

混合砂礫床一様湾曲流路の平衡横断形状と Sorting について

STABLE BED TOPOGRAPHY AND SORTING IN UNIFORMLY-CURVED CHANNELS WITH HETEROGENEOUS BED MATERIALS

池田駿介*・山坂昌成**・千代田将明***

By Syunsuke IKEDA, Masashige YAMASAKA and Masaaki CHIYODA

A mathematical model for defining the bed topography and the bed material size distribution in uniformly-curved bends is developed, in which the coarsening of sediment size toward the outside is predicted and the bed topography is calculated coupling with the lateral sorting. The major agency for sorting is that coarser grains feel a larger ratio of transverse gravitational force to fluid force than finer grains. It is revealed that the sorting reduces the depth of scour considerably in the outer area of bends. The model is tested with a laboratory test, and it is applied to an actual river, both of which support the present theory.

Keywords: river bend, sediment transport, lateral sorting, bed topography

1. 序 論

沖積地河川の河床は、一般に広い粒度分布をもつ混合砂礫から構成されているが、種々の移動床問題に関する研究の多くは、一様砂礫を仮定して行われてきた。これは、ある現象における砂礫の混合効果が無視できるというより、むしろ大局的な流砂機構を明らかにすることに主眼が置かれていたためであると考えられる。

本研究が対象としている河道湾曲部の横断河床形状については、粒度が一様な場合には流砂機構が明らかにされ、安定形状が理論的に求められている^{1),2)}。この流砂機構では、横断河床勾配による砂粒子に及ぼす重力効果と断面内二次流による砂粒子を内岸に輸送する効果の比は、粒径が大きくなるほど大きくなることが示され、外岸付近の河床の粗粒化と内岸側における細粒化が定性的に説明されている²⁾。これらの研究のほかに、河道湾曲部における粒度の横断分布を求めようとする試みがいくつかなされている。

Allen³⁾は動的平衡状態にある砂粒子に作用する力のつり合い式から、河床の横断形状を経験的に与えることにより、河道湾曲部の粒度の横断分布を求めている。しかし、湾曲部に流入する流砂の粒度分布を考慮していないため、条件によっては実際に存在しない粒径の砂礫が理論上河床に存在することになり、粒径ごとの流砂の連続性が満足されていない。極端な例では、一様粒径砂礫しか存在しない場合でも横断方向に粒度が変化することになる。また、仮定した河床の横断形状の与え方によって、粒度の横断分布はいかようにもなり得る。Bridge⁴⁾は砂粒子に作用する縦断方向の力のつり合い式をEngelund⁵⁾と同様に考え、これを用いて横断形状と粒度の横断分布を同時に求めているが、関係式中にふり分けの機構が含まれていないにもかかわらず、外岸側への粗粒化が発生するという結果が得られている。これは、縦断方向の力のつり合い式が移動限界状態のものに類似していることから生じる“河床せん断力が大きいほど(水深が大きいほど)粒径が粗くなる”という結果であり、横断的なふり分けの機構については説明されていない。また、Allen³⁾の解析と同様に、全体の粒度分布を独立変量として扱っていないため、これを任意に与えることができない。

Odgaard⁶⁾は湾曲流路における限界掃流力の考え方を

* 正会員 工博 埼玉大学助教授 工学部建設基礎工学科
(〒338 浦和市下大久保 255)

** 正会員 工博 埼玉大学助手 工学部建設基礎工学科
(同上)

*** 正会員 工修 東京電力(株)
(〒100 千代田区内幸町 1-1-3)

導入して、水深、粒度および鉛直平均の主流速について横断的な分布を求めているが、この解析においても全体の粒度は独立に与えられるものではなく、流路の曲率等の水理条件により、モデル式から決定される従属変量となっている。

河床全体の粒度分布を独立変量として扱った研究は、Parker & Andrews⁷⁾ によるものが最初であろう。彼らは、蛇行流路の河床形状と各地点における各粒度の存在確率密度を、摂動法を用いて線形一次解析を行うことにより、解析的に求めている。この研究は、蛇行部内岸に形成される固定砂州の上流斜面で粗粒化が進み、下流斜面で細粒化するという実現象を説明し得たが、線形一次解析のため、理論式において曲率半径を一定としたとき横断方向の粒度の変化を予測できない。

実河川湾曲部の河床形状、縦・横断流速分布、粒度分布、流砂量などに関する詳細な測定は、Jackson⁸⁾、Bridge & Jarvis⁹⁾、Dietrich & Smith¹⁰⁾ 等により近年行われており、ここで述べた理論的研究の多くはこれらの測定値を比較よく説明している。しかし、いずれのモデルも二次流による粒度のふるい分けの物理機構を十分な形で定式化しているとはいえない。本研究では、浮遊砂によるふるい分けを論じた Deigaard¹¹⁾ の研究とは対照的に、一樣湾曲流路における掃流砂運動による粒度のふるい分け機構を明らかにし、動的平衡状態における横断河床形状および粒度の横断分布を理論的に求め、実験結果および実河川データと比較検討する。

2. 一樣湾曲流路における混合砂のふるい分け機構

河床表層粒度の分布が時間的あるいは場所的に変化するふるい分け (sorting) の機構にはいくつかの種類が存在する。一般によく知られているのは、ダム直下流のように上流からの土砂供給が停止し、移動しやすい表面付近の細かい砂礫が運び出され、移動限界より大きな径の砂礫が表面に残る現象である。これにより、長時間経過後には、静的な平衡河床形状および静的な平衡表層粒度が形成される。このような表層粒度の粗粒化は、一般に armoring とよばれている。一方、動的平衡河床においても表層粒度の粗粒化が生じることがあり、平衡状態が静的となるふるい分け現象である armoring に対して、平衡状態が動的な粗粒化は pavement とよばれている¹²⁾。

pavement の形成機構は単純な場合を例として、以下のように説明される。十分に長い水路に混合砂を敷きつめ、一定流量を通過し、長時間経過後に河床勾配が変化しないように上流端で給砂すると、平衡状態においては運び出される流砂の量および粒度分布は、給砂の量およ

び粒度分布に一致しなければならない。このためには、河床上にある混合砂の各粒径ごとの移動しやすさが同一であれば表層粒度は給砂の粒度に等しくてよいが、各粒径ごとに移動しやすさが異なる場合、たとえば大粒径砂ほど移動しにくい場合には、給砂粒度に等しい流砂量を生じるよう、移動しにくい大粒径砂の表層における存在確率を大きくして、表層粒度を自己調整しなければならない。これは、通水初期に移動しやすい表層の細粒径砂が大粒径砂より大きい割合で流出してしまうことにより達成される。armoring と pavement の表層粒度組成の差は、armoring ではこれが生じる前の表層粒度を構成する砂礫の一部が欠落するのに対して、pavement では初期粒度を構成するすべての粒径の砂礫が存在するがその存在確率が初期のものとは異なることにある。pavement 内の粒度分布とその下層の粒度分布との関係は、Parker & Klingeman¹²⁾ により定式化されている。

以上2つのふるい分けは縦断方向の流砂の移動機構により説明されるが、湾曲流路や蛇行流路では、流砂量に加えて流砂の方向が各粒径ごとに異なることにより、表層粒度の場所的な変化が生じる。これは砂礫が横断方向に輸送されることにより生じるため本論文では、このようなふるい分けを横断的 sorting とよぶことにする。ただし、横断的 sorting は以上述べた armoring, pavement と全く別の概念ではなく、共存することもあり得る。たとえば、河床砂礫の粒度分布が十分広く、かつ掃流力が比較的小さな湾曲流路では、大きな砂礫は移動せず、小さな砂礫が断面内の二次流によって外岸域から内岸域に輸送されるため、外岸域では armoring による粗粒化が、内岸域では細砂の堆積による細粒化が生じる。このような現象は armoring を伴う横断的 sorting とよぶことができる。

次に本研究で対象とする一樣湾曲流路における横断的 sorting の機構と、動的平衡状態における横断河床形状と横断粒度分布の決定機構について考える。後に詳述するように、湾曲流路における一樣砂の横断方向流砂量 q_n と縦断方向流砂量 q_s の比は、

$$\frac{q_n}{q_s} = \tan \delta + \frac{1 + \alpha \mu}{\lambda \mu} \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}} \tan \theta \dots \dots \dots (1)$$

で与えられる。ここに、 δ は底面流向の偏倚角、 α は砂粒子に作用する揚力-抗力比、 μ は掃流砂の動摩擦係数、 λ は遮蔽係数、 τ_* は無次元掃流力 $[\rho u_*^2 / (\sigma - \rho) g D]$ 、 τ_{*c} は水平床上的無次元限界掃流力、 θ は河床の横断勾配角である。式 (1) を用い、図-1 に示すように、粒径 D_u の一樣砂で構成され、かつ平衡状態にある河床上に粒径の異なる2種類の砂を置いたとき、これらがどのように移動するかを考えてみる。

まず、一樣砂の場合の動的平衡形状を求める。動的平

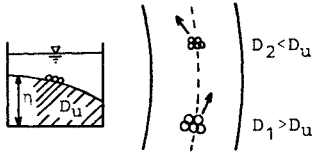


図-1 試料の移動方向

平衡状態における流砂の連続式は

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{1-\lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial (rq_n)}{\partial n} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

で与えられる。ここに、 η は河床高、 t は時間、 λ は砂の空隙率、 r は曲率半径、 n は流路中心から半径方向にとられた横断座標である。 q_n に関する微分方程式 (2) の境界条件は、両側岸において $q_n=0$ である。したがって、動的平衡状態においては、すべての地点で $q_n=0$ 、すなわち流砂運動は流路の平面曲がりに対応した同心円状の軌跡を描くことになる。式 (1) の流砂量式より、 $q_n=0$ となる横断形状を求めると、

$$-\frac{d\eta}{dn} = \tan \theta = -\frac{\lambda \mu}{1+\alpha \mu} \sqrt{\frac{1}{\tau_{*cu}} \frac{u_*^2}{R_s g D_u}} \tan \delta \dots \dots \dots (3)$$

が得られる。ここに、 τ_{*cu} は粒径 D_u の砂の無次元限界掃流力、 R_s は砂の水中比重、 g は重力加速度、 u_* は摩擦速度である。

式 (3) で表わされる動的平衡河床上に、異なる粒径 D の一様砂を置いた場合の横断方向流砂量は、式 (1)、(3) より粒径 D の関数として、

$$\frac{q_n}{q_s} = \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_{*cu}} \frac{D}{D_u}}\right) \tan \delta \dots \dots \dots (4)$$

で表わされる。 τ_{*cu} および τ_{*c} は、それぞれ粒径 D_u および D の砂の無次元限界掃流力である。一様湾曲流路では、後に示すように δ がどの地点においても負であるので、砂の移動方向 (q_n の正、負) は粒径 D のみによって決定される。完全粗面域を考え $\tau_{*c} = \tau_{*cu}$ を仮定すると、図-1 に示すように $D > D_u$ の粒径の砂では $q_n > 0$ 、すなわち砂の移動方向は外岸向き、 $D < D_u$ の粒径の砂は内岸に輸送される。これは、粒径が大きいほど、斜面上の砂を外岸方向に転がり落とす重力の作用が、砂を内岸に輸送する二次流の作用より大きくなることによる。

以上の議論では、それぞれ粒径の異なる一様砂がどの方向に輸送されるかについてのみ述べており、横断的 sorting 機構の定性的な説明にとどまっているので、混合砂がどのようにふるい分けられて、どのような平衡横断形状、粒度の横断分布に至るかについては説明できない。そこで混合砂の動的平衡状態について考える。動的平衡状態は、砂粒子は移動しているが河床形状および各

地点の粒度分布は時間的に変化しない状態である。したがって、各粒径階層ごとに、以下の流砂の連続式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial (rq_{ni})}{\partial n} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 q_{ni} は各地点における混合砂の各粒径階層ごとの横断方向流砂量である。両側岸において $q_{ni}=0$ を考慮すると、一様砂の場合と同様に、すべての粒径階層で $q_{ni}=0$ となる。ある地点の河床の横断勾配はどの粒径の砂に対しても同一となるため、混合砂の横断方向流砂量が粒径によって変化する場合に $q_{ni}=0$ を満足するためには、ある地点の表層粒度は混合状態ではなく、一様粒度でなければならない。すなわち、ある時点で混合砂の横断方向流砂量が各粒径階層ごとに異なっている場合には、各地点の粒度が一様となるまで sorting が継続して河床形状、粒度の分布は変化し続け、sorting が完了した段階で河床形状および粒度の分布が平衡に至る。以上のように動的平衡状態が達成される一様湾曲流路の横断的 sorting では、平衡状態において、理論的にはある地点の表層に 1 つの粒径の砂しか存在し得ないことから、先に述べた pavement とは区別し、pure sorting とよぶことにする。pure sorting による平衡形状を議論する場合には、おのおのの地点での表層粒度が一様となることから、一様砂に関する流砂量式を用いることができる。

以上の考察より、動的平衡状態においては、表層粒度は各地点で一様でかつ外岸に向かって増加する横断分布をなす。したがって、全表層を構成する粒度の分布が与えられれば、各地点の粒度が決定され、横断河床形状は式 (3) における D_u および τ_{*cu} をそれぞれの地点の粒径および限界掃流力を用いて式 (3) から算定される。

3. 一様湾曲流路の二次流

式 (3) が示すように一様湾曲流路の動的平衡形状は、断面内の二次流に支配される。このため、二次流の横断分布を明らかにする必要がある。湾曲部の二次流は、横断方向の圧力勾配と遠心力の不均衡から生じ、遠心力の大きな上層では外岸向き、遠心力の小さな下層では内岸向きとなる。長方形断面における二次流の流速分布は、線形化された横断面内の渦度方程式

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^4} = -\frac{2}{\epsilon} u \frac{\partial u}{\partial z} \dots \dots \dots (6)$$

を、縦断方向流速分布を与えて解くことにより、精度よく算定できることが示されている¹³⁾。ここに、 ψ は二次流の流関数、 u は各地点の縦断方向流速、 ϵ は渦動粘性係数、 r は曲率半径、 z は鉛直座標である。また、横断方向流速 (二次流) は、

$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \dots\dots\dots (7)$$

で定義される。

任意横断面形状に対する式(6)の境界条件は複雑となるため、式(6)の解を求めることはきわめて困難である。そこで、川幅-水深比が大きく、河床の横断勾配が比較的小さいことを仮定し、側岸のごく近傍を除いて成り立つと考えられる簡略化された渦度方程式を得る¹⁾。すなわち、式(6)における r に関する微分項を無視して、

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} = -\frac{2}{\varepsilon} u \frac{\partial u}{\partial \xi} \dots\dots\dots (8)$$

と簡略化する。ここに ξ は図-2に示すように各地点の河床面からとられた鉛直上向き座標である。

各地点の縦断流速 u は、鉛直方向への対数則を仮定し、次式で与える。

$$\frac{u}{u_{*0}} = \frac{u_*}{u_{*0}} \left\{ \frac{\bar{u}}{u_*} + \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{\xi}{h} + 1 \right) \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 \bar{u} は鉛直平均流速、 u_* は摩擦速度、 κ はカルマン定数(0.4)、 h は水深であり、添字の0は流路中央での値であることを示す。渦動粘性係数 ε を流路中央での摩擦速度を用いて $\varepsilon = u_{*0} h / 15$ で与え、式(9)を式(8)に代入して $\xi = 0$ および $\xi = h$ において $\partial^2 \psi / \partial \xi^2 = 0$ の境界条件のもとにこれを解くと、二次流の分布が以下のように得られる。

$$\frac{v}{\bar{u}} = \frac{\bar{u}}{u_{*0}} \frac{h}{r} \frac{1}{\kappa} \left\{ F_A \left(\frac{\xi}{h} \right) - \frac{1}{\kappa} \sqrt{C_f} F_B \left(\frac{\xi}{h} \right) \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ただし、摩擦係数 $C_f = (u_* / \bar{u})^2$ は、どの地点においても一定としている。ここに、

$$F_A \left(\frac{\xi}{h} \right) = -15 \left\{ \left(\frac{\xi}{h} \right)^2 \ln \frac{\xi}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{h} \right)^2 + \frac{15}{54} \right\} \dots\dots (11 \cdot a)$$

$$F_B \left(\frac{\xi}{h} \right) = \frac{15}{2} \left\{ \left(\frac{\xi}{h} \right)^2 \ln^2 \frac{\xi}{h} - \left(\frac{\xi}{h} \right)^2 \ln \frac{\xi}{h} + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{h} \right)^2 - \frac{19}{54} \right\} \dots\dots\dots (11 \cdot b)$$

であり、 \bar{u}_0 は流路中央での鉛直平均流速を表す。

流砂運動および平衡形状を支配する底面二次流 v_b は、砂粒子に作用する流体抗力に関する粒径程度の高さにおける二次流にとることが望ましいが、底面における境界条件として $\partial v / \partial \xi = 0$ を与えていることから、 $\xi / h = 0 \sim 0.05$ の間で v は2~3%しか変化しないため、近似的に、式(10)、(11・a)、(11・b)において $\xi = 0$ とおき、

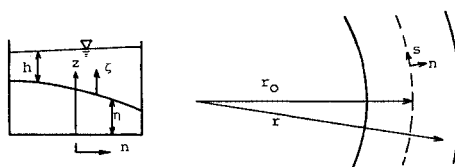


図-2 記号の定義

$$\tan \delta = \frac{v_b}{u_b} = \frac{\bar{u}}{u_b} \frac{h}{r} \frac{1}{\kappa} \left\{ F_A(0) - \frac{1}{\kappa} \sqrt{C_f} F_B(0) \right\} \dots\dots\dots (12)$$

を得る。さらに、底面流速 u_b を相当粗度高さの点の流速と考えると、底面流向は

$$\tan \delta = \frac{\bar{u}}{u_b} \frac{1}{A_r \sqrt{C_f} \kappa} \frac{h}{r} \left\{ -4.17 + 2.64 \frac{\sqrt{C_f}}{\kappa} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

で表わされる。ここに、 A_r は粗面の対数流速分布式における定数を表わし、 $A_r = 8.5$ である。

4. 横断斜面上の一様砂の横断方向流砂量式

2. で述べたように、pure sorting が生じる一様湾曲流路の動的平衡形状を論じる場合には、一様砂の流砂量式を用いることができる。吉川・池田・北川²⁾は、一様湾曲流路の横断斜面上を定常運動する砂粒子に作用する力のつり合い式を立てることにより、砂粒子の移動方向角を算定している。ここでは、そこの考え方を発展させて、Parker¹⁴⁾ が示したように、より一般的な形で横断方向流砂量式を表現する。

図-3に示すように、砂粒子の速度ベクトルを $\vec{V}_p = (u_p, v_p)$ 、底面の流速ベクトルを $\vec{V}_b = (u_b, v_b)$ で表わし、それぞれの方向角を β, δ 、横断斜面角を θ 、流体抗力の作用角を γ とする。流体と移動砂粒子間の抗力、揚力をそれぞれ F_D, F_L 、砂粒子に作用する重力を F_g 、移動砂粒子と静止砂面間の摩擦力を F_f とすると、縦・横断方向の力のつり合い式は、それぞれ、

$$F_D \cos \gamma - F_f \cos \beta = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$F_D \sin \gamma + F_g \sin \theta - F_f \sin \beta = 0 \dots\dots\dots (15)$$

となる。ただし、揚力 F_L は底面に垂直方向に作用するものとし、砂粒子に作用する遠心力は無視している。 F_D, F_L, F_g, F_f は、それぞれ次式で表わされる。

$$F_D = A \frac{\rho}{2} C_D \frac{\pi}{4} D^2 \{ (u_b - u_p)^2 + (v_b - v_p)^2 \} \dots\dots\dots (16)$$

$$F_L = \alpha F_D \dots\dots\dots (17)$$

$$F_g = \frac{\pi}{6} D^3 (\sigma - \rho) g \dots\dots\dots (18)$$

$$F_f = \mu (F_g \cos \theta - F_D) \dots\dots\dots (19)$$

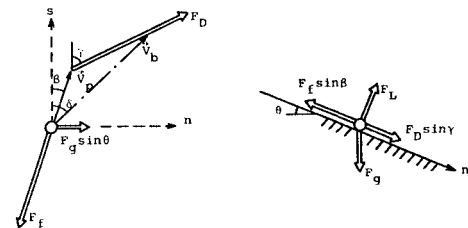


図-3 砂粒子に作用する力のつり合い図

ここに、 ρ および σ はそれぞれ流体および砂粒子の密度、 D は砂粒子の粒径、 C_b は抗力係数、 μ は砂の動摩擦係数、 α は揚力-抗力比、 Λ は砂粒子が周辺にも存在することによる遮蔽の効果を表わす係数である。流向、砂粒子の移動方向、抗力の作用方向をそれぞれ、

$$\tan \delta = v_b / u_b \dots\dots\dots (20)$$

$$\tan \beta = v_p / u_p \dots\dots\dots (21)$$

$$\tan \gamma = \frac{v_b - v_p}{u_b - u_p} \dots\dots\dots (22)$$

で表わすと、式 (14)~(22) の未知量は、砂粒子速度 u_p および v_p となる。

$\tan \beta$, $\tan \gamma$, $\tan \theta \ll 1$ を仮定すると、式 (16)~(19) を用いて式 (14) は近似的に

$$\Lambda \frac{\rho}{2} C_b \frac{\pi}{4} D^2 (u_b - u_p)^2 (1 + \alpha\mu) - \mu \frac{\pi}{6} D^3 (\sigma - \rho) g = 0 \dots\dots\dots (23)$$

となる。これより、

$$u_b - u_p = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\mu}{1 + \alpha\mu} \frac{R_s g D}{\Lambda C_b}} \dots\dots\dots (24)$$

が得られる。

同様の仮定において、式 (15) の \sin 項はすべて \tan に置き換えることができるため、式 (16)~(19) および式 (22) を用いて、式 (15) を $\tan \beta$ について解き、

$$\tan \beta = \frac{v_b - v_p}{u_b - u_p} + \frac{1 + \alpha\mu}{\mu} \tan \theta \dots\dots\dots (25)$$

を得る。上式右辺第1項は、式 (20), (21) を用いて

$$\frac{v_b - v_p}{u_b - u_p} = \frac{u_b}{u_b - u_p} \tan \delta - \frac{u_p}{u_b - u_p} \tan \beta \dots\dots\dots (26)$$

で表わされる。したがって、式 (25) の右辺は $\tan \beta$ の関数となっている。式 (26) を式 (25) に代入し、改めて $\tan \beta$ について解き直すと、

$$\tan \beta = \tan \delta + \frac{u_b - u_p}{u_b} \frac{1 + \alpha\mu}{\mu} \tan \theta \dots\dots\dots (27)$$

となる。

吉川ら²⁾の解析では、式 (27) の $u_b - u_p$ に式 (24) を代入するにどどまっていた。ここで、Parker & Andrews⁷⁾と同様に移動限界状態におけるつり合い式を考慮し、式 (27) を簡略化する。移動限界状態の底面流速 u_{bc} は、式 (24) において $u_p = 0$ とおくことにより、

$$u_{bc} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\mu}{1 + \alpha_c \mu} \frac{R_s g D}{\Lambda_c C_{bc}}} \dots\dots\dots (28)$$

で表わされる。ここに、添字 c は移動限界状態における諸量であることを示す。式 (28) を用いて、式 (24) を書き直すと、

$$u_b - u_p = u_{bc} \sqrt{\frac{1 + \alpha_c \mu}{1 + \alpha\mu} \frac{\Lambda_c C_{bc}}{\Lambda C_b}} \dots\dots\dots (29)$$

となる。したがって、式 (27) は次式のように書き表わ

すことが可能である。

$$\tan \beta = \tan \delta + \frac{u_{bc}}{u_b} \sqrt{\frac{1 + \alpha_c \mu}{1 + \alpha\mu} \frac{\Lambda_c C_{bc}}{\Lambda C_b} \frac{1 + \alpha\mu}{\mu}} \tan \theta \dots\dots\dots (30)$$

前節で述べたように、底面流速として相当粗度高さの流速を想定しているため、粗面の対数流速分布則が成り立つ範囲では、

$$\frac{u_{bc}}{u_b} = \frac{u_{*c}}{u_*} \left(\equiv \sqrt{\frac{\tau_c}{\tau}} \equiv \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}} \right) \dots\dots\dots (31)$$

が成り立つ。式 (30) 中の α_c , C_{bc} は、流れが粗面乱流である限り、それぞれ α , C_b に等しいと考えることができる。次に、砂粒子が複数個存在することによる遮蔽の影響について考察する。流砂量を算定するにあたっては、移動砂に作用する平均的な流体力を見積る必要がある。

したがって、式 (16) の Λ はさまざまな配列状態において移動する砂についての平均値である。一方、限界流速または限界掃流力を算定するにあたっては、最も移動しやすい配列状態にある砂についての Λ を用いなければならない。したがって、近似的に $\Lambda_c \doteq 1$ と置くことができる。以上の考察および $\tan \beta$ が砂粒子の移動方向ばかりでなく、横断-縦断流砂量比 (q_n/q_s) をも表わすことより、式 (30) は最終的に流砂量式の形で

$$\frac{q_n}{q_s} = \tan \delta + \frac{1 + \alpha\mu}{\lambda\mu} \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_*}} \tan \theta \dots\dots\dots (32)$$

と表わされる。ここに、 $\lambda = \sqrt{\Lambda}$ であり、吉川ら²⁾と同様に $\lambda = \sqrt{0.35} = 0.59$ とする。

5. 平衡横断形状および粒度の横断分布

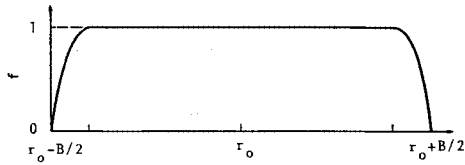
pure sorting が完了した後に達成される動的平衡横断形状は、2. で述べた理由によって、式 (3) の D_u および τ_{*cu} をそれぞれ D_r , τ_{*cr} に置き換えた次式によって表現される。

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{\lambda\mu}{1 + \alpha\mu} \sqrt{\frac{1}{\tau_{*cr}} \frac{u_*^2}{R_s g D_r}} \tan \delta \dots\dots\dots (33)$$

ここに、 D_r , τ_{*cr} はそれぞれ、曲率半径 r 地点の砂の粒径およびその粒径砂に対する無次元限界掃流力である。式 (3) を式 (33) に変形するにあたっては、水面の横断勾配は無視している。式 (33) に底面流向を表わす式 (13) を代入すると、

$$\frac{dh}{dr} = \left(\frac{\bar{u}}{u_*} \right)^2 \frac{h}{r} \frac{1}{A_r \sqrt{C_r \lambda}} \left[4.17 - 2.64 \frac{\sqrt{C_r}}{\lambda} \right] \cdot \frac{\lambda\mu}{1 + \alpha\mu} \sqrt{\frac{1}{\tau_{*cr}} \frac{u_{*0}^2}{R_s g D_0} \frac{D_0}{D_r}} \dots\dots\dots (34)$$

となる。ここに、 u_{*0} , D_0 はそれぞれ流路中央における摩擦速度、粒径である。鉛直平均流速の横断分布を強制渦型と仮定し、側岸の影響を考慮して、図-4 に示すように両側岸から流路幅の1割地点まで放物線型に変化する



図—4 補正関数 f の分布形

る補正関数 f を用いて、

$$\frac{\bar{u}}{u_0} = f \frac{r}{r_0} \dots\dots\dots (35)$$

で表わすと、式 (34) は

$$\frac{dh}{dr} = f^2 \frac{h}{r_0} \frac{r}{r_0} \left\{ \frac{0.23}{\sqrt{C_r}} - 0.36 \right\} \sqrt{\frac{\tau_{*0} D_0}{\tau_{*cr} D_r}} \dots\dots\dots (36)$$

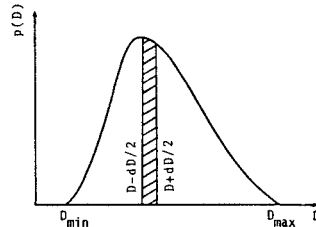
のように変形される^(註1)。ここに、 τ_{*0} は流路中央の無次元掃流力である。また、文献2) に従い、 $A_r=8.5$ 、 $\alpha=0.4$ 、 $\lambda=0.59$ 、 $\mu=0.43$ 、 $\alpha=0.85$ を与えた。

一様粒径砂の場合には、 $D_r=D_0$ となり式 (36) の未知量 h は式 (36) を適当な境界条件のもとに積分することで直ちに得られるが、混合粒径砂の場合には、式(36)の未知量は h および D_r の2つとなるため、このままでは解くことができない。そこで、粒径の場所的な変化を記述するもう一つの式が必要となる。それは、Allen³⁾、Bridge⁴⁾、Odgaard⁶⁾ が考慮し得なかった河床表層全体の粒度に対する限定条件によって与えられる。

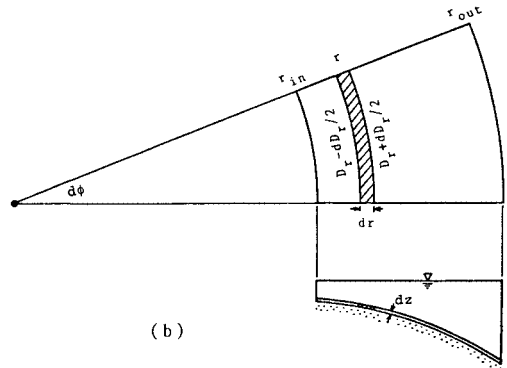
図—5(a) に示すような動的平衡状態の河床表層(最大粒径程度の一様厚さ dz) 全体にわたってのある粒径粒子の存在体積確率密度が与えられたとする。この混合砂を各地点では粒度が一様となるように表面に一様厚さ dz で分布させたとき、粒度の場合的变化 dD_r/dr が満足すべき条件を考える。図—5(b) に示すような斜線で示した容積 $r \cdot d\phi \cdot dr \cdot dz / \cos \theta$ 内には、 $D_r - dD_r/2 \sim D_r + dD_r/2$ の粒径の砂粒子が、 $(1-\lambda)r \cdot d\phi \cdot dr \cdot dz / \cos \theta$ の体積を占める。これらが河床表層全体の粒子体積に占める割合(確率) P は、

$$P\left(D_r - \frac{dD_r}{2}, D_r + \frac{dD_r}{2}\right) = \frac{r \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dr}\right)^2} |dr|}{\int_{r_{in}}^{r_{out}} r \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dr}\right)^2} dr} \dots\dots\dots (37)$$

注1) 二次流の分布式(10)を導くにあたっては、式(6)における r に関する微分項を無視しているため、二次流に関する両側壁での境界条件が考慮されていない。矩形断面水路に式(6)を適用し、両側壁で二次流がゼロとなる境界条件を与えた場合の解析結果は、側壁のごく近傍(幅の1割程度)を除いて境界条件の影響が現われないことが明らかとなっている¹³⁾。そこで、鉛直平均流速の横断分布を側壁近くで急激にゼロとなるように与えることで二次流に対する側壁境界条件の影響を補正している。



(a)



(b)

図—5 表層粒度の確率密度と粒度の横断分布の関係

で表わされる。ただし、おのおのの地点では粒度が一様であるため、空隙率 λ は一定としている。 dr を十分小さくとると、式 (37) の左辺は $p(D_r) |dD_r|$ で表わされるため、式 (37) は変形されて、

$$\left| \frac{dD_r}{dr} \right| = \frac{1}{p(D_r)} \frac{r \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dr}\right)^2}}{\int_{r_{in}}^{r_{out}} r \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dr}\right)^2} dr} \dots\dots\dots (38)$$

となる。ここに、 $p(D)$ は図—5(a) に示すような、粒径 D の粒子の存在確率密度であり、先に述べたように関数形は既知とする。2. で述べた一様湾曲流路の横断的 sorting の機構から、平衡状態における dD_r/dr は常に正となることが明らかである。したがって、式 (38) の左辺の絶対値記号は削除することができ、

$$\frac{dD_r}{dr} = \frac{1}{p(D_r)} \frac{r \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dr}\right)^2}}{\int_{r_{in}}^{r_{out}} r \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dr}\right)^2} dr} \dots\dots\dots (39)$$

と表わされる。

式 (36)、(39) を連立させて解くことにより、 h 、 D_r の横断分布が得られるが、計算はやや複雑となる。 dh/dr のオーダーは一般に 0.1 程度であるので、式 (39) における $(dh/dr)^2$ は 1 より十分小さいとして無視し、粒度の横断分布を近似的に次式で算定する。

$$\int_{D_{min}}^{D_r} p(D) dD = \frac{r^2 - r_{in}^2}{r_{out}^2 - r_{in}^2} \dots\dots\dots (40)$$

流路中央の粒径 D_0 は、上式で $r=r_0$ とおくことにより

得られる。これにより、式 (36) の右辺は r と h のみの関数として、

$$\frac{dh}{dr} = f_n(h, r) \dots \dots \dots (41)$$

のように表わされるため、 h の横断分布、すなわち平衡横断形状は数値計算により容易に算定される。

ここで問題となるのは、全表層砂の粒度分布の与え方であるが、実験データに対するもの、実河川データに対するものそれぞれについて後述する。

6. 実験値と理論結果の比較

前節までに展開された理論を検証する目的で、室内実験が行われた。用いた水路は、中心曲率半径 $r_0=120$ cm, 幅 $B=30$ cm, 湾曲角 270° の一様湾曲水路であり、使用砂は図-6 に示すような粒度分布をもつ中央粒径 $D_{50}=0.95$ mm, 比重 2.65 の珪砂である。横断的に水平で、一様縦断勾配をもつ初期河床上に流量 $Q=4.5$ l/s を通水し、ほぼ等流状態が得られるよう下流堰の高さを調節し、十分に時間が経過して平衡状態に達した後(約4時間後)、水面高および河床高をポイントゲージで測定し、プロベラ式流速計を用いて縦断流速を測定した。測定は横断方向11地点、流下方向3断面に対して行われ、対応する曲率半径地点のデータを平均して測定値とした。通水停止後、河床を横断方向に5cm間隔で6つの領域に分割し、各領域の表層砂を最大粒径程度のほぼ一様厚さで採取して、表層粒度の横断分布を求めた。測定された水理量は以下のようなものである。縦断水面勾配： $i=1/350$, 平均水深： $h_a=4.30$ cm, 中央水深： $h_0=4.38$ cm, 断面平均流速： $\bar{u}_a=Q/(Bh_a)=35.2$ cm/s, および中央鉛直平均流速： $\bar{u}_0=31.9$ cm/s。これらより、 $u_{*0}=\sqrt{gh_0i}=3.5$ cm/s, $Fr_0=\bar{u}_0/\sqrt{gh_0}=0.49$, $C_{r0}=gh_0i/\bar{u}_a^2=0.0097$, $Re_D=u_{*0}D_{50}/\nu=26$ が計算される。

図-7 は測定された鉛直平均流速の横断分布 (○印)

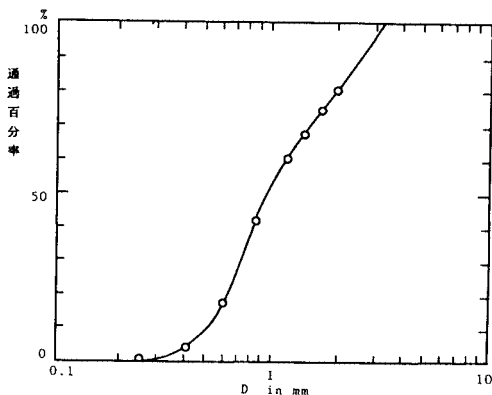


図-6 実験砂の粒径加積曲線

と式 (35) に示した補正関数を用いて表わした強制渦型の流速分布の対応を示す。内岸域では、側壁付近の遅い流体塊が二次流によって流路中央部へ輸送されるため、鉛直平均流速が強制渦型の分布よりやや低下するが、全体的にみて両者はほぼ一致しており、式 (35) の仮定がほぼ満足されることがわかる。平衡時の全表層砂の粒度分布は河床形状の変化に伴って初期のものとは若干異なることが予想されるが、表層粒度の変化過程を論じない本解析では、これを推定することはできない。そこで、平衡時の全表層砂の粒度分布が初期のものから変化しないことを仮定し、表層粒度の平衡横断分布を求めることにする。初期河床形状が本実験条件のように横断的に水平でなく、外岸が深掘れした平衡形状に近ければ、この仮定は十分に満足されると考えられる。図-6 に示した粒径加積曲線の実測点を直線補間して求めた各粒度階層

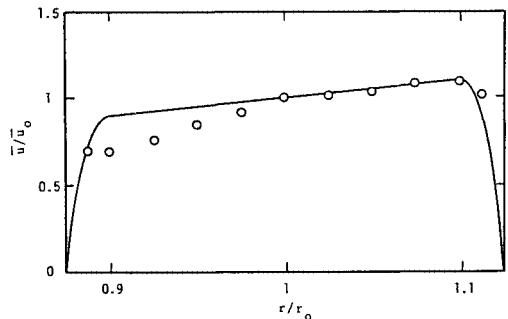


図-7 鉛直平均主流速の横断分布

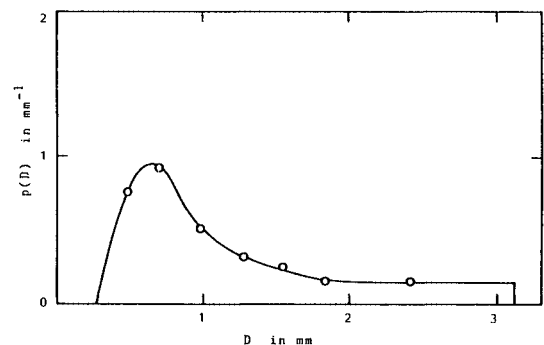


図-8 粒度の存在確率密度関数

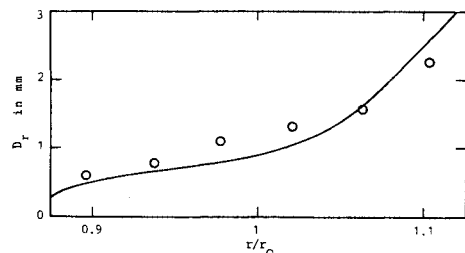


図-9 粒度の横断分布

の確率密度は図-8の○印が示す分布となるが、式(40)の積分を行うために、同図の実線が示すようななめらかな連続関数で内挿する。図-9は、これを用いて式(40)から算定した粒度の横断分布(実線)と実測値(○印)の比較を示す。実測値は横断方向に6つの領域に分割した表層砂のそれぞれの領域における中央粒径である。理論は内岸域の細粒化、外岸域の粗粒化をよく表現しており、粒度の横断分布の推定精度も高い。中央域で推定値がやや小さい理由については後述する。

図-10に平衡横断形状の実測値(○印)と、先に求めた粒度の横断分布を用いて式(36)により計算した理論平衡形状(実線)を示す。計算の境界条件としては、流路中央の水深を与え、摩擦係数は断面平均値を用いた。無次元限界掃流力は断面全体で一定とし、シールズカーブより $\tau_{*cr}=0.034$ を与えた。同図中の破線は、粒度を一樣とし、 D_{50} を用いて計算された平衡形状である。実線と破線を比較すると、混合粒度の場合の方が外岸の深掘れを抑制する傾向がみられる。しかし、小型模型実験のように、粒度の分布幅があまり広くとれない場合(浮遊砂が存在しない、すべての粒径の砂が移動状態にある制限から)には、その効果は顕著ではない。理論曲線は外岸の深掘れを小さく評価しているが、これは本実験において河床に一方方向性の砂州が形成されたことによると考えられる。外側岸に沿う測線上の河床の高低差で定義した砂州波高 Z_B は比較的大きく、約3.4 cmであった。直線流路の場合には、河床に交互砂州が形成されると、一波長平均した横断面形状は、側岸部が深掘れした蒲鉾型形状となり、その横断高低差は砂州波高の約半分となることが知られている¹⁵⁾。これを本実験に適用すると、砂州形成による外岸の平均深掘れは約1.7 cmであり、これを実験値から差し引いた値は理論解析結果とはほぼ一致する。したがって、本理論は、砂州が形成される場合には精度が落ちるが、砂州が形成されない場合には十分な精度で平衡横断形状を推定できると考えられる。

図-11は、通水前と平衡状態に至った後の全表層粒度の変化を示す。pavementの形成と同様に、平衡時の粒度が初期のものより粗くなっていることがわかる。図

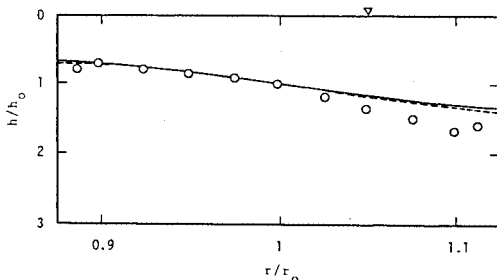


図-10 平衡横断形状

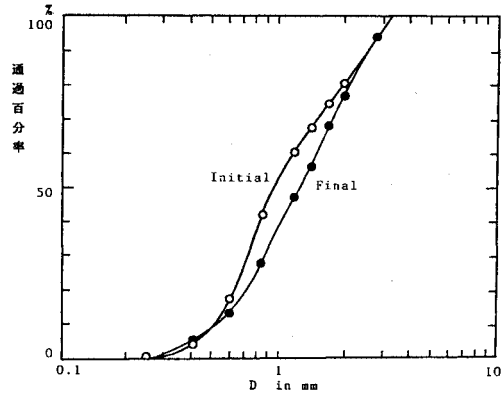


図-11 全表層粒度の粗粒化

一9に示した表層粒度の横断分布の計算値は、通水前の粒度分布をもとにしているため、中央域でやや小さい予測値を示すが、平衡状態のものを用いれば、当然の結果として実測値をよい精度で説明できるはずである。全表層粒度の粗粒化は、水路が短く、給砂を行っていないため、細粒砂が選択的に大きい割合で流出してしまうこと、および堆積域の下層に細粒砂が大きい割合で堆積していることに原因していると思われる。しかし、全表層粒度の変化はあまり極端ではないため、どちらの粒度分布を用いても理論平衡横断形状にほとんど差異はない。また実河川で測定される表層粒度は河床が平衡状態に近い状態のものであるため、全表層粒度の時間変化は無視しても差し支えないと考えられる。したがって、実河川データに対する平衡横断形状、粒度の横断分布を算定するにあたっては、平衡時の全表層砂の粒度分布として、近似的に、ある時点に測定されたそれを与えることができる。

7. 実河川データと理論結果の比較

前節で述べた実験では、粒度の分布幅が比較的狭く、平衡横断形状に混合の効果は顕著には現われなかった。そこで、粒度の分布幅が広い実河川データを用い、混合粒度の効果を明らかにする。

Jackson⁹⁾は Illinois 州 Grayville 近郊を流れる Wabash 川において、水深、河床形状、主流・二次流の分布、粒度の横断分布を、1972年11月から1973年9月までの11か月間にわたって測定している。この期間の流量変化は200~3000 m³/sであり、一樣湾曲とみなせる Helm 地点において流路幅を維持できる流量 (bankfull discharge) が約1200 m³/sであることから、1270 m³/sの流量が観測された1973年5月9日のデータを用いて理論の検証を行う。

この日に測定された中央水深 h_0 、鉛直平均中央流速 \bar{u}_0 、中心曲率半径 r_0 、流路幅 B 、および流水断面積 A は、

それぞれ、 $h_0=3.4\text{ m}$ 、 $\bar{u}_0=1.25\text{ m/s}$ 、 $r_0=610\text{ m}$ 、 $B=250\text{ m}$ 、 $A=937\text{ m}^2$ である。Jackson のデータ中には縦断面水面勾配に関する記述がないため、流路中央における摩擦速度 u_{*0} を直接算定することができないが、実河川における摩擦係数 C_f がほぼ 0.01 程度であることから、これを用いて $u_{*0}=\sqrt{C_f}\bar{u}_0=12.5\text{ cm/s}$ が推定値として得られる。全表層粒度の存在確率密度は、各地点の表層平均粒径の分布図をもとに、図-12 のように表わされる。また、これをもとにして得られる粒径加積曲線より、中央粒径は $D_{50}=0.9\text{ mm}$ となる。

図-13 は式 (40) により算定された粒度の横断分布(実線)と実測された各地点の表層平均粒径の対応を示す。理論は、外岸に向かって指数関数的に増加する粒径の変化をよく表現する。図-14 は、式 (35) で与えた強制渦型の流速分布(実線)と鉛直平均された実測の主流速分布を比較して示す。実河川においても、強制渦型の流

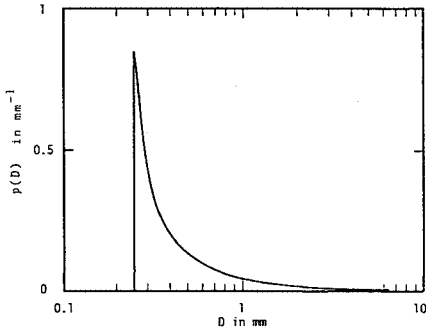


図-12 全表層粒度の存在確率密度関数

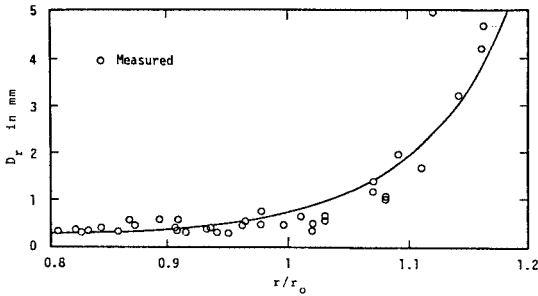


図-13 粒度の横断分布 (Wabash 川)

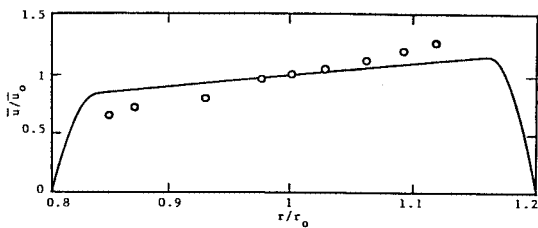


図-14 鉛直平均主流速の横断分布 (Wabash 川)

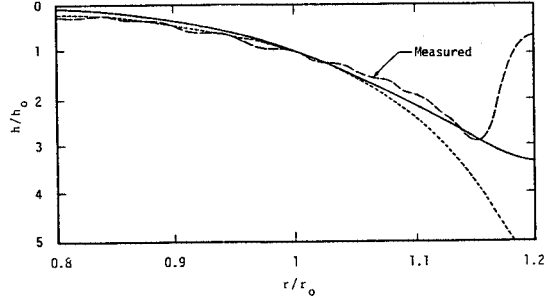


図-15 平衡横断形状 (Wabash 川)

速分布がほぼ満足される。

図-15 は平衡横断形状の計算値と実測値の対応を示す。破線が実測形状を実線が理論曲線を、また点線は D_{50} の一様砂とした場合の理論曲線を示す。ただし、前節と同様に無次元限界掃流力 τ_{*cr} は各地点で一定とし、図-12 に示すように比較的大粒径の砂が含まれることから、完全粗面域における値 $\tau_{*cr}=0.06$ を与えた。混合粒度の効果を考慮した理論曲線は実測形状をよく表わしているが、 D_{50} の一様砂とした理論曲線は外岸における洗掘深を過大に見積り、中央河床高に対する洗掘深は実測最深点において、実測値の約 1.5 倍にもなる。言い換えれば、大粒径砂が外岸の洗掘部へ輸送される横断的 sorting の機構によって、外岸の洗掘が大きく抑制されていることがわかる。したがって、特に実河川のように河床材料が広い粒度の分布幅をもつ場合には、平衡横断形状および最大洗掘深に及ぼす混合粒度の効果は無視できず、これらを精度よく推定するにあたっては、本研究で行ったように粒度の横断分布を考慮する必要がある。

8. 結 論

本研究は、一様湾曲流路の横断的 sorting の機構とこれが横断河床形状に及ぼす影響について理論的考察を加えたものである。これにより、以下のことが明らかになった。

(1) 混合砂の横断的 sorting は、砂粒子に作用する重力と流体力の比が大粒径砂ほど大きいため、大粒径砂が河床高の低い外岸域へ、細粒径砂が断面内二次流の影響で内岸域に輸送されることにより生じる。

(2) 一様湾曲流路の動的平衡状態においては、横断的 sorting により表層粒度はそれぞれの半径方向地点で一様となる。したがって、動的平衡時の流砂量は各地点の粒径を用いて一様粒径砂に関する流砂量式から算定することが可能である。

(3) 上記 (1)、(2) により、平衡時の表層粒度の横断分布は外岸ほど粗くなるのが定性的に説明されるが、さらに、全表層粒度の分布形を考慮することにより、

平衡粒度の分布が式(40)のように定量化される。

(4) 平衡横断形状の理論解析結果は、現地観測結果と十分な精度で一致するが、砂州が形成された実験結果との対応はやや悪い。しかし、これは実験結果に本理論では考慮し得なかった砂州による平均洗掘深が含まれているためであり、これを除いた形状は本理論でよく説明できる。

(5) 混合砂河床においては、横断的 sorting の結果として、大粒径砂が深掘れ部の表層を覆うため、中央粒径に等しい一様砂の場合に比べ外岸の深掘れが抑制される。この効果が本研究により定量化され、実河川のように粒度の分布幅が比較的広い場合には、これを無視できないことが明らかとなった。

謝 辞：本研究は、文部省科学研究費・自然災害特別研究「沖積地河川における洪水流の制御と治水安全度向上に関する研究」(研究代表者：岸 力 北大教授、課題番号：59020003)の補助を受け、日本学術振興会および NSF による日米科学協力事業(研究代表者：池田駿介, Gary Parker)の一環として行ったものである。ここに記して感謝の気持ちを表わします。

参 考 文 献

- 1) 池田駿介：移動床河川の弯曲部における二次流と動的横断平衡河床について，土木学会論文報告集，第 229 号，pp. 55~65, 1974.
- 2) 吉川秀夫・池田駿介・北川 明：弯曲水路の河床変化について，土木学会論文報告集，第 251 号，pp. 65~75, 1976.
- 3) Allen, J. R. L. : A Quantitative Model of Grain Size and Sedimentary Structures in Lateral Deposits, *Geol. J.*, Vol. 7, pp. 129~146, 1970.
- 4) Bridge, J. S. : Bed Topography and Grain Size in Open Channel Bends, *Sedimentology*, Vol. 23, pp. 407~414, 1976.
- 5) Engelund, F. : Flow and Bed Topography in Channel Bends, *Proc. ASCE*, Vol. 100, No. HY11, pp. 1631~1648, 1974.
- 6) Odgaard, A. J. : Bed Characteristics in Alluvial Channel Bends, *Proc. ASCE*, Vol. 108, No. HY11, pp. 1268~1281, 1982.
- 7) Parker, G. and Andrews, E. D. : Sorting of Bed Load Sediment by Flow in Meander Bends, *Water Resources Research*, Vol. 21, No. 9, pp. 1361~1373, 1985.
- 8) Jackson, R. G. : Unsteady-Flow Distributions of Hydraulic and Sedimentologic Parameters Across Meander Bends of the Lower Wabash River, Illinois-Indiana USA, *Proc. of International Symposium on Unsteady Flow in Open Channels*, BHRA Fluid Engineering, Cranfield, Bedford, England, pp. G4-35~48, 1976.
- 9) Bridge, J. S. and Jarvis, J. : The Dynamics of a River Bend : A Study in Flow and Sedimentary Processes, *Sedimentology*, Vol. 29, pp. 499~541, 1982.
- 10) Dietrich, W. E. and Smith, J. D. : Bed Load Transport in a River Meander, *Water Resources Research*, Vol. 20, No. 10, pp. 1355~1380, 1984.
- 11) Deigaad, R. : Longitudinal and Transverse Sorting of Grain Sizes in Alluvial Rivers, *Ser. Pap. 26*, 108 pp., Tech. Univ. of Denmark, Lyngby, 1980.
- 12) Parker, G. and Klingeman, P. C. : On Why Gravel Bed Streams Are Paved, *Water Resources Research*, Vol. 18, No. 5, pp. 1409~1423, 1982.
- 13) Kikkawa, H., Ikeda, S., Ohkawa, H. and Kawamura, Y. : Secondary Flow in a Bend of Turbulent Stream, *Proc. of JSCE*, No. 219, pp. 107~114, 1973.
- 14) Parker, G. : Discussion of Latelal Bed Load Transport on Side Slopes, *Proc. ASCE*, Vol. 110, No. HY2, pp. 197~199, 1984.
- 15) 藤田裕一郎・村本嘉雄・堀池周二・小池 剛：交互砂州の発達機構，第 26 回水理講演会論文集，pp. 25~30, 1982. (1986. 3. 14・受付)