

半無限弾性体上の円板の水平並進振動の直接積分方程式法

DIRECT INTEGRAL EQUATION METHOD OF FORCED HORIZONTAL
VIBRATIONS OF CIRCULAR DISK ON ELASTIC HALF SPACE

東原 紘道*

By Hiromichi HIGASHIHARA

Horizontal translational vibrations of a circular disk on an elastic half space are investigated mathematically. The problem is formulated in terms of an integral equation which describes explicitly the relation between the horizontal displacement of the disk and the shearing stress of contact. Its integral kernel is represented in a rigorous but simple form: its singularity is separated and is reduced to an elliptic integral while the regular part is expressed in terms of a definite integral of some higher analytic functions over a finite interval. These higher functions, defined as definite integrals of trigonometric functions over a finite interval, are readily evaluated. The presented formula is proved correct by applying it to a rigid disk and comparing the results with those of conventional methods.

Keywords: dynamical compliance, footings, foundations

1. はじめに

半無限弾性体上において単振動する円板のコンプライアンス問題は、構造物と地盤の動的相互作用の研究にとって、1つの重要な理論的基礎である。本研究は、そのうちの水平並進モードについて、新しい解析の方法を提示してそのための基本的公式を導くことを目的とする。

以下では、円板の中心軸を z 軸とする円柱座標 (r, θ, z) をとり、半無限弾性体の領域を $z \geq 0$ とする。これに対応する変位成分を (u_r, u_θ, w) 、また平面 $z=0$ における応力成分を $(\tau_r, \tau_\theta, \sigma)$ と書く。接触面ではすべりが生じないものとする。また垂直応力 $= 0$ とするいわゆる緩和された応力境界条件を用いる。

円板のコンプライアンス問題の歴史は長く、その研究の数も膨大である。そしてその大部分は剛体円板を対象としている。この問題においては未知数は接触面の応力のみであり、接触面の変位は剛体の運動学的条件によって既与のものとなる。したがってこの変位条件および自由表面の応力ゼロの条件を満足するような接触面応力分布を見出すことが課題となる。

解析のフレームは、点加振源に関する Lamb の理論によって確立されており、原理的にはこれを適切に重ね合わせればよいが、そのままの実行は困難なので、別のアプローチが必要である。

前述した緩和された条件のもとで考察の対象となる量は、鉛直モードでは w と σ 、水平ねじれモードでは u_θ と τ_θ の1対であるのに対し、並進モードでは u_r, u_θ と τ_r, τ_θ の2対であり、計算はより複雑になる。

この制約に加えて実用的観点からの要求もあって、これまでは鉛直モードの研究が先行してきた。このうち初期のものは応力の分布形を、一様分布もしくは静的な場合の分布形に仮定するものであるが、この手法が不完全なことは明らかである^{1),2)}。応力の分布形を仮定しない厳密な定式化は、Robertson による dual integral equations 法の導入によって得られた（以下では単に dual 法とよぶ）。これによって第2種のフレドホルム型積分方程式が与えられる。そしてその解の積分変換として応力が計算される³⁾。この手法はただちに剛体円板のすべてのモードに適用された⁴⁾⁻⁶⁾。

水平並進モードの場合には、2個の未知関数（これを ϕ_1, ϕ_2 と書く）に対して、連立する2個の積分方程式が与えられる⁷⁾。これは差分法などによって数値的に解かれる。円板の動的コンプライアンスは ϕ_1 の定積分で与

* 正会員 工博 埼玉大学助教授 工学部建設工学科
(〒338 浦和市下大久保 255 番地)

えられ、この計算精度は一般に良好である。接触面のせん断応力も ϕ_1, ϕ_2 から計算されるが、こちらの計算式は微分を含んでいる。ところが ϕ は離散的にのみ計算されているため精度に問題がある。このためか Luco らは計算をコンプライアンスだけにとどめ、せん断応力の結果を与えていない⁷⁾。Veletsos らは応力分布の結果をも示しているが、これは多項式近似と最小 2 乗法を組み合わせた技巧によるものであり、これがどこまで実体を有するかについては疑義がある⁸⁾。これは dual 法の 1 つの限界といえよう。

さらに実際問題との関係では、円板の変形を考慮し得ることが求められる。ところが dual 法はごく特別な弾性円板の鉛直モードに適用されているにすぎない⁹⁾。しかもその計算法の性質上一般の弾性円板に拡張するのは不可能と思われる。まして水平モードへの展開は見通しがたたないのが現状である。dual 法は円板のコンプライアンス問題の系統的な解法として卓越した価値を有するものであるが、なおこのようにいくつかの欠点をもっていることがわかる。

これらの課題に対しては dual 法とは別箇のアプローチが必要であり、またそれは可能である。本論文で提示するものがそれであり、それはもっぱら半無限弾性体の解析を通して接触面の変位と応力の直接的な関係を明らかにするものである。この定式方法は、dual 法と異なっており、円板の運動学的もしくは力学的性質を一切援用しない。この結果、対象となる円板の力学的性質についての制約はない。この関係式は、円板の運動方程式と連立されると、円板の動的応答を完全に規定する。円板の力学的性質は運動方程式の方に反映されるわけである。

著者は、鉛直モードについて、この方法の基本公式を与えた^{10), 11)}。これによれば、接触面の鉛直変位は接触圧の積分変換で定められる。その積分核は、ある正則関数の有限区間上の積分と完全楕円積分の和で与えられる。コンプライアンス問題に特有の特異性は後者に集約されている。

この方法を水平並進モードにまで拡張するのが本論文の目標である。すなわち 2. において、まず接触面の水平変位とせん断応力との関係を積分変換で表示する。こうして得られる積分核は、極や分岐点などの特異点をもつ複雑な関数の、無限区間上での積分として定義され、このままでは利用できない。そこでこれを変形して扱いやすい形にする。得られた関係式は、剛体円板の静的応答については解析的に解かれ、弾性論の古典的な解に一致する。

3. においては積分核の数値例を与える。また得られた公式の妥当性を検証するために、剛体円板に適用してコンプライアンス関数を計算する。それは dual 法の結

果と一致し、公式の正しさが裏付けられる。

2. 理 論

(1) 基本となる関係式

鉛直モードの場合と同様に、妹沢の与えた公式が本研究の出発点になる¹²⁾。水平並進モードであるから、この公式の中の θ についてのフーリエ級数の次数 m は 1 である。妹沢の公式は 3 個の未定パラメーターをもつ特解であるが、応力の緩和条件によって、パラメーターは 2 個に減少する。これを c, d と書くと妹沢の公式は次のように表わされる。

変位成分をあらためて、 $u_r(r)e^{i\omega t} \cos \theta, u_\theta(r)e^{i\omega t} \sin \theta, w(r)e^{i\omega t} \cos \theta$ と書けば

$$u_r = - \int_0^\infty \left\{ \frac{b^2}{2a^2k^2} \frac{\partial J_1}{\partial r}(kr)c(k) + \frac{1}{k^2} \frac{J_1}{r}(kr)d(k) \right\} dk \dots\dots\dots (1)$$

$$u_\theta = \int_0^\infty \left\{ \frac{b^2}{2a^2k^2} \frac{J_1}{r}(kr)c(k) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial J_1}{\partial r}(kr)d(k) \right\} dk \dots\dots\dots (2)$$

$$w = \int_0^\infty \frac{2\alpha\beta - (k^2 + \beta^2)}{2a^2\beta} J_1(kr)c(k) dk \dots\dots\dots (3)$$

同様にせん断応力を $\tau_r(r)e^{i\omega t} \cos \theta, \tau_\theta(r)e^{i\omega t} \sin \theta$ と書けば、

$$\frac{\tau_r}{\mu} = \int_0^\infty \left\{ - \frac{F(k)}{2a^2k^2\beta} \frac{\partial J_1}{\partial r}(kr)c(k) + \frac{\beta}{k^2} \frac{J_1}{r}(kr)d(k) \right\} dk \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\tau_\theta}{\mu} = \int_0^\infty \left\{ \frac{F(k)}{2a^2k^2\beta} \frac{J_1}{r}(kr)c(k) - \frac{\beta}{k^2} \frac{\partial J_1}{\partial r}(kr)d(k) \right\} dk \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $a = \omega/V_p; b = \omega/V_s; a^2 = k^2 - a^2; \beta^2 = k^2 - b^2;$ V_p と V_s はそれぞれ弾性体内部の縦波と横波の速度、 μ はせん断剛性率、 ω は振動数、 J_1 は 1 次のベッセル関数である。さらに

$$F(x) = (2x^2 - b^2) - 4x^2\alpha\beta \dots\dots\dots (6)$$

式 (1), (2), (4), (5) の $\partial J_1/\partial r$ および J_1/r はベッセル関数 J_0 と J_2 の和または差で表現される。ここでフーリエ・ベッセルの積分公式を用いると c, d は消去されて次の関係式が得られる。

$$4\mu u_r(r) = \int_0^R s U_{11}(r; s) \tau_r(s) ds + \int_0^R s U_{12}(r; s) \tau_\theta(s) ds \dots\dots\dots (7)$$

$$4\mu u_\theta(r) = \int_0^R s U_{12}(s; r) \tau_r(s) ds + \int_0^R s U_{22}(r; s) \tau_\theta(s) ds \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 R は円板の半径であって、

$$\left. \begin{aligned} U_{11}(r; s) &= A(r; s) + B(r; s) - C(r; s) - C(s; r) \\ U_{12}(r; s) &= -A(r; s) + B(r; s) + C(r; s) - C(s; r) \end{aligned} \right\}$$

$$U_{22}(r; s) = A(r; s) + B(r; s) + C(r; s) + C(s; r) \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} A(r; s) &= \int_0^\infty \left\{ b^2 \frac{k\beta}{F(k)} - \frac{k}{\beta} \right\} J_0(kr) J_0(ks) dk \\ B(r; s) &= \int_0^\infty \left\{ b^2 \frac{k\beta}{F(k)} - \frac{k}{\beta} \right\} J_2(kr) J_2(ks) dk \\ C(r; s) &= \int_0^\infty \left\{ b^2 \frac{k\beta}{F(k)} + \frac{k}{\beta} \right\} J_2(kr) J_0(ks) dk \end{aligned} \right\}$$

.....(10), (11), (12)

式(7), (8)が求めるべき基本関係式である。全く同様に $w(r)$ も τ_r および τ_0 の積分変換として表示される。しかし後述のように u_r と u_θ は、式(7)と(8)を通して、 τ_r と τ_0 を決定する条件を構成するのに対し、 w はもっぱら τ_r と τ_0 から一方的に計算されるにすぎず、理論的意味に乏しいので、以下の考察から除くことにする。

式(10)~(12)の被積分関数は、積分路上に1個の極と2個の分岐点を有している。また積分値も $s=r$ のとき発散する。したがってこのままでは基本関係式(7), (8)はあくまで形式的なものにとどまり、実質的な意義を担い得ない。そこで以下では複素積分を利用して、積分核の特異部分を分離するとともに、積分を有限区間(0, b)上のものに還元することを試みる。なお基本関係式の積分核 U_{11} と U_{22} は r と s に関して対称である。したがって基本関係式の積分核は全体としても対称になっている。

(2) 積分の計算

まず A を計算する。ポアソン比を ν とすれば、 $k \uparrow \infty$ のとき

$$b^2 \frac{k\beta}{F(k)} - \frac{k}{\beta} \rightarrow -(2-\nu)$$

であるので、 $A(r; s)$ の発散部分は

$$-(2-\nu) \int_0^\infty J_0(kr) J_0(ks) dk \quad (13)$$

に等しい。これを有限区間上の積分に転換すると

$$-\frac{2(2-\nu)}{\pi r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-(s/r)^2 \cos^2 t}} \quad (14)$$

となり、 $s \uparrow r$ のとき対数的に発散することがわかる。ここで式(14)は $r > s$ のときの表示である。 $r < s$ のときは式中の r と s を交換しなければならない。

上式を分離した正則部分は複素平面上で周回積分に転換できる。文献10)とまったく同様の手法によって、次のような結果が得られる：

$$\int_0^b \left\{ b^2 k \sqrt{b^2 - k^2} F_0(k) + \frac{k}{\sqrt{b^2 - k^2}} \right\} H_0(kr, ks) dk - \pi b^2 \frac{\kappa \sqrt{\kappa^2 - b^2}}{F'(\kappa)} H_0(\kappa r, \kappa s) \quad (15)$$

ここに、 κ は F の0点； F' は F の導関数であって、

$$\left. \begin{aligned} F_0(x) &= \frac{1}{(2x^2 - b^2)^2 + 4x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} \\ &\quad \dots\dots a > x > 0 \\ &= \frac{(2x^2 - b^2)^2}{(2x^2 - b^2)^4 + 16x^4(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)} \\ &\quad \dots\dots b > x > a \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} H_0(x, y) &= \frac{1}{2} \{ J_0(x) N_0(y) + J_0(y) N_0(x) \} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin|x \sin \theta| \sin \theta \\ &\quad - y \sin \theta_2 |d\theta_1 d\theta_2 + i J_0(x) J_0(y) \dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$N_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta) d\theta \quad (18)$$

まったく同じ手順を B に対して踏むと、その発散部分 $r > s$ のとき

$$-\frac{2(2-\nu)}{\pi r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|2 \cos^2 t - (s/r)^2| \cos 2t}{\sqrt{1-(s/r)^2 \cos^2 t}} dt \quad (19)$$

であり、これも $s \uparrow r$ のとき対数的に発散する。その正則部分は式(15)の H_0 を、次に示す H_2 で置き換えたものに等しい：

$$\begin{aligned} H_2(x, y) &= \frac{1}{2} \{ J_2(x) N_2(y) + J_2(y) N_2(x) \} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin|x \sin \theta| \sin \theta \\ &\quad - y \sin \theta_2 | \cos(2\theta_1) \cos(2\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \\ &\quad + i J_2(x) J_2(y) \dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$N_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta) \cos(2\theta) d\theta \quad (21)$$

次に C の発散部分は、 $r > s$ のとき

$$\frac{2\nu}{\pi r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2(s/r)^2 \cos^2 t}{\sqrt{1-(s/r)^2 \cos^2 t}} dt \quad (22)$$

$s > r$ のとき

$$-\frac{2\nu}{\pi r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t}{\sqrt{1-(s/r)^2 \cos^2 t}} dt \quad (23)$$

C の正則部分は式(15)の H_0 を次の H_1 で置換するとともに被積分関数の第2項の符号を逆にしたものである：

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= \frac{1}{2} \{ J_2(x) N_0(y) + J_0(x) N_2(y) \} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin|x \sin \theta| \sin \theta \\ &\quad - y \sin \theta_2 | \cos(2\theta_1) d\theta_1 d\theta_2 + i J_2(x) J_0(y) \dots\dots (24) \end{aligned}$$

以上によって積分核がすべて数値積分で計算される。ここで、特殊関数の H_0, H_1, H_2 および発散部分のうちポアソン比を除いた項は、物理的条件と無関係に定まる、

純粹に普遍的な数値データである。

(3) 剛体円板の静的応答

円板が剛体であれば、ある定数 Δ に対して、 $u_r(r) \equiv \Delta$, $u_\theta(r) \equiv -\Delta$ である。さらに振動数 $\omega \downarrow 0$ のとき A, B, C の各関数の正則部分はすべて消え、発散部分のみが残る。以上の条件の下では式 (7), (8) は解析的に解かれ、次のような解が得られる：

$$\tau_r = -\tau_\theta = -\frac{4\mu\Delta}{\pi(2-\nu)} \frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}} \dots\dots\dots(25)$$

この結果は座標系を (r, θ) から直角座標 (x, y) に変換すると次のようになる。 $u_x = \Delta, u_y = 0$ のとき

$$\tau_x = -\frac{4\mu\Delta}{\pi(2-\nu)} \frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}, \tau_y = 0 \dots\dots\dots(26)$$

これは弾性体の静的解析によって得られる古典的な結果に一致する。ちなみに上記の計算の出発点となった妹沢の公式は、 $\omega \downarrow 0$ の極限では $\text{div } \mathbf{u} = 0$ なる特別な解のみを表わし、したがって静的な場合の一般解を与え得ないものである。しかしそのことを顧慮することなく計算を進めて式 (7), (8) にまで至ってしまえば、静的な場合に対しても有効になる。式 (26) はこのことを示している。

上記の静的応答を実現するために円板に加えるべき水平力は、式 (26) を円板上で積分し (符号を逆にして)、次のように求められる：

$$T_x = \frac{8\mu R}{2-\nu} \Delta, T_y = 0 \dots\dots\dots(27)$$

いま (無次元化された) コンプライアンス関数 f_1, f_2 およびそのアルガン表示 g_1, g_2 を次式で定義する：

$$\frac{\Delta/R}{T_x/(\mu R^2)} = f_1 + i f_2 = g_1 e^{i\theta} \dots\dots\dots(28)$$

一般にコンプライアンス関数は無次元化された振動数 $\xi = bR$ の関数として表わされるが、特に $\xi = 0$ のときは式 (27) によって次のようになる。

$$f_1 = g_1 = \frac{2-\nu}{8}, f_2 = g_2 = 0 \dots\dots\dots(29)$$

式 (25) および式 (29) は、以下の数値計算を進めるうえで重要な規範となる。

3. 数値計算

(1) 積分核の計算

積分核の計算に先立って、必要な特殊関数の数値データが用意されていなければならない。まずベッセル関数 J_0 と J_2 , および式 (18) の N_0 と式 (21) の N_2 は積分表示式もしくはべき級数によって計算される。次に式 (17) の H_0 , 式 (20) の H_2 , および式 (24) の H_1 が計算される。これらの2重積分は、絶対値内の関数値に応じて積分領域を2分して $\sin(x \sin \theta_1 - y \sin \theta_2)$ を展

開して1重積分に還元させることにより、効率的に計算される。

さらに式 (14), (19), (22), (23) 中の定積分を計算する。いずれも (s/r) の一変数関数として扱われる。ただし $(s/r) = 1$ においては関数値が急変するので、十分に密にデータを備えなければならない。左にも述べたように以上のデータは普遍的なデータであり、計算条件いかんによらず共通である。

ここで物理条件を指定する。これらの条件には、弾性体の弾性定数2個 (もしくは弾性波速度2個), 振動数および円板の半径が含まれる。しかし以下の計算では、ポアソン比 ν および無次元振動数 bR のみを真に独立なパラメーターとすることができる。

次に、指定された物理条件に対して、式 (15) 等によって、積分核の正則部分を計算する。式 (15) 中の x は b よりも数%大きいことが経験的に知れている。したがって上述の特殊関数の定義域は、要求される無次元振動数の1割増し程度まで必要である。

以上の手順で計算した積分核の結果の例を図1~図4に示す。計算条件は、ポアソン比が0.25であり、無次元振動数が5.0である。通常の土木構造物にあっては、これは相当に高い振動数である。

図1は式 (9) の $U_{11}(r; s)$ である。これは r と s に関して対称であるので、 $r > s$ の領域に実数部分を、 $s > r$ の領域に虚数部分を表示する。関数値は R で除して無次元化してある。実数部分は $s = r$ において対数的に発散する。このような $s = r$ における特異性は一般にグリーン関数の通性である。コンプライアンス問題の特徴は、関数値自体が発散すること、そしてその仕方が対数的という点に認められる。一方で虚数部分は至るところ正則であって穏やかに変化する。

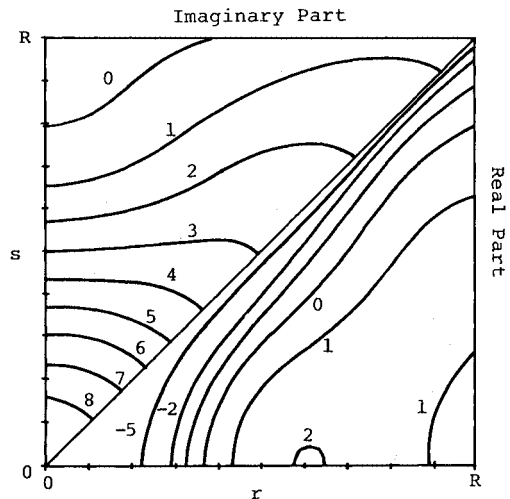


Fig.1 Integral Kernel U_{11} .

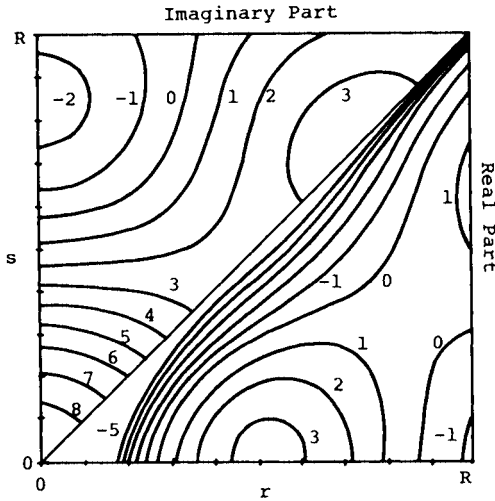


Fig. 2 Integral Kernel U_{22} .

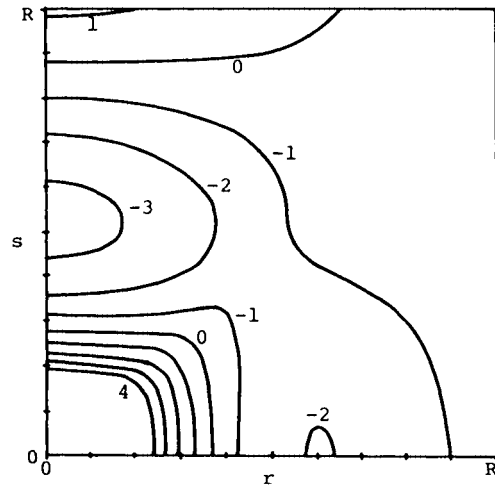


Fig. 3 Integral Kernel U_{12} : Real Part.

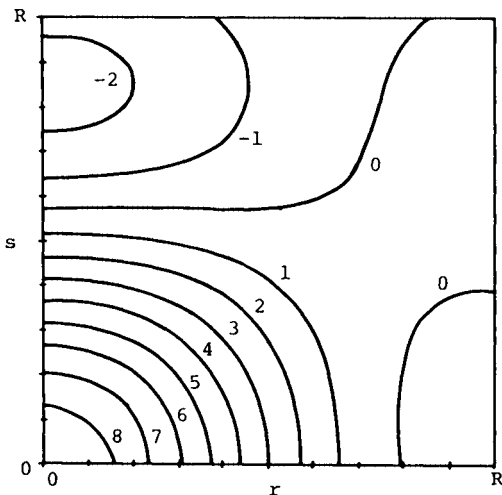


Fig. 4 Integral Kernel U_{12} : Imaginary Part.

図-2は $U_{22}(r; s)$ である。やはり r と s に関して対称であるので、 U_{11} と同じように表示する。 $s=r$ における実数部分の特異性も U_{11} と同様である。

いま積分核を $U(r; s)\exp[i\phi(r; s)]$ と書くとき、 U は、半径 s のリング上の荷重が半径 r のリングでの変位に及ぼす影響であり、 ϕ は変位に対する応力の位相遅れである。これに伴うエネルギー逸散は $\sin \phi$ に比例するから、積分核の実数部分が0に近いほどあるいは虚数部分の絶対値が大きい領域ほど減衰が大きい。特異点でもある $s=r$ では実数部分 $\rightarrow -\infty$ であるのでエネルギー逸散は小さい。

図-3と図-4は $U_{12}(r; s)$ の実数部分と虚数部分である。これらは r と s に関して対称ではなく、やはり複雑な形状を示している。実数部分の $s=r$ では、本来は発散する2つの楕円積分項の式(22)と式(23)が相殺するので、有限になっている。

(2) 離散化

円板の運動方程式と式(7)、(8)を連立させることによって円板の振動が求められる。そのためには式の(7)、(8)から τ_r と τ_θ を解き、その結果を運動方程式に代入する。この操作によって τ_r と τ_θ が消去され、運動方程式は、半無限弾性体からの反力を含まないことになる。こうして円板に作用する純然たる外力と応答との関係が完全に規定される。

いずれにせよ式(7)、(8)を解かなければならない。しかしこれを解析的に行うのは不可能であり、何らかの離散化が必要である。ここでは単純な選点法を用いる。これでも十分な精度が得られることは次章で明らかにされる。

区間 $[0, R]$ を適当に分割し、分割点におけるせん断力の値を $\tau_{r1}, \tau_{r2}, \dots, \tau_{rN}, \tau_{\theta 1}, \tau_{\theta 2}, \dots, \tau_{\theta N}$ とする。これに1次式の内挿関数を用いる。次に選点法を適用するために、変位の着目点を適当に N 個定め、そこでの変位量を $u_{r1}, \dots, u_{rN}, u_{\theta 1}, \dots, u_{\theta N}$ と書く。この近似のもとで式(7)、(8)の積分を実行すると、次のような連立1次方程式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_r \\ \tau_\theta \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(30)$$

ここに、中かっこの中の変数は上で定めた節点量である。

4. 剛体円板への適用

本研究の当面の課題は、すでに与えた公式の正しさおよびその応用性の検証にある。この目的のために以下ではこの公式を剛体円板に適用する。これに対しては dual 法による結果が知られているので、比較が容易である。

剛体においては $u_r = \Delta$ 、 $u_\theta = -\Delta$ である。このとき

は式 (26) と同様に、せん断力として τ_r, τ_θ の代わりに τ_x, τ_y を用いるのが便利である。すなわち式 (7), (8) の辺々を相加減すると次式が得られる。

$$-8\mu\Delta = \int_0^R sA(r; s)\tau_x(s)ds + \int_0^R sC(s; r)\tau_y(s)ds \quad \dots\dots\dots(31)$$

$$0 = \int_0^R sC(r; s)\tau_x(s)ds + \int_0^R sB(r; s)\tau_y(s)ds \quad \dots\dots\dots(32)$$

これを離散化すると次式を得る：

$$\begin{cases} [A]|\tau_x| + [C]^T|\tau_y| = -|1| \\ [C]|\tau_x| + [B]|\tau_y| = |0| \end{cases} \quad \dots\dots\dots(33)$$

ここで、定数 $8\mu\Delta$ は省略した。これは式 (33) の解に乘すればよい。これより次式が得られる。

$$\begin{cases} ([A] - [C]^T[B]^{-1}[C])|\tau_x| = -|1| \\ [B]|\tau_y| = -[C]|\tau_x| \end{cases} \quad \dots\dots\dots(34)$$

通常の計算では精度が問題になる。その場合には式 (33) よりも式 (34) の方が適当である。それは次の理由によるものであって、これは式 (10)~(12) から十分に予想されることである。すなわち $r \rightarrow 0$ のとき、 A は特に傾向をもたないのに対し、 B と C は速く 0 になる。これに対応して $[B]$ の左方および上方と $[C]$ の上方は小さくなる。このため式 (33) からそのまま作った係数行列は特異性が強い。

同じ理由で式 (34) の第 1 式の $[B]^{-1}$ の数値の精度は非常に悪い。しかしこれは $[C]$ では含まれているために、精度の悪い項はちょうど $[C]$ 中の微小項とかけ合わされ、結果として小さな値となる。一方で $[A]$ は十分に正則であるので、 τ_x は精度よく求められることになる。後述するように、コンプライアンス関数は τ_x のみによって定められるので、これも精度よく決定される。

しかし $|\tau_y|$ の計算では $[B]^{-1}$ が陽に出現することが避けられず、その結果の精度はよくない。ただし、この量は、式 (26) によって、静的な場合には 0 となる。類推によって動的な場合にも小さいと考えて差し支えないであろう (Luco は動的な場合も $\tau_y \equiv 0$ として計算している¹²⁾)。したがって本研究では τ_y の精度を格段に高めるための特別な工夫はしない。

円板に加えるべき水平力は式 (31), (32) の解 τ_x を用いて次のように書ける：

$$T_x = -2\pi \int_0^R r\tau_x(r)dr, \quad T_y = 0 \quad \dots\dots\dots(35)$$

これを用いるとコンプライアンス関数は、式 (28) によって計算される。

コンプライアンス関数 g_1, g_2 を図-5 に示す。 g_1 の数値は、 $\omega \downarrow 0$ のとき 1 になるように、式 (29) の因子 $(2-\nu)/8$ で割って正規化してある。同様に g_2 の数値は $-\pi/2$ で割ってある。もともと g_2 は外力に対する応

答変位の位相遅れであるから負数であり、これが $-\pi/2$ に近づくほど減衰によるエネルギー逸散が大きい。

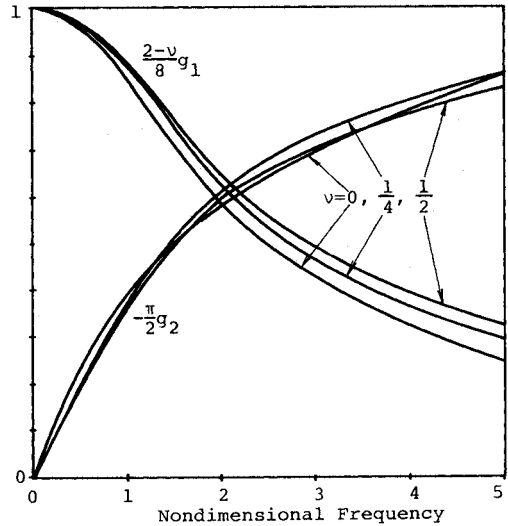


Fig. 5 Compliance Functions.

得られた結果は、dual integral equations 法による既往の結果と一致している⁷⁾。これによって本研究で与えられた公式の正しさが確認された。なお Luco らはコンプライアンス関数を式 (28) の f_1, f_2 で表示している。しかし g_1, g_2 の方がより単純な形をもっているので結果の検証には便利である。

次に接触面のせん断応力のみをみよう。図-6 は無次元化されたせん断力 $(\tau_x R)/(\mu\Delta)$ の絶対値の半径方向の

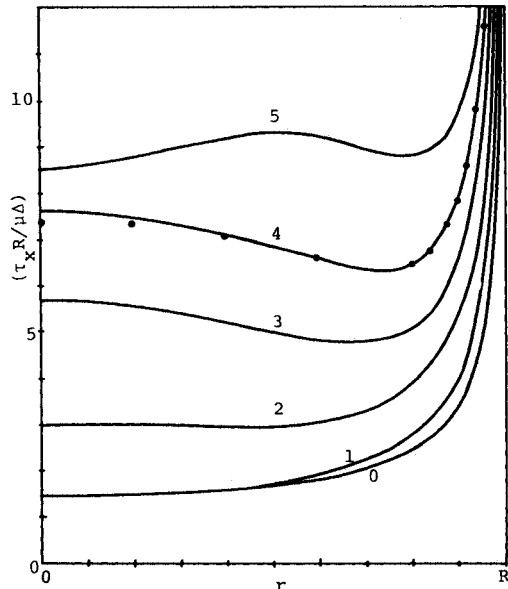
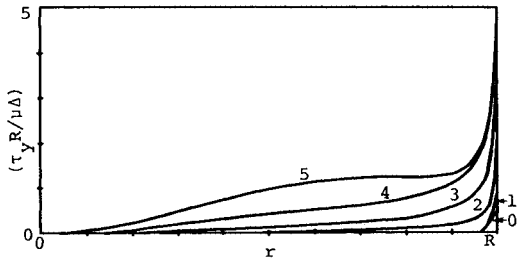


Fig. 6 Distribution of Shearing Stress τ_x .

Fig. 7 Distribution of Shearing Stress τ_y .

分布を示す。これはポアソン比=0.25の例であって、図中の数字は無次元振動数を示している。無次元振動数=0の場合には解析解(26)に一致している。これは本研究による数値計算の精度の1つの検証を与える。

無次元振動数の増加に伴い、接触面全体にわたってせん断力が増加する。無次元振動数が2をこえると、ごく小さいが、内部に極大が生じている。

図の応力分布は $[0, R]$ を50等分した場合の結果であるが、この分割数は相当に小さくできる。図中の黒丸は、無次元振動数=4の場合に $[0, 0.8R]$ を4等分した、合計14分割の場合の結果であるが、その影響は小さい。しかも試算を繰り返してみると、一部の区間の分割を粗くしてもその影響は当該区間に限られており、分割の細かい区間の精度が損なわれないことがわかる。

次に図-7に無次元化せん断力 $(\tau_y R)/(\mu \Delta)$ を示す。これは前述のようにコンプライアンス関数には寄与しないので、 τ_x に比して意義は小さい。式(26)によって、無次元振動数=0のとき、 $\tau_y \equiv 0$ でなければならない。計算結果は最外縁部で少々非0値を示すがその他ではほとんど0であり良好な精度を示している。式(34)について述べたように、 τ_y の精度は理論的には不良のほずであるが、現実には相当に良いといえる。

全般的に τ_y は小さく、アприオリに $\tau_y \equiv 0$ と仮定したLucoの計算はその限りで妥当であると認め得る¹³⁾。

5. 結 論

半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンス問題のうちの水平並進モードについて、緩和された境界条件のもとで解析した。その結果は次のとおりである。

(1) 接触面の水平変位とせん断力を直接に結びつける第1種フレドホルム型積分方程式を示した。これらの未知量の関係を直接に定式化する点が既往の研究と異なっていて、利点が多い。

(2) 上の積分方程式はもっぱら半無限弾性体の解析によって導出され、円板の力学的性質を仮定しない。このため既往の方法のように対象が剛体円板に限られることはない。

(3) 強い特異性を有する積分核を、有限区間上の積分表示によって解析的に表わした。またその特異部分を分離しやはり積分表示で与えた。この結果、積分方程式は理論的扱いも数値計算も容易なものとなった。

(4) 得られた公式を剛体円板に適用し、コンプライアンス関数の計算結果が既往の方法によるものと一致することを確認して、その正しさを検証した。

(5) 本公式によると接触応力が直接に求められる。その計算は容易であり、かつ良好な精度を有していることを例証した。

謝 辞：本研究のうち数値計算の実行について、埼玉大学大学院生 宿谷 勝君の熱心な協力を得た。特に謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) Reissner, E. : Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes, Ingenieur-Archiv Band 7, pp. 381~396, 1936.
- 2) Bycroft, G.N. : Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum, Phil. Trans. Roy. Soc. London Vol. 248. A. 948. pp. 327~368, 1956.
- 3) Robertson, I.A. : Forced vertical vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite elastic solid, Proc. Camb. Phil. Soc. 62-A, pp. 547~553, 1966.
- 4) Robertson, I.A. : On a proposed determination of the shear modulus of an isotropic elastic half-space by the forced torsional oscillations of a circular disc, Appl. Sci. Res. Vol. 17, pp. 305~312, 1967.
- 5) Gladwell, G.M.L. : Forced tangential and rotatory vibration of a rigid circular disc on a semi-infinite solid, Int. J. Engng Sci. Vol. 6, pp. 591~606, 1968.
- 6) Gladwell, G.M.L. : The forced torsional vibration of an elastic stratum, Int. J. Engng Sci. Vol. 7, pp. 1011~1024, 1969.
- 7) Luco, J.E. and Westmann, R.A. : Dynamic response of circular footings, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 97, No. EM5, pp. 1381~1395, 1971.
- 8) Veletsos, A.S. and Wei, Y.T. : Lateral and rocking vibration of footings, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 97, No. SM9, pp. 1227~1248, 1971.
- 9) Iguchi, M. and Luco, J.E. : Vibration of flexible plate on viscoelastic medium, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 108, No. EM6, pp. 1103~1120, 1982.
- 10) Higashihara, H. : Explicit Green's function approach to forced vertical vibrations of circular disk on semi-infinite elastic Space, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 110, No. EM10, pp. 1510~1523, 1984.
- 11) 東原紘道：半無限弾性体上の円板の動的コンプライアンス問題、その1. 軸対称鉛直振動、日本建築学会構造系論

- 文報告集，第 349 号，pp. 50~57，昭和 60 年 3 月。
- 12) Sezawa, K. : Further studies on Rayleigh waves having some azimuthal distribution, Bull. Earthq. Res. Inst. Vol. 6, pp. 1~18, 1929.
- 13) Luco, J. E. : Impedance functions for a foundation on a layered medium, Nuclear Eng. Design Vol. 31, pp. 204~217, 1974.

(1986. 5. 23・受付)
