

開水路流の準三次元計算法に関する基礎的研究

EFFICIENT NUMERICAL ANALYSIS OF AN OPEN CHANNEL FLOW
WITH SECONDARY CIRCULATIONS

石川忠晴*・鈴木研司**・田中昌宏***

By Tadaharu ISHIKAWA, Kenji SUZUKI and Masahiro TANAKA

A two-dimensional computation method for open channel flows is developed reflecting the effects of secondary flow. Among the assumptions in the analysis, the vertical velocity profiles of the main flow and the secondary flow are assumed to remain similar, and the general distorted velocity profile is expressed by the composition of them. This method has been verified using available data. The scheme of computation is very simple so that computation by personal computer is feasible.

Keywords: open channel, secondary flow, numerical analysis, curved channel

1. はじめに

河川流路は一般に湾曲したり、断面形が変化したり、不規則な形状を呈する。このため流水の集中・発散が生じ、堤防の欠壊、側岸侵食などの原因となる。したがって、複雑な形状をもつ河道における流れの予測は、河川工学上重要な課題である。しかし、実際には経験や水理模型実験に頼っているのが現状であり、きめ細かな解析手法の発展が望まれている。

複雑な形状の河道における平面的な流況を探るため、平面二次元流解析法が適用されてきた^{1)~3)}。この解析法は、洪水流がその水面幅に比べ水深の小さい薄い流れであることを利用し、水深方向に積分した諸量で運動を記述するものである。しかしこの方法では、曲がった流れで必ず発生する二次流による運動量輸送効果を取り込むことができない。

森・岸⁴⁾は、単湾曲を通過する流れについて、二次流による運動量輸送関数(X)を導入した二次元解析法を提案した。これにより、湾曲部の主流速の横断分布が自

由渦型から強制渦型に移行する機構を説明でき、二次流と主流の相互干渉効果の重要性が指摘された。しかし、運動量輸送関数自体が未知関数であるため、一般的に適用できる計算手法にはなっていない。

一方、最近は三次元数値計算法が盛んに研究されている。池谷⁵⁾は、縦断方向には周期的だがその中では任意境界形状をもつ河道内の三次元流れに対し、座標変換を用いた解析を試みている。

森・岸^{6),7)}は、側壁付近と側壁から離れた領域に分けることにより、比較的簡略な三次元流の計算法を開発した。この方法は実験結果とも比較的よく一致し、かなり信頼性の高い計算法である。

しかし、三次元計算は計算時間・労力が大きく、大型計算機に頼らざるを得ないのが実情である。計算法をできるだけ精緻化する努力は重要である。しかし、著者らは実用性という立場から、次のような考えを抱いている。

河川流計算をするには河床形状を知る必要があるが、それは経年的に変化するし、もともと洪水時の河床は定かでない場合が多い。また河床の粗度係数、複断面高水敷の粗度分布など計算に必要な条件が不確実なことも多い。すなわち、計算法自体が高精度でも、入力条件が不確実であるから、計算結果の精度には限界がある。それならば、適当な精度のもとで、小型計算機などで簡便に

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科
(〒152 目黒区大岡山2-12-1)

** 正会員 工修 建設省

*** 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

計算できる計算法があれば当面はそれでもよいのではないか。

以上のような考えのもとに、本研究では二次流による運動量輸送機構を組み込んだ平面二次元的解析法の改良を行った。本手法は、最終的な計算式は平面二次元的ではあるが、二次流の運動機構を取り込んで三次元流況をある程度表現する解が得られることから、本論文では“準三次元計算法”とよぶ。

2. 通常の平面流計算法の問題点

単純な平面流計算では湾曲流の平面流況をうまく説明できないという計算例が、森・岸によって示されている。本章では、一様湾曲における浅水方程式の解析解を導き、森・岸の主張が一般的に成立することを示す。

矩形断面一様水路の等流について、円筒座標系 (r, θ, z) での浅水方程式は以下のように記述される。ただし、側方せん断力項は省略している。また Chézy 型の抵抗則を用いている。

$$\theta) 0 = g i_0 - f' \frac{U^2}{h} \dots\dots\dots (1)$$

$$r) \frac{U^2}{r} = g \frac{\partial H}{\partial r} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 g ：重力加速度、 h ：水深、 H ：水位、 r ：曲率半径、 U ： θ 方向の平均流速、 f' ：摩擦損失係数である。底面勾配 i_0 は r の関数で、

$$i_0(r) = \frac{k}{r} \dots\dots\dots (3)$$

とおける。 k は定数である。

式 (1)、(2) の微分方程式には次のような解析解が存在する。

$$U = \left[\frac{gh_1}{f'} \frac{k}{r} \exp \left\{ -\frac{k}{f'} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \right\} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (4)$$

$$h = h_1 \cdot \exp \left\{ -\frac{k}{f'} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $r = r_1$ (内岸) で $h = h_1$ とする。

式 (4) を r で微分し、その符号を判別すると、 $k/r < f'$ では自由渦型、 $k/r > f'$ では強制渦型となる。 f' を摩擦速度 u_* を用いて、

$$f' = 2 \left(\frac{u_*}{U} \right)^2 \dots\dots\dots (6)$$

と表わせば、結局、フルード数 Fr が $\sqrt{2}$ より小さいとき、自由渦型分布を示すということになる。しかし実際には流れが常流であっても強制渦型の流速分布になることが知られている。この矛盾の原因は、二次流により運動量輸送機構を考慮していないことによる。結局、二次流成分による水平応力項を明確に取り込んだ解析でなければ、平面流況を正しく求められないおそれが高いといえる。

3. 準三次元洪水流計算法

(1) 基本方針

前章までに述べたように、二次流による横断方向への運動量輸送効果を平面流計算に組み込むことが必要である。また、森・岸⁴⁾の結果からわかるように、この因子のみを加えるだけで平面流計算法をかなり改良できると予想される。そこで、本研究では次の基本方針を立てた。

- ① 二次流による横断方向の運動量輸送項 (後の解析の $\partial(u_0 v_0) / \partial n$) を計算式に組み込む。
- ② 計算式の他の部分はできるだけ単純にし、マイコンなどでも実行可能な計算手法とする。

以上の方針のために、次章で述べる数式展開はやや意図的であったり、また、数学的に多少厳密さを欠いたりする。要するに、「二次流の運動量輸送効果のみを組み込めれば、その他はかなり近似的な取り扱いでもよからう」というのが著者らの考えであり、本論文の主張点の1つでもある。

以上の方針に従って簡略な計算法を組み立てるために、河川の流れ場を次のようにとらえる。

河川流の流向は図-1(a) に示すように鉛直方向に変化している。各高さの流速ベクトルを鉛直方向に積分して得られるベクトルを“線流量ベクトル”とよぶ。また、線流量ベクトルを連ねた曲線を“鉛直平均流線”とよぶ。各高さの流速ベクトルを図-1(b) に示すように、線流量ベクトルの方向の成分と、それと直交する成分とに分解する。前者を主流、後者を二次流とよぶ。

さて、河川流は川幅に比べて水深がかなり小さいため、三次元流とはいっても全く自由に三次元的に流れるわけではなく、側壁付近を除けば、次のような性質をもっていることが多いと考えられる。すなわち、二次流は図-1(b) に示すような一層の交差流である場合が多い。主流の鉛直分布はおおむね底面のシアーに支配され、上記の一層交差流の輸送する運動量によって若干変形される。

以上のことを考慮して主流および二次流の鉛直分布を想定して方程式を鉛直積分することにより、二次流の運動量輸送を考慮した平面二次元的解析法が導かれる。こ

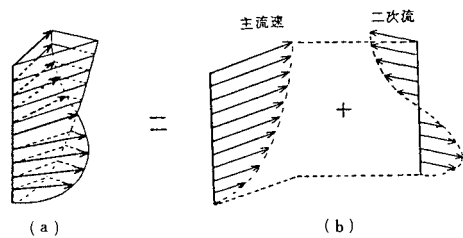


図-1 流速の分解

れを本論文では準三次元計算法とよぶことにする。

純三次元計算法と準三次元計算法の特徴は次のように対比できる。純三次元計算法は原理的にはいかなる三次元流も表現可能であるが、反面、無限の自由度の中から解を選択しなければならないのでそれだけ労力を要する。準三次元計算では、計算式の導出の仮定であらかじめ解の形の範囲を限定し、それからはずれた三次元流を求めることはできないが、限定された自由度の中から解を選択するので容易に速く正解を探ることが可能となる。

(2) 平面二次元方程式の導出

a) 基礎方程式

流れを前節で定義した主流(u)と二次流(v)に分解して取り扱う。その際、座標系の設定が問題となる。すなわち、すべての線流量ベクトルが1つの座標方向に一致するように直交座標系を設定することは数学的に不可能である(両側岸形状と上下端での線流量ベクトルを指定すると計算領域内部の直交座標系は唯一に定まってしまう。しかし、内部の線流量ベクトルがこれに沿っているという保証はない)。また、曲線座標系で厳密に運動方程式を記述するにはその座標系の形が陽に指定されていなければならないが、線流量ベクトルの方向自体が未知量である。

そこで、数学的厳密性を多少犠牲にして、次のように簡略な座標系で運動方程式を記述する。すなわち、各位置での等流量線の平面形を半径 r の円弧で近似し、円弧中心 O を原点とする局所的な円筒座標系を用いる。水深が川幅に比べて十分小さく、また側岸付近以外では鉛直流速 w が無視できるとして静水圧分布を仮定すると次式を得る。

$$s) \quad u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{uv}{r} = g i_{os} - g \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} \dots\dots\dots (7)$$

$$n) \quad u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{u^2}{r} = g i_{on} - g \frac{\partial h}{\partial n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、s は線流量ベクトルに沿った距離、n はこれに直交する距離である。また、u(s, n, z), v(s, n, z) : おのおの s, n 方向の流速成分、h(s, n) : 水深、r(s, n) : 鉛直平均流線の曲率半径、g : 重力加速度、i_{os}, i_{on} : おのおの s, n 方向の底面勾配、τ_{sz}, τ_{nz} : おのおの s, n 方向の水平せん断力成分である。

本計算法では、円筒座標系を用いることによって基礎方程式がすでに誤差を含んでいる。数値計算手法に関する通常の研究では、基礎方程式は厳密にしておいて、後に仮定や近似を導入する。たとえば、浅水方程式を用いる計算法では、鉛直積分の過程において二次流の輸送

する運動量を無視できると仮定したりする。本論文では、二次流の輸送する運動量を考慮する以外はできるだけ簡略に流れを計算する手法の開発を目指している。そのような観点から上式の物理的意味を次のように説明することができる。浅水方程式の導出においてよく行われるように二次流を無視して(v=0)、式(7)を鉛直積分すると、流軸に沿った一次元開水路方程式となる。したがって、本計算は二次流 v の存在を考慮することによって一次元方程式の精度を高めるものであると解釈することができる。二次流強度を概略評価するために式(8)を用いると考えてよい(ただし、これは概念的な説明で、実際上の取り扱い後は述べるように少し複雑である)。

b) 主流および二次流の鉛直分布の設定

主流および二次流の鉛直分布を次のように設定する。

$$u = U(s, n) + u_0(s, n)\phi(\zeta) \dots\dots\dots (9)$$

$$v = v_0(s, n)\psi(\zeta) \dots\dots\dots (10)$$

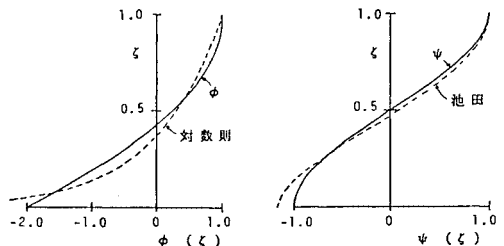
ここに、ζ は河床を原点とする鉛直無次元座標 z/h である。U は鉛直平均流速である。また、n 方向を線流量ベクトルに直交する方向にとっているため、n 方向の鉛直平均流速 V(s, n) は常にゼロとなるので省略してある。φ(ζ), ψ(ζ) は次式で表わされる関数である。

$$\phi(\zeta) = -3\zeta^2 + 6\zeta - 2 \dots\dots\dots (11)$$

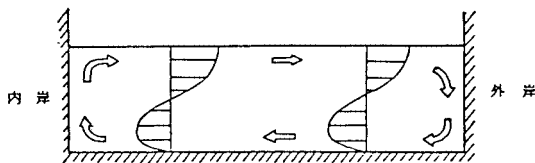
$$\psi(\zeta) = -4\zeta^3 + 6\zeta^2 - 1 \dots\dots\dots (12)$$

主流の鉛直分布は渦動粘性係数を一定値とおいて得られる速度分布形(放物線分布)である。u₀/u* = 5/2 とすると、直線流路の流速分布形に一致する。図-2(a)に示すように、この分布形は対数則分布とよく一致する⁹⁾。ただし、ここでは二次流による主流鉛直分布の一樣化をも表現できるように、u₀ と u* の関数はフリーにしている。

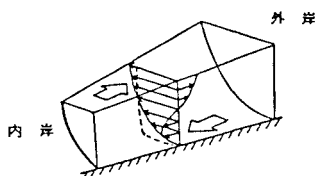
二次流の分布形は、幅広一様湾曲水路において式(9)と(11)の主流分布のもとで求められる二次流分布の近似解である。この分布形は、図-2(b)に示すように、池田⁹⁾が主流を対数則分布として求めた二次流分布の解析解をよく近似している。ただし、ここでは非一様流路の流れを表現できるように v₀ と u₀ の関係はフリーにしてある。



(a) 主流分布形 (b) 二次流分布形
図-2 流速分布形の近似関数



(a) 主流速の横断勾配の形成



(b) 主流速の鉛直分布の一樣化

図一三 二次流と主流の干渉機構

さて、二次流と主流の干渉機構は、石川・金¹⁰⁾の研究によって、かなり明らかにされた。単湾曲流路の二次流を例にとれば、その干渉機構は次のようである。二次流が発生すると、図一三(a)に示すように外岸付近で下降流が生じ、表層の速い流体が下層の遅い流体に置き換わるため、全体に加速される。逆に内岸側では減速する。この結果、平均流速の横断分布が形成される。すると、図一三(b)に示すように、表層では相対的に流速の小さい内岸側の流体が流入するため減速し、下層では相対的に流速の大きい外岸側の流体が流入するため加速し、全体として主流速の鉛直分布が一樣化する。二次流の原動力は主流速鉛直分布が非一樣であるために生じる遠心力の不均一であるから、鉛直分布が一樣化すれば二次流強度は減少することとなる。

したがって、平面二次元流計算でもこのような機構を表わせるモデルとする必要があるが、上記の u と v の分布形の設定は、この機構を表わし得る最も単純な関数形となっている。

c) 重み付き残差法の適用

式(9)、(10)を式(7)、(8)に代入し、重み関数を乗じて鉛直方向に積分する。式(7)については、主流分布の試験関数 1 と ϕ を重み関数とし、式(8)については二次流分布の試験関数 ψ と、圧力勾配の形1を重み関数として鉛直積分する。その結果次式を得る。ただし、移流慣性項のうち、 u_0 、 v_0 のみに関する項は保存形に修正している。これは離散化において生じる誤差を避けるためである。

$$\begin{aligned}
 & U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial(u_0^2)}{\partial s} \int_0^1 \phi^2 d\zeta + \frac{\partial(u_0 v_0)}{\partial n} \int_0^1 \phi \psi d\zeta \\
 & + \frac{2 u_0 v_0}{r} \int_0^1 \phi \psi d\zeta = g i_{0s} - g \frac{\partial h}{\partial s} + \int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} d\zeta \dots\dots\dots(13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_0}{\partial s} \frac{\partial U}{\partial s} \int_0^1 \phi^2 d\zeta + U \frac{\partial u_0}{\partial s} \int_0^1 \phi^2 d\zeta + v_0 \frac{\partial U}{\partial n} \int_0^1 \phi \psi d\zeta \\
 & + \frac{\partial(u_0 u_0)}{\partial n} \int_0^1 \phi^2 \psi d\zeta + \frac{2 u_0 v_0}{r} \int_0^1 \phi^2 \psi d\zeta \\
 & + \frac{U v_0}{r} \int_0^1 \phi \psi d\zeta = \int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} \phi d\zeta \dots\dots\dots(14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(u_0 v_0)}{\partial s} \int_0^1 \phi \psi d\zeta + \frac{\partial(v_0^2)}{\partial n} \int_0^1 \psi^2 d\zeta + \frac{v_0^2}{r} \int_0^1 \psi^2 d\zeta \\
 & - \frac{U^2}{r} - \frac{u_0^2}{r} \int_0^1 \phi^2 d\zeta = g i_{0n} - g \frac{\partial h}{\partial n} + \int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial n} d\zeta \dots\dots\dots(15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & U \frac{\partial v_0}{\partial s} \int_0^1 \psi^2 d\zeta + \frac{\partial(u_0 v_0)}{\partial n} \int_0^1 \phi \psi^2 d\zeta \\
 & + \frac{\partial(v_0^2)}{\partial n} \int_0^1 \psi^3 d\zeta + \frac{v_0^2}{r} \int_0^1 \psi^3 d\zeta - \frac{2 U u_0}{r} \int_0^1 \phi \psi d\zeta \\
 & - \frac{u_0^2}{r} \int_0^1 \phi^2 \psi d\zeta = \int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial n} \psi d\zeta \dots\dots\dots(16)
 \end{aligned}$$

式(13)は流軸方向の運動量式であり、二重下線の項のみを取れば一次元の漸変流方程式である。本論文で注目している二次流の運動量輸送項には波下線を施している。この項を評価するために u_0 と v_0 の s 軸方向の変化を計算する必要があるが生じるが、それらは式(14)と式(16)の第1項であり、ともに u_0 と v_0 の一次のオーダーである。式(15)は横断方向の力のつり合い式であり、二重下線の項のみを取れば横断水面形を近似的に求める式となる。

各方程式において主要項に比べて u_0 と v_0 の高次の項を省略する。ただし、式(13)の波下線の項(二次流による運動量輸送項)は省略しない。これは次のような理由による。前章で述べたように、二次流と主流の干渉機構により、主流の鉛直平均流速 U 自体が加速・減速効果を受けるため、理論上その効果を取り込むためには、左辺第1項に対して第3項(波下線の項)を残しておく必要がある。さらに、左辺第2項は第1項に対し二次の微小量であり、第4項は他の慣性項に比べ、川幅に対し曲率半径が大きい場合には一桁小さいオーダーとなる。また、次節で述べるように τ_{sz} を U^2 のオーダーとすると、 τ_{nz} は $U v_0$ のオーダーとなるので、式(15)では省略されるが式(16)では省略しない。その結果次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & U \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial(u_0 v_0)}{\partial n} \int_0^1 \phi \psi d\zeta = g i_{0s} - g \frac{\partial h}{\partial s} \\
 & + \int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} d\zeta \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & U \frac{\partial u_0}{\partial s} \int_0^1 \phi^2 d\zeta + u_0 \frac{\partial U}{\partial s} \int_0^1 \phi^2 d\zeta + v_0 \frac{\partial U}{\partial n} \int_0^1 \phi \psi d\zeta \\
 & + \frac{U v_0}{r} = \int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial n} \phi d\zeta \dots\dots\dots(18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{U^2}{r} = g i_{0n} - g \frac{\partial h}{\partial n} \dots\dots\dots(19)
 \end{aligned}$$

$$U \frac{\partial v_0}{\partial s} \int_0^1 \psi^2 d\zeta - \frac{2Uu_0}{r} \int_0^1 \phi \psi d\zeta = \int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z} \phi d\zeta \dots\dots\dots(20)$$

d) せん断力について

本解析では主流が二次流に比較して十分大きいとして、底面せん断力を次式で表わすことにする。

$$\frac{\tau_{os}}{\rho} = \gamma U^2 \dots\dots\dots(21)$$

また、流体内部については、次式で表現できるものとする。

$$\frac{\tau_{sz}}{\rho} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z} \dots\dots\dots(22)$$

$$\frac{\tau_{nz}}{\rho} = \varepsilon \frac{\partial v}{\partial z} \dots\dots\dots(23)$$

ここに ε は鉛直渦粘性係数であり、次のようにおく。

$$\varepsilon = \gamma_2 U h \dots\dots\dots(24)$$

ただし、

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{\gamma_1}}{15} \dots\dots\dots(25)$$

である。

以上より、式 (17)~(20) のせん断力に関する項は次のように変形できる。

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} d\zeta = \frac{1}{h} \left[\frac{\tau_{sz}}{\rho} \right]_0^1 = -\gamma_1 \frac{U^2}{h} \dots\dots\dots(26)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{sz}}{\partial z} \phi d\zeta &= \frac{1}{h} \left[\frac{\tau_{sz}}{\rho} \phi \right]_0^1 - \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{\tau_{sz}}{\rho} \dot{\phi} d\zeta \\ &= -\gamma_1 \frac{U^2}{h} \phi(0) - \gamma_2 \frac{Uu_0}{h} [\dot{\phi}^2]_0^1 \\ &= \frac{2}{h} (\gamma_1 U^2 - 6 \gamma_2 Uu_0) \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{nz}}{\partial z} \phi d\zeta = \gamma_2 \frac{Uv_0}{h} [\psi \dot{\phi}]_0^1 = -4.8 \gamma_2 \frac{Uv_0}{h} \dots\dots\dots(28)$$

式 (11), (12) の $\phi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ を用い、 ζ に関する積分値を代入すると、式 (17)~(20) は以下ようになる。

$$U \frac{\partial U}{\partial s} + 0.6 \frac{\partial(u_0 v_0)}{\partial n} = g i_0 - g \frac{\partial h}{\partial s} - \gamma_1 \frac{U^2}{h} \dots\dots\dots(29)$$

$$\begin{aligned} 0.8 u_0 \frac{\partial U}{\partial s} + 0.8 U \frac{\partial u_0}{\partial s} + 0.6 v_0 \frac{\partial U}{\partial n} + 0.6 \frac{Uv_0}{r} \\ = \frac{2}{h} (\gamma_1 U^2 - 6 \gamma_2 Uu_0) \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

$$-\frac{U^2}{r} = g i_0 - g \frac{\partial h}{\partial n} \dots\dots\dots(31)$$

$$\frac{17}{35} U \frac{\partial v_0}{\partial s} - 1.2 \frac{Uu_0}{r} = -4.8 \gamma_2 \frac{Uv_0}{h} \dots\dots\dots(32)$$

(3) 一次元流管方程式の導出

a) 変数の配置と水路横断方向の離散化

鉛直平均流線から“鉛直平均流管”を定義することができる。流れ場を、等しい流量を運ぶ N 本の鉛直平均流管に分割し、変数 U, h, u_0, v_0 を図-4 のように配置する。ただし水路横断測線は (たとえば横断測量成果の

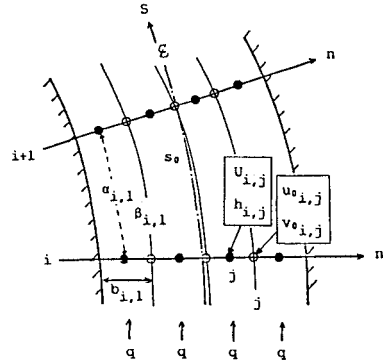


図-4 変数の配置

ある測線として) あらかじめ設定するが、鉛直平均流線は未知である。したがって、離散変数の設定位置は未知である。これについては後述する。

前節までの解析では s 軸と n 軸が直交するものとして話を進めてきたが、上述の設定から明らかなように、以下に述べる実際の解析では完全には直交していない。しかし、現実問題として、横断測量成果のある断面を用いざるを得ないこと、および河川のキロ断面は通常は主流になるべく直交するよう配慮して配置されていることから、数学的には厳密性を欠くが、ここでは上述の取り扱いをする。

j 番目の鉛直平均流管の幅を $b_{i,j}$ とし、 n 方向の微係数を離散化すると次式を得る。ただし、添字 i は省略する。

式 (29)…流管 j について

$$\begin{aligned} a_j U_j \frac{dU_j}{ds_0} + \frac{0.6}{b_j} \left\{ (u_0 v_0) \frac{\beta_j}{a_j} - (u_0 v_0)_{j-1} \frac{\beta_{j-1}}{a_j} \right\} \\ = g i_{0sj} - g a_j \frac{dh_j}{ds_0} + \gamma_1 \frac{U_j^2}{h_j} \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

式 (30)…流線 j について

$$\begin{aligned} 0.8 \beta_j \frac{U_j + U_{j+1}}{2} \frac{du_{0j}}{ds_0} + 0.8 \beta_j u_{0j} \frac{1}{2} \left(\frac{dU_j}{ds_0} + \frac{dU_{j+1}}{ds_0} \right) \\ + 0.6 \frac{v_{0j}}{r_j} \frac{U_j + U_{j+1}}{2} - 1.2 v_{0j} \frac{U_j - U_{j+1}}{b_j + b_{j+1}} \\ = \frac{4}{h_j + h_{j+1}} \left\{ \gamma_1 \left(\frac{U_j + U_{j+1}}{2} \right)^2 - 6 \gamma_2 \frac{U_j + U_{j+1}}{2} u_{0j} \right\} \\ \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

式 (31)…流線 j について

$$\begin{aligned} \left(\frac{b_j + b_{j+1}}{2g} \frac{U_j + U_{j+1}}{2} \frac{1}{r_j} + \frac{h_j - h_{j+1}}{U_j + U_{j+1}} \right) \frac{dU_j}{ds_0} \\ + \left(\frac{b_j + b_{j+1}}{2g} \frac{U_j + U_{j+1}}{2} \frac{1}{r_j} + \frac{h_j - h_{j+1}}{U_j + U_{j+1}} \right) \frac{dU_{j+1}}{ds_0} \\ + \frac{2 h_j}{h_j + h_{j+1}} \frac{dh_j}{ds_0} - \frac{2 h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \frac{dh_{j+1}}{ds_0} \end{aligned}$$

$$= -\frac{b_j + b_{j+1}}{2} \frac{di_{0j}}{ds_0} - \frac{b_j + b_{j+1}}{2g} \left(\frac{U_j + U_{j+1}}{2} \right)^2 \cdot \frac{d}{ds_0} \left(\frac{1}{r_j} \right) \dots\dots\dots (35)$$

式 (32) … 流線 j について

$$\frac{17}{35} \beta_j \frac{U_j + U_{j+1}}{2} \frac{dv_{0j}}{ds_0} - \frac{1.2}{r_j} \frac{U_j + U_{j+1}}{2} u_0 = -4.8 \gamma_2 \frac{U_j + U_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} v_{0j} \dots\dots\dots (36)$$

ただし、式 (35) については、式 (31) を s に関して一階微分してある。また、流下方向距離として水路中心軸線に沿った距離 ds_0 を用い、各流管または流線に沿った距離 ds_{ij} を ds_0 に変換するために次の補正係数 α_{ij} 、 β_{ij} を乗じている。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{ds_0}{ds_{ij}} \quad (\text{各流管中心軸に沿って}) \\ \beta_{ij} &= \frac{ds_0}{ds_{ij}} \quad (\text{各流線に沿って}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

b) 連続方程式

各流管で流量は保存される。したがって、連続方程式は次式となる。

$$\frac{dq}{ds_0} = \frac{d}{ds_0} (U_j h_j b_j) = U_j h_j \frac{db_j}{ds_0} + U_j b_j \frac{dh_j}{ds_0} + b_j h_j \frac{dU_j}{ds_0} = 0 \dots\dots\dots (38)$$

また、全流量も保存されるから、流管の数を N 本とすれば上式を用い、川幅 $B(s)$ として、次式が得られる。

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{b_j}{U_j} \frac{dU_j}{ds_0} + \frac{b_j}{h_j} \frac{dh_j}{ds_0} \right) = -\frac{dB}{ds_0} \dots\dots\dots (39)$$

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dU_1}{ds_0} + B_1 \frac{dh_1}{ds_0} &= C_1 \\ D_1 \frac{dU_1}{ds_0} + E_1 \frac{du_{01}}{ds_0} + F_1 \frac{dU_2}{ds_0} &= G_1 \\ P_1 \frac{dU_1}{ds_0} + Q_1 \frac{dh_1}{ds_0} + R_1 \frac{dU_2}{ds_0} + S_1 \frac{dh_2}{ds_0} &= T_1 \\ X_1 \frac{dv_{01}}{ds_0} &= Y_1 \\ \vdots & \\ A_{N-1} \frac{dU_{N-1}}{ds_0} + B_{N-1} \frac{dh_{N-1}}{ds_0} &= C_{N-1} \\ D_{N-1} \frac{dU_{N-1}}{ds_0} + E_{N-1} \frac{du_{0N-1}}{ds_0} + F_{N-1} \frac{dU_N}{ds_0} &= G_{N-1} \\ P_{N-1} \frac{dU_{N-1}}{ds_0} + Q_{N-1} \frac{dh_{N-1}}{ds_0} + R_{N-1} \frac{dU_N}{ds_0} + S_{N-1} \frac{dh_N}{ds_0} &= T_{N-1} \\ + X_{N-1} \frac{dv_{0N-1}}{ds_0} &= Y_{N-1} \\ A_N \frac{dU_N}{ds_0} + B_N \frac{dh_N}{ds_0} &= C_N \end{aligned}$$

(4) 一次元流管方程式の解法

a) 境界条件の取り扱い

① 側壁での境界条件

本解析では側壁でのスリップを許している。また各流管ごとの流量保存式をすでに用いているので法線流速に関する条件も鉛直平均的には満足されている。したがって残された条件は、“側岸から運動量が流失しない”という条件である。これは、側壁沿いの流管について式(33)第2項の $(u_0 \cdot v_0)$ を側壁側で0に置くことで満足される。

② 上・下流端境界条件

上流端では線流量の分布、下流端では水位が与えられる。すなわち基本的には両端境界値問題である。しかしこれをそのまま解こうとすると全計算領域の未知数を同時に求める非線形連立常微分方程式系となり、解くのはなかなか大変である。そこで次のように工夫する。与えられる下流端水位から、通常的一次元計算により上流端水位を求めておく。この結果、境界条件はすべて上流端に集中し初期値問題となるので、上流端から数値積分することにより、容易に解が求まる。得られる下流端水位のずれ分が大きければ、再び上流端の水位を設定し、計算し直す。また、曲率半径 r_{ij} および α_{ij} 、 β_{ij} は1回前の流線位置から求めるので、この際、同時に r 、 α 、 β を求め直すという収束計算も行う。以上の方法で、小型計算機でも短時間で解を得ることができる。

b) 数値積分法

前節で得られた式 (33)~(36) および式 (39) は、以下のように表わされる。

$$K_1 \frac{dU_1}{ds_0} + L_1 \frac{dh_1}{ds_0} + K_2 \frac{dU_2}{ds_0} + \dots + K_N \frac{dU_N}{ds_0} + L_N \frac{dh_N}{ds_0} = M \quad (40)$$

A_j, B_j, \dots 等の大文字で書かれた係数は、 U_j, u_{0j}, v_{0j}, h_j 等の関数である。また(—)はゼロにつき省略している項、(…)は同型により省略している項である。微係数の配置が4行ごとに規則的であるので、下から順に機械的に未知数を消去することができ、結局次の形式となる。

$$\frac{dy}{ds} = f(s, y) \quad (41)$$

ここに、 y は未知数がつくるベクトルである。前述したように、本解析では上流端に境界条件を集めて初期値問題化している。そこで、4次のルンゲ・クッタ・ジルを用いて上流端断面から順次数値積分して解を得ている。

4. 計算例および検証

本章では、詳細な実験データの得られている単湾曲水路と蛇行水路について本解析法を適用し、その妥当性を調べる。

a) 平面流況

① 単湾曲水路

de Vriend¹¹⁾が実験したU字形水路の諸量を用い、流管の数を8本として計算した。図-5に水路平面形状を、表-1に水理条件を示す。

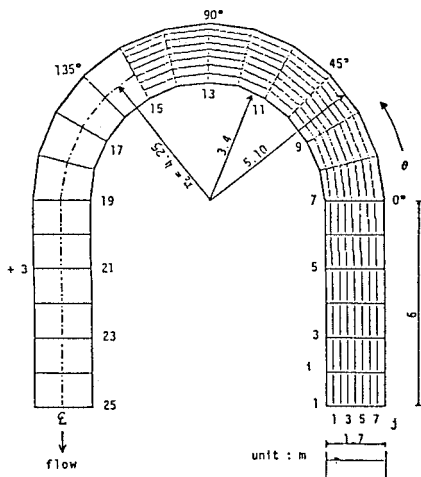


図-5 水路平面形状 (de Vriend¹¹⁾)

表-1 水理条件 (de Vriend¹¹⁾)

水路幅	•••	B	=	0.17 (m)
水路中心軸の曲率半径	•••	r	=	4.25 (m)
流量	•••	Q	=	0.19 (m³/s)
平均水深	•••	h	=	0.17 (m)
		B/r	=	0.4
		h/B	=	0.1

図-6に水深平均した主流速 U の横断分布の流下方向変化を示す。縦軸は断面平均流速で無次元化してある。de Vriendによる実測値を●で、本解析の計算値を○で示す。また、△は二次流の運動量輸送項を無視して得られる解(単純な平面流計算)である。なお実測値は側壁からの距離が常に一定の位置にあるが、本解析では求まる流管幅の中央に U が定義されるため、必ずしもその位置は定まってははいない。

この図より、湾曲入口での自由渦型分布、 $\theta=45^\circ$ の遷移領域での横断方向の微妙な変化、 $\theta=90^\circ$ 以降の強制渦型分布、いずれも計算値は実測値とよく一致している。 $\theta=45^\circ$ 付近の複雑な速度横断形は、二次流によって運ばれた運動量(外岸ではプラス、内岸ではマイナス)が側壁付近から中に向かってしだいに貯留されることによって生じるもので、本計算法が、この運動量輸送の機構を適切に取り込んでいることがわかる。また、単純な平面流計算では二次流を考慮していないために、終始自由渦型の速度分布しか生じないことがわかる。

② 蛇行水路

玉井ら¹²⁾が行った連続湾曲水路での実験結果と本解析結果を比較する。実験装置は10個の90°湾曲を連ねたものであるが、本解析では、図-7(a)に示す2個の湾

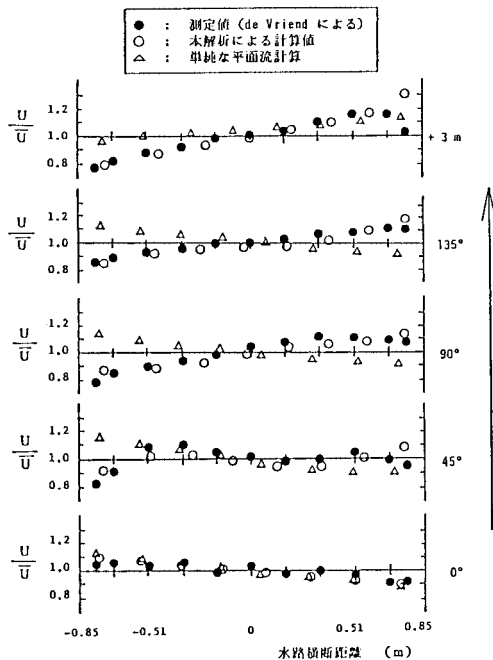
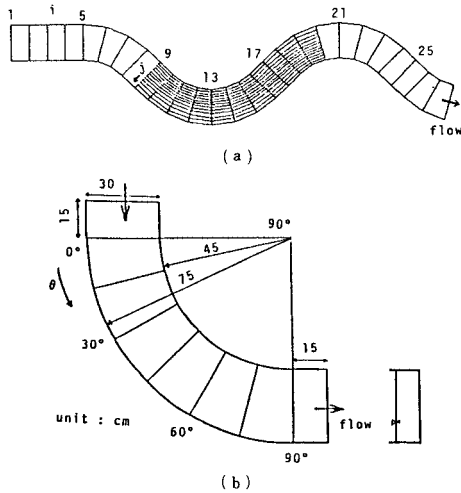


図-6 主流速の横断分布の流下方向変化

曲について図中の $i=25$ での値を $i=9$ に代入する周期境界条件を用い収束計算を行った。計算に用いた諸量を表一2に示す。流管の数を16本とし、玉井らと同じく単湾曲について同位相断面で値を平均して比較する(図一7(b))。

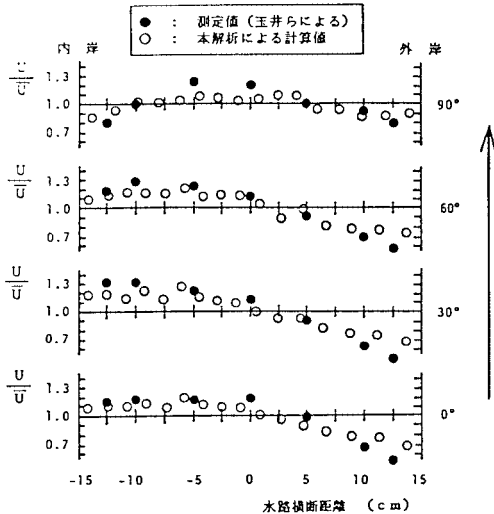
図一8に水深平均の主流速の横断分布の流下方向変化を示す。主流速の横断分布形の形成は水路の湾曲度に遅



図一7 水路平面形状 (玉井ら¹²⁾)

表一2 水理条件 (玉井ら¹²⁾)

水路幅	•••	$B = 30$ (cm)
水路中心軸の曲率半径	•••	$r = 60$ (cm)
湾曲間の直線流路延長	•••	$l = 30$ (cm)
流量	•••	$Q = 1.96$ (l/s)
平均水深	•••	$h = 2.93$ (cm)
		$B/r = 0.67$
		$h/B = 0.1$

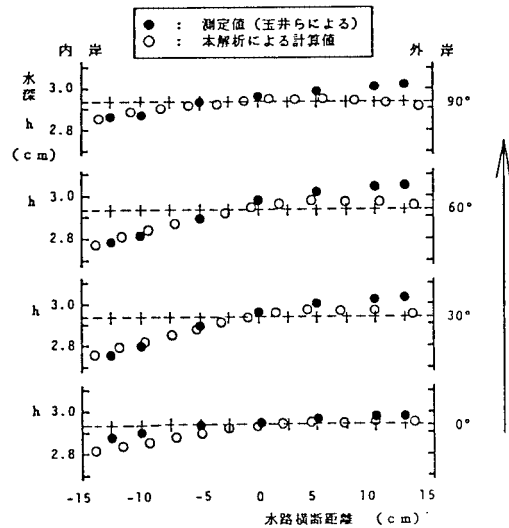


図一8 主流速の横断分布の流下方向変化

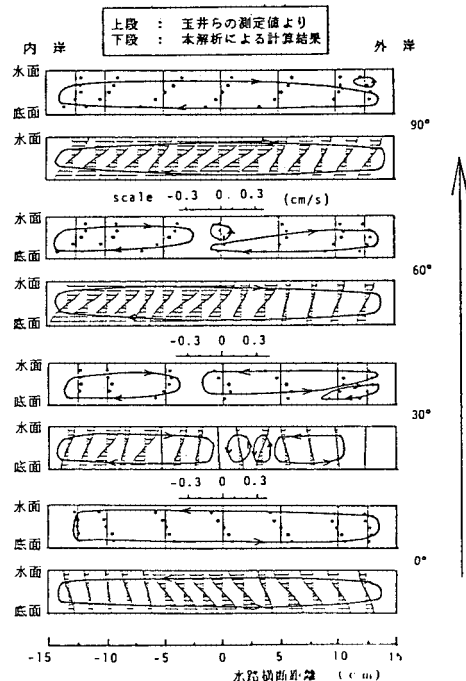
れて、両岸から中に進行する様子がわかる。これは先に述べた二次流の運動量輸送効果の現われである。実測値と計算値にややずれがあるが、その傾向を計算値はうまく説明している。

図一9に水深の横断分布の変化の比較を示す。主流速分布と同じく、外岸側にずれがみられるが傾向はほぼ等しいといえる。

b) 二次流の鉛直分布



図一9 水深の横断分布の流下方向変化



図一10 二次流の流下方向変化

本解析法は、平面流況を求める目的で開発されたものであるが、その過程で二次流強度も計算している。これについても実験結果と比較する。

図一10に横断面内の二次流の鉛直分布の流下方向変化を示す。玉井らの実測値は水路軸線を基準として成分分離している。そこで、横断流速の測定値を、鉛直平均流線を考慮して鉛直積分して0となるよう補正して比較する。図にはその値から想定される循環流のパターンも合わせて描いた。

図より、 $\theta=0^\circ$ で上層は内岸向き、下層は外岸向きの二次流が、 $\theta=90^\circ$ では逆向きの二次流が発達しており、その大きさも両者でよく一致している。遷移領域の湾曲中央付近では流れはかなり複雑であり、実測値では、水深方向に二層の循環流が現われている。本解析では二次流速の分布形の仮定(式(10))から、もともとその現象は表現できない。しかし、実測で二層になっている部分は計算でもその二次流が小さくなるという対応がみられる。二層の循環流の向きは互いに逆向きであるので、二次流による断面平均的運動量の輸送量はかなり小さいはずである。したがって本解析法では、二層のパターンは表わせなくとも、平面流況に及ぼす二次流の効果という点ではかなりよく表わしていると考えられる。

なお、玉井らの実験では、 $h/B=1/10$ であり、また B/r も $1/2$ 前後と、実際の河川に比較するとかなり深くかつ湾曲度のきつい流れである。このため二層の循環流の生じる領域が広がっていると思われる。実際の河川では本解析法でも表わし得る鉛直一層循環流の生じる領域の割合が大きいと考えられる。

5. 結 論

本解析法の特徴をまとめて結論とする。

(1) 本解析法は、基本的には通常の平面二次元計算に二次流による運動量輸送項を加えたものである。これにより、平面流況の解析精度が向上した。

(2) 解析の仮定において、二次流強度も求めている。したがって局所洗掘現象の把握などに応用される可能性がある。

(3) 連立一次方程式の初期値問題として解法を構成しているため、マイコンなどで短時間に計算することが

可能である。ちなみに、PC-9801を用いて図一6の結果を得るのに逐次近似の試行回数は3回で、各試行に要する時間は約2分であった。

(4) 計算精度を高めたい場合には、メッシュを切り直す必要はなく、流管本数を再指定するだけでよい。

(5) 以上のようにきわめて手軽に使える計算法であるため河床変動計算とのカップリング等、将来の応用性が高いと考えられる。

参 考 文 献

- 1) Gary Niemeyer: Efficient Simulation of Nonlinear Steady Flow, ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol.105, No. HY3, pp.185~195, 1979.
- 2) 須賀堯三・石川忠晴:有限要素法による河川分流計算プログラム, 土木研究所資料, No.1940, 1983.
- 3) 福岡捷二・角田 学・鈴木研司・半沢敏彦:変断面河道における洪水流の水理解析と等価粗度係数, 土木学会論文報告集, 第363号, pp.125~134, 1985.
- 4) 森 明臣・岸 力:河道湾曲部流れの数値計算, 第37回年次講演会概要集, pp.545~546, 1982.
- 5) 池谷 毅・玉井信行:断面形状の変化する河道内の三次元流れの一解析手法, 第40回年次講演会概要集, pp.497~498, 1985.
- 6) 森 明臣・岸 力:蛇行三次元流と河床変動の数値計算法, 沖積地河川における洪水流の制御と治水安全度の向上に関する研究, 研究成果中間報告, 文部省科学研究費, 自然災害特別研究(1)(研究代表者:岸 力), 1985, 10月号, pp.107~134, 1984.
- 7) 森 明臣・岸 力:昭和56年石狩川洪水で観測された湾曲部河床変動の特性, 第30回水理講演会論文集, pp.493~498, 1986.
- 8) 石川忠晴:河川の流砂に関する基礎的研究, 東京工業大学土木工学科研究報告, No.24, 1978.
- 9) 池田駿介:移動床河川の湾曲部における二次流と動的横断平衡河床について, 土木学会論文報告集, 第229号, pp.55~65, 1974.
- 10) 石川忠晴・金 舜範:湾曲部の二次流に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第375号, pp.143~149, 1986.
- 11) de Vriend, H.J.:Steady Flow in Shallow Channel Bends, Proefschrift, 1981.
- 12) 玉井信行・池内幸司・山崎 晶:連続わん曲水路における流れの実験的研究, 土木学会論文報告集, 第331号, pp.83~94, 1983.

(1986.5.9・受付)