, \gamma_{a_n}, \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}$ はラグランジュ乗数である。

式(36)を式(35・1)~(35・n+1)に代入すると、

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{a_1} \exp \left\{ -1 - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \gamma_{a_1} x_1^{a_1} - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \gamma_{a_2} x_2^{a_2} \right. \\ \left. - \dots - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} \gamma_{a_n} x_n^{a_n} - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \right. \\ \left. \cdot \delta_{b_1 b_2 \dots b_n} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \mu_{a_1}, \\ a_1 = 1, 2, \dots, N_{a_1} \dots \dots \dots (37 \cdot 1)$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_2^{a_2} \exp \left\{ -1 - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \gamma_{a_1} x_1^{a_1} - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \gamma_{a_2} x_2^{a_2} \right. \\ \left. - \dots - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} \gamma_{a_n} x_n^{a_n} - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \right. \\ \left. \cdot \delta_{b_1 b_2 \dots b_n} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \mu_{a_2}, \\ a_2 = 1, 2, \dots, N_{a_2} \dots \dots \dots (37 \cdot 2)$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_n^{a_n} \exp \left\{ -1 - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \gamma_{a_1} x_1^{a_1} - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \gamma_{a_2} x_2^{a_2} \right. \\ \left. - \dots - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} \gamma_{a_n} x_n^{a_n} - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \right. \\ \left. \cdot \delta_{b_1 b_2 \dots b_n} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \mu_{a_n}, \\ a_n = 1, 2, \dots, N_{a_n} \dots \dots \dots (37 \cdot n)$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \exp \left\{ -1 - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \gamma_{a_1} x_1^{a_1} \right. \\ \left. - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \gamma_{a_2} x_2^{a_2} - \dots - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} \gamma_{a_n} x_n^{a_n} - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \right. \\ \left. \cdot \delta_{b_1 b_2 \dots b_n} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \mu_{b_1 b_2 \dots b_n}, \\ b_1 = 0, 1, \dots, N_{b_1}, b_2 = 0, 1, \dots, N_{b_2}, \dots, b_n = 0, 1, \dots, N_{b_n} \\ \dots \dots \dots (37 \cdot n+1)$$

式(36)のパラメーター、すなわちラグランジュ乗数 $\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}, \dots, \gamma_{a_n}, \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}$ は式(37・1)~(37・n+1)を連立させて解くことにより決定される。

ここで、われわれは2変数最大エントロピー分布のパラメーター同定で用いた方法を多変数に拡張する。いま、

$\gamma_{a_1}, \gamma_{a_2}, \dots, \gamma_{a_n}, \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}$ の近似値を $\gamma_{a_1}^0, \gamma_{a_2}^0, \dots, \gamma_{a_n}^0, \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}^0$ 、残差を $\epsilon_{a_1}, \epsilon_{a_2}, \dots, \epsilon_{a_n}, \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_n}$ とおくと、

$$\gamma_{a_1} = \gamma_{a_1}^0 + \epsilon_{a_1}, \gamma_{a_2} = \gamma_{a_2}^0 + \epsilon_{a_2}, \dots, \\ \gamma_{a_n} = \gamma_{a_n}^0 + \epsilon_{a_n}, \delta_{b_1 b_2 \dots b_n} = \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}^0 + \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} \\ \dots \dots \dots (38)$$

上式を式(37・1)に代入すると、

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{a_1} \exp \left\{ -1 - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} (\gamma_{a_1}^0 + \epsilon_{a_1}) x_1^{a_1} \right. \\ \left. - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} (\gamma_{a_2}^0 + \epsilon_{a_2}) x_2^{a_2} - \dots - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} (\gamma_{a_n}^0 + \epsilon_{a_n}) x_n^{a_n} \right. \\ \left. - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} (\delta_{b_1 b_2 \dots b_n}^0 + \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_n}) x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \right\} \\ \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = \mu_{a_1}, a_1 = 1, 2, \dots, N_{a_1} \dots \dots \dots (39)$$

ここで、 $\epsilon_{a_1}, \epsilon_{a_2}, \dots, \epsilon_{a_n}, \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_n}$ を微小とすると、

$$\exp \left\{ - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \epsilon_{a_1} x_1^{a_1} \right\} \doteq 1 - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \epsilon_{a_1} x_1^{a_1}, \\ \exp \left\{ - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \epsilon_{a_2} x_2^{a_2} \right\} \doteq 1 - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \epsilon_{a_2} x_2^{a_2}, \\ \dots \dots \dots \\ \exp \left\{ - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} \epsilon_{a_n} x_n^{a_n} \right\} \doteq 1 - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} \epsilon_{a_n} x_n^{a_n}, \\ \exp \left\{ - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \right\} \\ \doteq 1 - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \\ \dots \dots \dots (40)$$

上式を式(39)に代入し、2次以上の微小量を無視して整理すると、

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{a_1} \exp \left\{ -1 - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \gamma_{a_1}^0 x_1^{a_1} - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \gamma_{a_2}^0 x_2^{a_2} \right. \\ \left. - \dots - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} \gamma_{a_n}^0 x_n^{a_n} - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \right. \\ \left. \cdot \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}^0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \right\} \left\{ 1 - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \epsilon_{a_1} x_1^{a_1} \right. \\ \left. - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \epsilon_{a_2} x_2^{a_2} - \dots - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} \epsilon_{a_n} x_n^{a_n} - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \right. \\ \left. \cdot \epsilon_{b_1 b_2 \dots b_n} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \mu_{a_1}, \\ a_1 = 1, 2, \dots, N_{a_1} \dots \dots \dots (41)$$

ここで、

$$A_k^k = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_k^{i_k} \exp \left\{ -1 - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \gamma_{a_1}^0 x_1^{a_1} \right. \\ \left. - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \gamma_{a_2}^0 x_2^{a_2} - \dots - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} \gamma_{a_n}^0 x_n^{a_n} - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \right. \\ \left. \cdot \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}^0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \right\} dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \exp \left\{ -1 \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \gamma_{a_1}^0 x_1^{a_1} - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \gamma_{a_2}^0 x_2^{a_2} - \dots - \sum_{a_n=1}^{N_{a_n}} \gamma_{a_n}^0 x_n^{a_n} \\
 & - \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}^0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \Big\} dx_1 dx_2 \dots dx_n \dots \dots \dots (42)
 \end{aligned}$$

$$B_k^{ik} = A_k^{ik} - \mu_{ik}, \quad B_{1 \dots n}^{i_1 i_2 \dots i_n} = A_{1 \dots n}^{i_1 i_2 \dots i_n} - \mu_{i_1 i_2 \dots i_n} \dots \dots \dots (43)$$

とおくと、式(41)から次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j_1=1}^{N_{a_1}} A_{1 \dots j_1}^{i_1 j_1} \varepsilon_{j_1} + \sum_{j_2=1}^{N_{a_2}} A_{1 \dots j_2}^{i_1 i_2} \varepsilon_{j_2} + \dots + \sum_{j_n=1}^{N_{a_n}} A_{1 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon_{j_n} \\
 & + \sum_{j_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{j_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{j_1=0}^{N_{b_1}} A_{1 \dots j_2}^{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = B_{i_1}^{i_1}, \\
 & i_1 = 1, 2, \dots, N_{a_1} \dots \dots \dots (44 \cdot 1)
 \end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j_1=1}^{N_{a_1}} A_{1 \dots j_1}^{i_2 j_1} \varepsilon_{j_1} + \sum_{j_2=1}^{N_{a_2}} A_{1 \dots j_2}^{i_2 j_2} \varepsilon_{j_2} + \dots + \sum_{j_n=1}^{N_{a_n}} A_{1 \dots j_n}^{i_2 j_2 \dots j_n} \varepsilon_{j_n} \\
 & + \sum_{j_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{j_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{j_1=0}^{N_{b_1}} A_{1 \dots j_2}^{i_2 j_2 \dots j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = B_{i_2}^{i_2}, \\
 & i_2 = 1, 2, \dots, N_{a_2} \dots \dots \dots (44 \cdot 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j_1=1}^{N_{a_1}} A_{1 \dots j_1}^{i_1 i_2 \dots j_1} \varepsilon_{j_1} + \sum_{j_2=1}^{N_{a_2}} A_{1 \dots j_2}^{i_1 i_2 \dots j_2} \varepsilon_{j_2} + \dots + \sum_{j_n=1}^{N_{a_n}} A_{1 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots j_n} \varepsilon_{j_n} \\
 & + \sum_{j_1=0}^{N_{b_1}} \dots \sum_{j_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{j_1=0}^{N_{b_1}} A_{1 \dots j_2}^{i_1 i_2 \dots j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = B_{i_1}^{i_1}, \\
 & i_1 = 1, 2, \dots, N_{a_n} \dots \dots \dots (44 \cdot n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j_1=1}^{N_{a_1}} A_{1 \dots j_1}^{i_1 + j_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon_{j_1} + \sum_{j_2=1}^{N_{a_2}} A_{1 \dots j_2}^{i_1 i_2 + j_2 \dots j_n} \varepsilon_{j_2} + \dots \\
 & + \sum_{j_n=1}^{N_{a_n}} A_{1 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_n + j_n} \varepsilon_{j_n} + \sum_{j_2=0}^{N_{b_2}} \dots \sum_{j_1=0}^{N_{b_1}} \sum_{j_2=0}^{N_{b_2}} A_{1 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_n + j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = B_{i_1 i_2 \dots i_n}^{i_1 i_2 \dots i_n}, \\
 & i_1 = 0, 1, \dots, N_{b_1}, \quad i_2 = 0, 1, \dots, N_{b_2}, \dots, \quad i_n = 0, 1, \dots, N_{b_n} \\
 & \dots \dots \dots (44 \cdot n + 1)
 \end{aligned}$$

式(44.1)~(44.n+1)は、 $1\varepsilon_{a_1}, 2\varepsilon_{a_2}, \dots, n\varepsilon_{a_n}, \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n}$ に関する連立1次方程式であり、変数の数と方程式の数  
が一致するので解き得る。

実際、式(36)のパラメーターは、式(44.1)~(44.n+1)を繰り返し解くことによって求められる。具体的には次のように計算する。

- 1) 近似値、 $1\gamma_{a_1}^0 = 2\gamma_{a_2}^0 = \dots = n\gamma_{a_n}^0 = \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}^0 = 0$ と仮定する。
- 2) 式(44.1)~(44.n+1)の連立方程式を $1\varepsilon_{a_1}, 2\varepsilon_{a_2}, \dots, n\varepsilon_{a_n}, \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n}$ に関して解く。
- 3) 得られた $1\varepsilon_{a_1}, 2\varepsilon_{a_2}, \dots, n\varepsilon_{a_n}, \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n}$ を式(38)に代入して、 $1\gamma_{a_1}, 2\gamma_{a_2}, \dots, n\gamma_{a_n}, \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}$ を計算し、これを次の $1\gamma_{a_1}^0, 2\gamma_{a_2}^0, \dots, n\gamma_{a_n}^0, \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}^0$ とする。
- 4)  $1\varepsilon_{a_1}, 2\varepsilon_{a_2}, \dots, n\varepsilon_{a_n}, \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n}$ が十分小さくなるまで( $10^{-8}$ 程度)、2), 3)を繰り返す。
- 5)  $1\varepsilon_{a_1}, 2\varepsilon_{a_2}, \dots, n\varepsilon_{a_n}, \varepsilon_{b_1 b_2 \dots b_n}$ が微小となったとき、 $1\gamma_{a_1}^0, 2\gamma_{a_2}^0, \dots, n\gamma_{a_n}^0, \delta_{b_1 b_2 \dots b_n}^0$ を解とみなす。

(2) モーメントの基準化

式(35.1)~(35.n+1)における右辺の値、すなわちデータから求められるモーメントは、高次となると大きな値となって取扱いが困難になる。そこで、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の平均が1になるような変数変換、すなわち、

$$u_1 = x_1 / 1\mu_1, \quad u_2 = x_2 / 2\mu_2, \quad \dots, \quad u_n = x_n / n\mu_n \dots \dots \dots (45)$$

を行うと、 $u_1, u_2, \dots, u_n$ に対する同時確率密度関数 $q(u_1, u_2, \dots, u_n)$ は、ヤコビアン $J(\cdot)$ を介して

$$q(u_1, u_2, \dots, u_n) = J \left( \frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{u_1, u_2, \dots, u_n} \right) p(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots \dots \dots (46)$$

ここで、

$$J \left( \frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{u_1, u_2, \dots, u_n} \right) = \begin{vmatrix} 1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n\mu_n \end{vmatrix} = 1\mu_1 2\mu_2 \dots n\mu_n \dots \dots \dots (47)$$

よって、式(46)は

$$q(u_1, u_2, \dots, u_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) 1\mu_1 2\mu_2 \dots n\mu_n \dots (48)$$

あるいは

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = q(u_1, u_2, \dots, u_n) / 1\mu_1 2\mu_2 \dots n\mu_n \dots \dots \dots (49)$$

上述のような変数変換を行うと、式(35.1)~(35.n+1)は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty u_1^{a_1} q(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \\
 & = 1\mu_{a_1} / (1\mu_1)^{a_1} \equiv 1m_{a_1}, \quad a_1 = 1, 2, \dots, N_{a_1} \dots \dots \dots (50 \cdot 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty u_2^{a_2} q(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \\
 & = 2\mu_{a_2} / (2\mu_2)^{a_2} \equiv 2m_{a_2}, \quad a_2 = 1, 2, \dots, N_{a_2} \dots \dots \dots (50 \cdot 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty u_n^{a_n} q(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \\
 & = n\mu_{a_n} / (n\mu_n)^{a_n} \equiv nm_{a_n}, \quad a_n = 1, 2, \dots, N_{a_n} \dots \dots \dots (50 \cdot n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty u_1^{b_1} u_2^{b_2} \dots u_n^{b_n} q(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \\
 & = \mu_{b_1 b_2 \dots b_n} / (1\mu_1)^{b_1} (2\mu_2)^{b_2} \dots (n\mu_n)^{b_n} \equiv m_{b_1 b_2 \dots b_n}, \\
 & b_1 = 0, 1, \dots, N_{b_1}, \quad b_2 = 0, 1, \dots, N_{b_2}, \dots, \quad b_n = 0, 1, \dots, N_{b_n} \\
 & \dots \dots \dots (50 \cdot n + 1)
 \end{aligned}$$

このような、 $1m_{a_1}, 2m_{a_2}, \dots, nm_{a_n}, m_{b_1 b_2 \dots b_n}$ を規準化されたモーメントとよぶ。

次に、 $p(\cdot)$ と $q(\cdot)$ のエントロピーの関係を求める。式(45)と式(49)を式(30)に代入すると、

$$\begin{aligned}
 H(x_1, x_2, \dots, x_n) &= - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty p(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 & \quad \cdot \ln p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\
 &= - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \int_0^\infty q(u_1, u_2, \dots, u_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \ln q(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \\ & + \ln_{(1, \mu_{12}, \mu_{13}, \dots, \mu_{1n})} \\ & \equiv H(u_1, u_2, \dots, u_n) + \ln_{(1, \mu_{12}, \mu_{13}, \dots, \mu_{1n})}. \end{aligned} \quad (51)$$

上式は、エントロピー  $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$  が最大のとき、変数変換したエントロピー  $H(u_1, u_2, \dots, u_n)$  も最大になることを示している。以上より、規準化されたモーメントによる制約条件の下で  $H(u_1, u_2, \dots, u_n)$  を最大にする問題は、b) で定式化した問題と等価であることがわかる。したがって、実際の適用では  $q(\cdot)$  を求めておき、しかる後に式 (49) により  $p(\cdot)$  に変換すればよい。

(3) 既存分布の導出

ここでは適切な  $g_r(\cdot)$  を与えることにより、多変数最大エントロピー分布から既存の多変数分布が導出できることを示す。

a) 多変数一様分布

$$q_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \quad (52)$$

とし、 $n$  個の確率変数の存在範囲を  $[0, l_1], [0, l_2], \dots, [0, l_n]$  として式 (31) を次のように書き換える。

$$\int_0^{l_1} \dots \int_0^{l_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 \quad (53)$$

上式を制約条件とし、式 (30) を最大にする  $p(\cdot)$  を求める。この問題は 3.(1) で述べたように、ラグランジュの未定乗数法で解かれる。すなわち、式 (32), (33) は次の 2 式となる。

$$L = H(x_1, x_2, \dots, x_n) + \alpha \left[ 1 - \int_0^{l_1} \dots \int_0^{l_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right] \quad (54)$$

$$-1 + \ln p(x_1, x_2, \dots, x_n) - \alpha = 0 \quad (55)$$

ここで、 $\alpha$  はラグランジュ乗数である。ゆえに、

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp(1 - \alpha) \quad (56)$$

上式を式 (53) に代入して整理すると、

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 / (l_1 l_2 \dots l_n) \quad (57)$$

これは、多変数一様分布である。

b) 相関を含まない多変数指数分布

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \quad (58)$$

$$g_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{r-1}, \quad r = 2, 3, \dots, r+1 \quad (59)$$

とし、 $n$  個の確率変数の存在範囲を  $[0, \infty)$  として式 (31) を次のように書き換える。

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 \quad (60 \cdot 1)$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_1 p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sigma_1 \quad (60 \cdot 2)$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_2 p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sigma_2 \quad (60 \cdot 3)$$

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_n p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sigma_n \quad (60 \cdot n + 1)$$

ここで、 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  は定数である。

a) と同様に式 (60・1)~(60・n+1) を制約条件とし、式 (30) を最大にする  $p(\cdot)$  を求める。すなわち、式 (54), (55) に対応して、次の 2 式を得る。

$$\begin{aligned} L = & H(x_1, x_2, \dots, x_n) + \alpha \left[ 1 - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right] \\ & + \gamma_1 \left[ \sigma_1 - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_1 p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right] \\ & + \gamma_2 \left[ \sigma_2 - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_2 p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right] + \dots \\ & + \gamma_n \left[ \sigma_n - \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_n p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right] \quad (61) \end{aligned}$$

$$-1 + \ln p(x_1, x_2, \dots, x_n) - \alpha - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2 - \dots - \gamma_n x_n = 0 \quad (62)$$

ここで、 $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  はラグランジュ乗数である。ゆえに、

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp(-1 - \alpha - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2 - \dots - \gamma_n x_n) \quad (63)$$

上式を式 (60・1)~(60・n+1) に代入し、 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n > 0$  の条件の下でラグランジュ乗数を求めると、式 (63) から次式を得る。

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} \exp\left(-\frac{x_1}{\sigma_1} - \frac{x_2}{\sigma_2} - \dots - \frac{x_n}{\sigma_n}\right) \quad (64)$$

これは相関を含まない多変数指数分布である。

4. 適合度の検討と実測データへの適用性

(1) 3変数正規分布に対する適合度の検討

ここでは、3変数最大エントロピー分布がどの程度母集団を再現するかを明らかにするため、3方向とも同じ平均  $\mu$ 、標準偏差  $\sigma$ 、相関係数  $\rho$  をもつ 3変数正規分布 ( $3N(\mu, \sigma, \rho)$  と略記) を母集団と仮定する。なお、最大エントロピー分布の確率変数は  $[0, \infty)$  で定義しているので、母集団とした確率変数の負値領域の影響を小さくするため  $\mu/\sigma$  を大きくすることを考え、以下の計算例では  $\mu/\sigma = 2$  として検討した。

一方、3変数最大エントロピー分布は式 (36) より、

$$p(x_1, x_2, x_3) = \exp\left(-1 - \sum_{a_1=1}^{N_{a_1}} \gamma_{a_1} x_1^{a_1} - \sum_{a_2=1}^{N_{a_2}} \gamma_{a_2} x_2^{a_2} - \dots\right)$$

$$-\sum_{a_3=1}^{N_{a_3}} \gamma_{a_3} x_3^{a_3} - \sum_{b_3=0}^{N_{b_3}} \sum_{b_2=0}^{N_{b_2}} \sum_{b_1=0}^{N_{b_1}} \delta_{b_1 b_2 b_3} x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \dots (65)$$

となり、これを  $3M(s, t, u, v)$  と略記する。ここで、 $s = N_{a_1}$ ,  $t = N_{a_2}$ ,  $u = N_{a_3}$  である。 $v$  は採用した相乗モーメントの指標であり、本稿では以下のように適用した。

- 1)  $v=1$  の場合  
採用するモーメント =  $\{\mu_{000} = 1\}$ .
- 2)  $v=2$  の場合  
採用するモーメント =  $\{\mu_{000}, \mu_{110}, \mu_{011}, \mu_{101}\}$ .
- 3)  $v=3$  の場合  
採用するモーメント =  $\{\mu_{000}, \mu_{110}, \mu_{011}, \mu_{101}, \mu_{111}\}$ .

Table 1 は上述の母集団の基準化されたモーメントと得られた最大エントロピー分布のラグランジュ乗数の値である。たとえば (a)  $3M(2, 2, 2, 2)$  の場合、この最大エントロピー分布は次式を表現している。

$$p(x_1, x_2, x_3) = \exp(-1 + 2.0284x_1 - 1.8054x_1^2 + 2.0284x_2 - 1.8054x_2^2 + 2.0284x_3 - 1.8054x_3^2 - 2.5723 + 0.7066x_2x_3 + 0.7066x_1x_3 + 0.7066x_1x_2)$$

Fig. 1 は母集団と最大エントロピー分布について、3次元確率密度関数  $p(x_1, x_2, x_3)$  を  $x_1-x_2$  平面の2次元

Table 1 Normalized moments and Lagrangian multipliers of maximum entropy distribution to three-variate normal distribution with normalized moments. ( ${}_1\gamma = {}_2\gamma = {}_3\gamma = \gamma$ .)

(a) $3N(2, 1, 0, 2)$						
	$3M(2, 2, 2, 2)$	$3M(3, 3, 3, 2)$	$3M(3, 3, 3, 3)$	normalized moment		
${}_1\mu_1$	-2.0284	1.5591	1.5589	$\mu_{100}$	1.000	
${}_1\mu_2$	1.8054	-2.3145	-2.3145	$\mu_{200}$	1.250	
${}_1\mu_3$	-----	1.2997	1.2997	$\mu_{300}$	1.750	
$\delta_{000}$	2.5723	0.3950	0.3952	$\mu_{000}$	1.000	
$\delta_{011}$	-0.7066	-0.7119	-0.7117	$\mu_{011}$	1.050	
$\delta_{101}$	-0.7066	-0.7119	-0.7119	$\mu_{101}$	1.050	
$\delta_{110}$	-0.7066	-0.7119	-0.7117	$\mu_{110}$	1.050	
$\delta_{111}$	-----	-----	-0.0002	$\mu_{111}$	1.150	

(b) $3N(2, 1, 0, 5)$						
	$3M(2, 2, 2, 2)$	$3M(3, 3, 3, 2)$	$3M(3, 3, 3, 3)$	normalized moment		
${}_1\mu_1$	-1.2519	2.3625	2.3584	$\mu_{100}$	1.000	
${}_1\mu_2$	2.6605	-1.4717	-1.4841	$\mu_{200}$	1.250	
${}_1\mu_3$	-----	1.3073	1.3091	$\mu_{300}$	1.750	
$\delta_{000}$	1.1332	-1.0948	-1.0905	$\mu_{000}$	1.000	
$\delta_{011}$	-1.9519	-1.9631	-1.9538	$\mu_{011}$	1.125	
$\delta_{101}$	-1.9519	-1.9631	-1.9538	$\mu_{101}$	1.125	
$\delta_{110}$	-1.9519	-1.9631	-1.9538	$\mu_{110}$	1.125	
$\delta_{111}$	-----	-----	-0.0093	$\mu_{111}$	1.375	

(c) $3N(2, 1, 0, 8)$						
	$3M(2, 2, 2, 2)$	$3M(3, 3, 3, 2)$	$3M(4, 4, 4, 3)$	normalized moment		
${}_1\mu_1$	-0.9746	2.2588	2.6460	$\mu_{100}$	1.000	
${}_1\mu_2$	5.9677	2.1327	2.1424	$\mu_{200}$	1.250	
${}_1\mu_3$	-----	1.1733	1.3275	$\mu_{300}$	1.750	
${}_1\mu_4$	-----	-----	-0.0648	$\mu_{400}$	2.688	
$\delta_{000}$	0.0138	-1.9805	-2.2246	$\mu_{000}$	1.000	
$\delta_{011}$	-5.4070	-5.2785	-5.8713	$\mu_{011}$	1.200	
$\delta_{101}$	-5.4070	-5.2785	-5.8713	$\mu_{101}$	1.200	
$\delta_{110}$	-5.4070	-5.2785	-5.8713	$\mu_{110}$	1.200	
$\delta_{111}$	-----	-----	0.5518	$\mu_{111}$	1.600	

辺確率密度関数  $p_{x_3}(x_1, x_2)$  に変換し、1つのメッシュがもつ確率をメッシュ面積で除した値でプロットしたものである。適合度の改善は、メッシュごとで検討し、改善されたメッシュの数およびその改善の割合から判断した。適合度がほとんど同じ場合は、採用したモーメントの次数が低い分布を選定することとした。このことは、以下の実測データに対する適用においても同様である。

母集団に対する  $3M(2, 2, 2, 2)$  の適合度は原点付近で劣るが、これは母集団の確率変数の定義域が  $(-\infty, \infty)$  であるのに対し、最大エントロピー分布では  $[0, \infty)$  であるためと思われる。しかし、全体的には両者はよく一致している。このことは3変数正規分布が平均と分散・共分散行列によって確定され、そのパラメーターは相乗を含めた2次モーメントまでで同定されることに起因している。さらに高次モーメントまで取り入れた適合度検定、すなわち  $3M(3, 3, 3, 2)$ ,  $3M(3, 3, 3, 3)$ ,  $3M(4, 4, 4, 3)$  では明確な適合度の改善は得られなかった。

以上より、3変数正規分布のような母集団に対しては相関係数に相当する2次の相乗モーメントを含む、すべての2次以下のモーメントを使った  $3M(2, 2, 2, 2)$  で十分よく再現できることがわかった。

(2) 実測データへの適用性

水文資料はしばしば小標本であるため、モーメントの

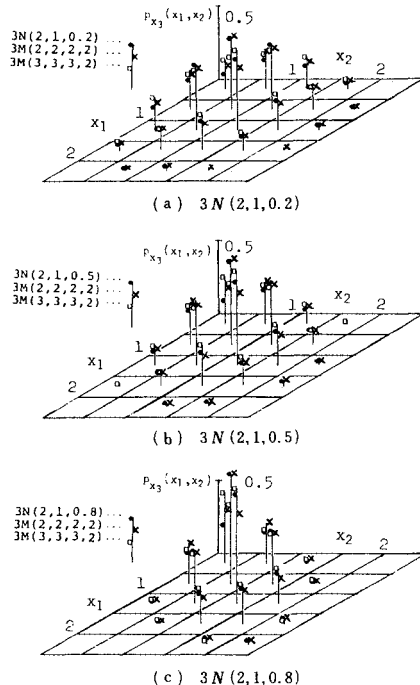


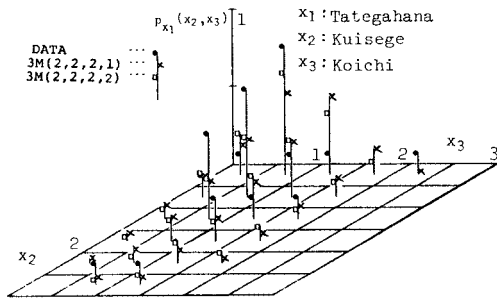
Fig. 1 Maximum entropy fit for three-variate normal distribution with normalized moments.

**Table 2** Normalized moments and Lagrangian multipliers of maximum entropy distribution to three-point discharge data with normalized moments.

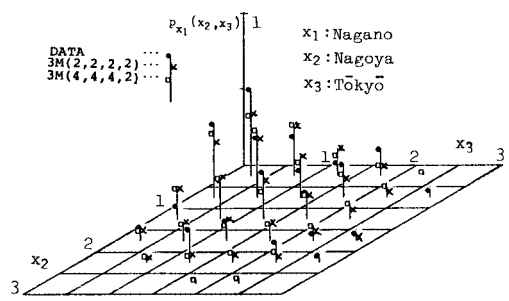
	$3M(2,2,2,1)$	$3M(2,2,2,2)$	$3M(3,3,3,2)$	normalized moment	
$1f_1$	-2.1499	-0.9424	-1.9526	$m_{100}$	1.000
$1f_2$	1.2043	14.1640	15.1870	$m_{200}$	1.308
$1f_3$	—	—	-0.2039	$m_{300}$	2.234
$2f_1$	0.5880	1.9152	3.1241	$m_{010}$	1.000
$2f_2$	0.1179	3.2944	2.4388	$m_{020}$	1.747
$2f_3$	—	—	0.1763	$m_{030}$	3.957
$3f_1$	-4.4673	-3.6575	-3.4942	$m_{001}$	1.000
$3f_2$	2.2809	6.2067	6.0960	$m_{002}$	1.198
$3f_3$	—	—	0.0427	$m_{003}$	1.682
$\delta_{000}$	2.8746	0.0773	0.0283	$m_{000}$	1.000
$\delta_{011}$	—	5.5192	5.5212	$m_{011}$	1.141
$\delta_{101}$	—	-14.1690	-14.2670	$m_{101}$	1.163
$\delta_{111}$	—	-13.1960	-13.3790	$m_{111}$	1.417

**Table 3** Normalized moments and Lagrangian multipliers of maximum entropy distribution to three-point August rainfall data with normalized moments.

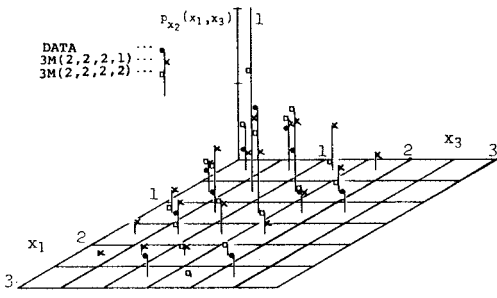
	$3M(2,2,2,1)$	$3M(2,2,2,2)$	$3M(3,3,3,2)$	$3M(4,4,4,2)$	normalized moment	
$1f_1$	-3.2701	-2.5037	-2.8257	-9.2945	$m_{100}$	1.000
$1f_2$	1.7161	1.9741	2.2756	11.4190	$m_{200}$	1.245
$1f_3$	—	—	-0.0827	-4.8645	$m_{300}$	1.809
$1f_4$	—	—	—	0.8140	$m_{400}$	2.951
$2f_1$	-1.0597	0.2484	0.1661	-2.4341	$m_{010}$	1.000
$2f_2$	0.7335	1.1129	1.1807	4.7111	$m_{020}$	1.404
$2f_3$	—	—	-0.0156	-1.7222	$m_{030}$	2.415
$2f_4$	—	—	—	0.2626	$m_{400}$	4.751
$3f_1$	-0.7712	0.0445	0.4741	-4.8139	$m_{001}$	1.000
$3f_2$	0.6153	0.8614	0.4805	9.4550	$m_{002}$	1.439
$3f_3$	—	—	-0.0902	-5.1928	$m_{003}$	2.508
$3f_4$	—	—	—	0.9857	$m_{004}$	4.898
$\delta_{000}$	2.4968	0.9045	0.9072	3.4416	$m_{000}$	1.000
$\delta_{011}$	—	-1.0593	-1.0675	-1.0462	$m_{011}$	1.176
$\delta_{101}$	—	-0.2607	-0.2628	-0.2544	$m_{101}$	1.066
$\delta_{111}$	—	-1.0226	-1.0094	-0.9831	$m_{111}$	1.103



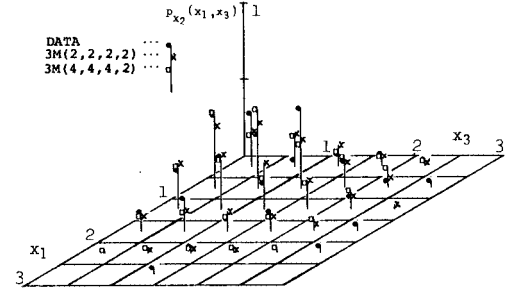
(a) Kuissege-Koichi



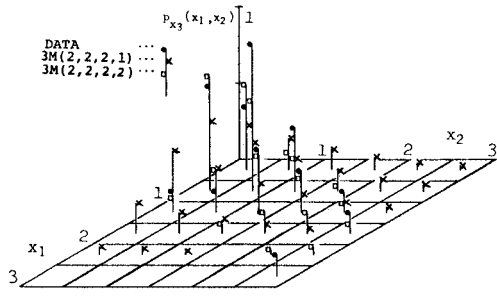
(a) Nagoya-Tokyo



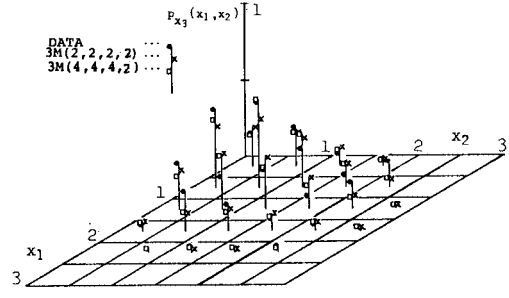
(b) Tategahana-Koichi



(b) Nagano-Tokyo



(c) Tategahana-Kuissege



(c) Nagano-Nagoya

**Fig. 2** Maximum entropy fit for three-point discharge data with normalized moments.

**Fig. 3** Maximum entropy fit for three-point August rainfall data with normalized moments.



推定値に誤差が含まれ、それは高次モーメントになるほど拡大されることが予想される。1変数最大エントロピー分布についてモーメントの推定誤差が分布に及ぼす影響を分析した結果、頻度図に対する適合度とのかねあいから4次モーメントまで採用することが妥当と考えられた<sup>4)</sup>。したがって、ここでは最大限4次モーメントまで採用することにした。

#### a) 3地点流量

石原・長尾<sup>12)</sup>は、2本の支川が合流して本川となり、各支川および本川に沿う地域が防災対象となる場合、すなわち合流河道における治水計画に2変数統計を適用している。これは、各支川の流量を2変数にとり、合流後の流量は各支川の流量の線形和で近似して2変数統計に持ち込んだものであるが、本来3変数統計問題である。われわれは、ここで合流後の流量も確率変数とみなした3変数最大エントロピー分布を求めた。

3地点流量データとして、立ヶ花(千曲川, 合流後の本川)29年間の年最大流量と、それに対応する枕瀬下(千曲川, 合流前の支川), 小市(犀川, 合流前の支川)の最大流量を用い、それぞれ確率変数  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  とした。Table 2は規準化されたモーメントと得られた最大エントロピー分布のラグランジュ乗数の値である。Fig. 2はFig. 1に対応してデータに対する最大エントロピー分布の適合度をみたものである。

枕瀬下一小市, 立ヶ花一小市間では、 $3M(2, 2, 2, 1)$ に相乗モーメントの導入やモーメントの次数の増加をはかっても適合度の改善は明確にならなかった。立ヶ花一枕瀬下間では、 $3M(2, 2, 2, 1)$ から $3M(2, 2, 2, 2)$ にすると適合度が改善されたが、さらに $3M(3, 3, 3, 2)$ にしても、その後の改善はみられなかった。

以上より、この例では $3M(2, 2, 2, 2)$ で一応満足される適合度が得られたと判断した。

#### b) 3地点8月降水

3地点8月降水として、長野, 名古屋, 東京の92年分を用い、それぞれ確率変数  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  とした。Table 3は規準化されたモーメントと得られた最大エントロピー分布のラグランジュ乗数の値であり、Fig. 3はFig. 2と同様、データと最大エントロピー分布の適合度をみたものである。

名古屋一東京間では $3M(2, 2, 2, 1)$ から $3M(2, 2, 2, 2)$ にすると適合度が改善されたが、 $3M(3, 3, 3, 2)$ ,  $3M(4, 4, 4, 2)$ にしてもその後の改善が明確にならなかった。長野一東京間では $3M(2, 2, 2, 1)$ から $3M(2, 2, 2, 2)$ ,  $3M(3, 3, 3, 2)$ にしても適合度の改善は明確にならなかったが、 $3M(4, 4, 4, 2)$ にするとやや改善がみられた。長野一名古屋間では $3M(2, 2, 2, 1)$ から $3M(2, 2, 2, 2)$ , および $3M(3, 3, 3, 2)$

から $3M(4, 4, 4, 2)$ にするとあまり明確ではないが適合度が改善された。

以上より、この例では $3M(2, 2, 2, 2)$ で一応満足される適合度が得られたと判断し、尖りの情報をもつ4次モーメントを導入すると、さらに適合度が改善される場合のあることがわかった。

ここで示した a), b) 2例のほかに、3地点年最大日降水, 1地点年最大日流量とそれに対応した2地点の日降水について3変数最大エントロピー分布を求めた。その結果、上述の例と同様に $3M(2, 2, 2, 2)$ で一応満足される適合度が得られたと判断できた。

さらに次元を増やした4変数以上の取扱いは、4重以上の積分を必要とするためパラメーター同定のための計算時間はかなり大きくなる(たとえば、東京大学大型計算機センターHITAC M-280 Hで1時間以上)ことが予想されるが、4重以上の数値積分も実行可能であり、必要に応じ次元を増やしていくことができる。

## 5. 結 論

本稿で得られた成果を要約すると、以下のようになる。

(1) 最大エントロピー分布が、制約条件の与え方により統計学でよく知られているいくつかの既存分布を導出できることから、この分布はピアソン系の分布等と同レベルであることを議論した。

(2) 多変数最大エントロピー分布の一般式を提示し、モーメントを制約条件とした場合のパラメーター同定法を示した。

(3) 適切な任意関数  $g_r(\cdot)$  を与えることにより、多変数最大エントロピー分布から、多変数一様分布と相関を含まない多変数指数分布を導出した。

(4) 実際の計算で高次モーメントが大きな値を取るのを防ぐため、任意次数のモーメントを1次モーメントで規準化し、取扱いを簡単にした。

(5) 3変数正規分布を母集団とした3変数最大エントロピー分布の適合度検定では、相関係数に相当する2次の相乗モーメントを含む、すべての2次以下のモーメントを使った $3M(2, 2, 2, 2)$ が全体的に高い適合度を有していることがわかった。

(6) 3地点流量, 3地点8月降水, 3地点年最大日降水, 1地点年最大日流量とそれに対応した2地点日降水へ3変数最大エントロピー分布を適用した結果、 $3M(2, 2, 2, 2)$ で一応満足される適合度が得られたと判断した。

(7) (5), (6)より、現在のところ実用上 $3M(2, 2, 2, 2)$ を用いて水工計画を行うことが望まれる。そのため、補遺に $3M(2, 2, 2, 2)$ のパラメーター推定手順を示す。

今後、さらに実測データへの適用例を増やし、多変数最大エントロピー分布の実用性を検討していきたいと考えている。

なお、計算にあたって、信州大学情報処理センター HITAC M-240 H, および東京大学大型計算機センター HITAC M-280 H を使用した。

補 遺

3M(2,2,2) は式 (65) より次式となる。

$$p(x_1, x_2, x_3) = \exp(-1 - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_1^2 - \gamma_3 x_2 - \gamma_2 x_2^2 - \gamma_3 x_3 - \gamma_2 x_3^2 - \delta_{000} - \delta_{011} x_2 x_3 - \delta_{101} x_1 x_3 - \delta_{110} x_1 x_2) \dots (66)$$

上式のパラメーターは以下の手順で推定される。

1) 近似値

$$1\gamma_1^0 = 1\gamma_2^0 = 2\gamma_1^0 = 2\gamma_2^0 = 3\gamma_1^0 = 3\gamma_2^0 = \delta_{000}^0 = \delta_{011}^0 = \delta_{101}^0 = \delta_{110}^0 = 0 \dots (67)$$

と仮定する。

2) 式 (44.1)~(44.n+1) は次のようになる。

$$A_{123}^1 \epsilon_1 + A_{123}^1 \epsilon_2 + A_{123}^{11} \epsilon_1 + A_{123}^{12} \epsilon_2 + A_{123}^{11} \epsilon_3 + A_{123}^{12} \epsilon_2 + A_{123}^{11} \epsilon_3 + A_{123}^{12} \epsilon_2 + A_{123}^{11} \epsilon_3 + A_{123}^{12} \epsilon_2 + A_{123}^{11} \epsilon_3 + A_{123}^{12} \epsilon_2 + A_{123}^{11} \epsilon_3 + A_{123}^{12} \epsilon_2 + A_{123}^{11} \epsilon_3 + A_{123}^{12} \epsilon_2 = B_1^1 \dots (68.1)$$

$$A_{123}^2 \epsilon_1 + A_{123}^2 \epsilon_2 + A_{123}^{21} \epsilon_1 + A_{123}^{22} \epsilon_2 + A_{123}^{21} \epsilon_3 + A_{123}^{22} \epsilon_2 + A_{123}^{21} \epsilon_3 + A_{123}^{22} \epsilon_2 + A_{123}^{21} \epsilon_3 + A_{123}^{22} \epsilon_2 + A_{123}^{21} \epsilon_3 + A_{123}^{22} \epsilon_2 + A_{123}^{21} \epsilon_3 + A_{123}^{22} \epsilon_2 + A_{123}^{21} \epsilon_3 + A_{123}^{22} \epsilon_2 = B_1^2 \dots (68.2)$$

$$A_{123}^{100} \epsilon_1 + A_{123}^{100} \epsilon_2 + A_{123}^{101} \epsilon_1 + A_{123}^{102} \epsilon_2 + A_{123}^{101} \epsilon_3 + A_{123}^{102} \epsilon_2 + A_{123}^{101} \epsilon_3 + A_{123}^{102} \epsilon_2 + A_{123}^{101} \epsilon_3 + A_{123}^{102} \epsilon_2 + A_{123}^{101} \epsilon_3 + A_{123}^{102} \epsilon_2 + A_{123}^{101} \epsilon_3 + A_{123}^{102} \epsilon_2 + A_{123}^{101} \epsilon_3 + A_{123}^{102} \epsilon_2 = B_1^{000} \dots (68.7)$$

$$A_{123}^{111} \epsilon_1 + A_{123}^{111} \epsilon_2 + A_{123}^{112} \epsilon_1 + A_{123}^{113} \epsilon_2 + A_{123}^{112} \epsilon_3 + A_{123}^{113} \epsilon_2 + A_{123}^{112} \epsilon_3 + A_{123}^{113} \epsilon_2 + A_{123}^{112} \epsilon_3 + A_{123}^{113} \epsilon_2 + A_{123}^{112} \epsilon_3 + A_{123}^{113} \epsilon_2 + A_{123}^{112} \epsilon_3 + A_{123}^{113} \epsilon_2 + A_{123}^{112} \epsilon_3 + A_{123}^{113} \epsilon_2 = B_1^{011} \dots (68.8)$$

$$A_{123}^{201} \epsilon_1 + A_{123}^{201} \epsilon_2 + A_{123}^{211} \epsilon_1 + A_{123}^{212} \epsilon_2 + A_{123}^{211} \epsilon_3 + A_{123}^{212} \epsilon_2 + A_{123}^{211} \epsilon_3 + A_{123}^{212} \epsilon_2 + A_{123}^{211} \epsilon_3 + A_{123}^{212} \epsilon_2 + A_{123}^{211} \epsilon_3 + A_{123}^{212} \epsilon_2 + A_{123}^{211} \epsilon_3 + A_{123}^{212} \epsilon_2 + A_{123}^{211} \epsilon_3 + A_{123}^{212} \epsilon_2 = B_1^{101} \dots (68.9)$$

$$A_{123}^{210} \epsilon_1 + A_{123}^{210} \epsilon_2 + A_{123}^{220} \epsilon_1 + A_{123}^{221} \epsilon_2 + A_{123}^{220} \epsilon_3 + A_{123}^{221} \epsilon_2 + A_{123}^{220} \epsilon_3 + A_{123}^{221} \epsilon_2 + A_{123}^{220} \epsilon_3 + A_{123}^{221} \epsilon_2 + A_{123}^{220} \epsilon_3 + A_{123}^{221} \epsilon_2 + A_{123}^{220} \epsilon_3 + A_{123}^{221} \epsilon_2 + A_{123}^{220} \epsilon_3 + A_{123}^{221} \epsilon_2 = B_1^{110} \dots (68.10)$$

式 (68.1)~(68.10) の連立方程式を  $1\epsilon_1, 1\epsilon_2, 2\epsilon_1, 2\epsilon_2, 3\epsilon_1, 3\epsilon_2, \epsilon_{000}, \epsilon_{011}, \epsilon_{101}, \epsilon_{110}$  に関して解く。

3) 得られた解を式 (38) に代入して

$$\left. \begin{aligned} 1\gamma_1 &= 1\gamma_1^0 + 1\epsilon_1, & 1\gamma_2 &= 1\gamma_2^0 + 1\epsilon_2, & 2\gamma_1 &= 2\gamma_1^0 + 2\epsilon_1, \\ 2\gamma_2 &= 2\gamma_2^0 + 2\epsilon_2, & 3\gamma_1 &= 3\gamma_1^0 + 3\epsilon_1, & 3\gamma_2 &= 3\gamma_2^0 + 3\epsilon_2, \\ \delta_{000} &= \delta_{000}^0 + \epsilon_{000}, & \delta_{011} &= \delta_{011}^0 + \epsilon_{011}, \end{aligned} \right\} \dots (69)$$

$\delta_{101} = \delta_{101}^0 + \epsilon_{101}, \delta_{110} = \delta_{110}^0 + \epsilon_{110}$  を計算し、これを次の近似値  $1\gamma_1^0, 1\gamma_2^0, 2\gamma_1^0, 2\gamma_2^0, 3\gamma_1^0, 3\gamma_2^0, \delta_{000}^0, \delta_{011}^0, \delta_{101}^0, \delta_{110}^0$  とする。

4)  $1\epsilon_1, 1\epsilon_2, 2\epsilon_1, 2\epsilon_2, 3\epsilon_1, 3\epsilon_2, \epsilon_{000}, \epsilon_{011}, \epsilon_{101}, \epsilon_{110}$  が十分小さくなるまで ( $10^{-8}$  程度), 2), 3) を繰り返す。

5)  $1\epsilon_1, 1\epsilon_2, 2\epsilon_1, 2\epsilon_2, 3\epsilon_1, 3\epsilon_2, \epsilon_{000}, \epsilon_{011}, \epsilon_{101}, \epsilon_{110}$  が微小となったとき,  $1\gamma_1^0, 1\gamma_2^0, 2\gamma_1^0, 2\gamma_2^0, 3\gamma_1^0, 3\gamma_2^0, \delta_{000}^0, \delta_{011}^0, \delta_{101}^0, \delta_{110}^0$  を  $1\gamma_1, 1\gamma_2, 2\gamma_1, 2\gamma_2, 3\gamma_1, 3\gamma_2, \delta_{000}, \delta_{011}, \delta_{101}, \delta_{110}$  とみなし, 式 (66) から 3 変数最大エントロピー分布を得る。

参 考 文 献

- 1) たとえば, 竹内 啓: 数理統計学, 東洋経済, pp.47~48, 1963年.
- 2) Krishnamoorthy, A. S. and Parthasarathy, M. : A multivariate gamma-type distribution, Annual of Mathematical Statistics, Vol. 22, pp.549~557, 1951.
- 3) Sonuga, J. O. : Principle of maximum entropy in hydrologic frequency analysis, Journal of Hydrology, Vol. 17, pp.177~191, 1972.
- 4) 寒川典昭・荒木正夫: 水文事象の頻度分析への MEP 導入について, 土木学会論文報告集, No. 335, pp.89~95, 1983年7月.
- 5) 寒川典昭・荒木正夫・小林紀之: 種々の水流量への1変数 MEP 分布の適用性, 信州大学工学部紀要, No. 58, pp.27~40, 1985年9月.
- 6) Wragg, A. and Dowson, D. C. : Fitting continuous probability density functions over  $[0, \infty)$  using information theory ideas, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-16, pp.226~230, Mar., 1970.
- 7) 寒川典昭・荒木正夫・寺島 彰: 2変数 MEP 分布とその特性に関する研究, 水理講演会論文集, No. 28, pp.397~402, 1984年2月.
- 8) たとえば, 甘利俊一: 情報理論, ダイアモンド社, pp.141~142, 1970年.
- 9) たとえば, 高棹琢馬・池淵周一: エントロピー的にみた降雨・流出変換特性とそのモデル化, 京都大学防災研究所年報, No. 23, B-2, pp.193~209, 1980年4月.
- 10) Jowitt, P. W. : The extreme-value type-1 distribution and the principle of maximum entropy, Journal of Hydrology, Vol. 42, pp.23~38, Jan., 1979.
- 11) Elderton, W. P. and Johnson, N. L. : Systems of frequency curves, Cambridge University Press, p.45, 1969.
- 12) 石原安雄・長尾正志: 計画高水流量の二変数確率論的研究, 京都大学防災研究所年報, No. 6, pp.181~188, 1963年7月.

(1985.12.13・受付)