

境界要素法による半無限弾性体における二次元波動場の解析

BEM ANALYSIS OF THE TWO-DIMENSIONAL ELASTIC WAVE FIELD IN A HALF-SPACE

上杉 真平*・大津 政康**

By Shinpei UESUGI and Masayasu OHTSU

An alternative method for calculating the two-dimensional scattering of P, SV and SH waves by near-surface inhomogeneities is presented. As problems are classified into the elastodynamic problems in a half-space, the BEM formulation based on a fundamental solution in a half-space is usually employed. A fundamental solution of the SH wave field in a half-space is obtained with no difficulty, but the problem of the P and SV wave fields in a half-space is of complicated nature.

In the present paper, we replace an infinite stress-free surface in a half-space by a truncated boundary of finite length and propose a method to apply the fundamental solution in an infinite space to the problems in a half-space. On the basis of the indirect boundary element method formulation, the feasibility of the method presented is investigated by solving several problems of P, SV and SH wave fields.

Keywords: elastic half-space, two-dimensional analysis, indirect BEM formulation, elastic wave problems

1. はじめに

地震波入射の際の地盤および地表付近の応答を求める問題は、耐震工学上、非常に重要である。このような問題は、地中深く埋設された構造を除いて、半無限弾性体における波動の伝播問題と分類され、これまで級数解法や有限要素法などにより解析が行われてきた^{1),2),18)}。しかしながら、従来の手法には取り扱い上、多くの難点があるため、最近、これに替わるものとして境界要素法が注目されている。この手法は、境界の形状にかかわらず適用できるうえに、未知量は境界上にだけ選べばよく、また、境界上および領域内の任意点の変位、応力などの物理量をそれらの近似度とは直接には関係なく、高い精度で求めることができるので汎用性があり、とりわけ無限および半無限領域の問題に対して非常に有効である³⁾。波動問題においても多くの研究成果が発表されているが、一般には、複雑な半無限領域における基本解を用いて定式化が行われているため⁴⁾、特に面内波動場では、波の性質上その取り扱いが容易ではない⁵⁾。

本論文は、以上のようなことを踏まえて、境界要素法の半無限領域問題への適用性を明らかにし、いくつかの解析例を示したものである。以下では、まず、一重層ポテンシャルによる無限領域における波動問題の解析法の定式化(間接法)を示す。次に、これを半無限領域の問題に適用するための手法について考察し、その際、併せて無限領域における基本解を用いることによる取り扱いの簡単さについても述べ、その妥当性を検討する。最後に、この手法の適用性を確かめるためにいくつかの半無限問題を解析して、その有効性を示す。

2. 二次元波動問題と積分方程式

(1) 支配方程式と境界条件

三次元 Euclid 空間内に均質で等方な線形弾性体を考えると、その運動方程式は、直交デカルト座標系 x_1, x_2, x_3 を基準として、次のように表わされる⁶⁾。

$$(\lambda + \mu) \bar{u}_{j,jl}(x, t) + \mu \bar{u}_{l,jj}(x, t) + \rho \bar{b}_i(x, t) = \rho \bar{u}_i(x, t) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 \bar{u}_i, \bar{b}_i は変位ベクトルおよび物体力ベクトルである。また、 λ, μ は Lamé の定数を、そして ρ は密度を表わす。さらに、 $_{,j}$ は座標 x_j に関する微分、 $\ddot{}$ は時間に関する 2 階微分を意味し、下指標のローマン文字は 1, 2, 3 をとり、総和規約を適用する。この式は

* 正会員 工修 熊本工業大学副手 工学部土木工学科
(〒860 熊本市池田 4-22-1)

** 正会員 工博 熊本大学助教授 工学部土木工学科
(〒860 熊本市黒髪 2-39-1)

Navier-Cauchy の式とよばれ、変位を用いて表わした弾性波動問題の基礎方程式である。

ここで、定常状態を考えるものとする、変位 $\bar{u}_i(x, t)$ は、時間 t と無関係な場所 x だけの関数 $u_i(x)$ として表わされる。さらに、物体力はないものとし、平面ひずみ状態を仮定して、変位などの諸量が x_3 軸に関して独立であるとする、式 (1) は面内および面外の問題に分けられ次のように表わされる^{7), 8)}。

$$\text{面内: } \left(\frac{k_s^2}{k_p^2} - 1\right) u_{\alpha,\beta\beta}(x) + u_{\alpha,\beta\beta}(x) + k_s^2 u_\alpha(x) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{面外: } u_{3,\beta\beta}(x) + k_s^2 u_3(x) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $k_s = \omega / C_s$, $k_p = \omega / C_p$ は、それぞれ横波および縦波の波数であり、 C_s は横波の速度、 C_p は縦波の速度、 ω は円振動数である。また、下指標のギリシャ文字は 1, 2 をとるものとする。式 (2), (3) は、二次元波動問題の支配方程式としてそれぞれ独立に扱うことができる。

また、単位外向法線ベクトル n をもつ面に作用する表面力は、変位を用いて次のように表わされる。

$$\text{面内: } t_\alpha(x) = \lambda n_\alpha u_{\gamma,\gamma}(x) + \mu n_\beta \{u_{\alpha,\beta}(x) + u_{\beta,\alpha}(x)\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{面外: } t_3(x) = \mu n_\beta u_{3,\beta}(x) \dots\dots\dots (5)$$

いま、Fig. 1 に示すように、二次元空間に連続で滑らかな境界 S を考える。境界の内部領域を D 、その補領域を D^c とし、変位が与えられている境界を S_1 、表面力が与えられた境界を S_2 とする。ここでは、無限領域を解析の対象としているため、 S で囲まれた内側が D^c となっていることに注意されたい。

一般に、地盤のように境界が自由表面であるような場合には、 S_2 境界上で応力自由の条件が満足されなければならない。この場合の境界条件は、

$$t_i(x) = 0, \quad x \in S_2 \dots\dots\dots (6)$$

で与えられ Neumann 問題として取り扱われる。よって、以下では Neumann 問題について考える。

(2) 一重層ポテンシャルによる定式化

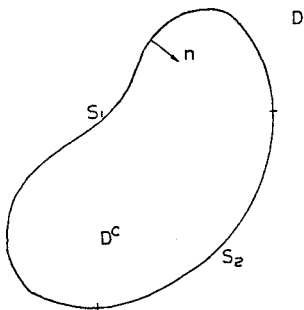


Fig. 1 Domain and its boundary.

領域 D 内において、ある境界条件のもとで場の支配方程式 (2) および (3) の解は、Green の公式により Somigliana の式として与えられる⁹⁾。これは、一重層および二重層ポテンシャル¹⁰⁾ の和の形で表わされる積分表示式であるが、数学的には、この解はどちらか一方のポテンシャルのみで表わし得ることが示されており、一般に Neumann 問題の解は一重層ポテンシャルで与えられ¹⁰⁾、次のように表現できる¹¹⁾。

$$\text{面内: } u_\alpha(x) = \int_S G_{\alpha\beta}(x, y) f_\beta(y) ds \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{面外: } u_3(x) = \int_S G_{33}(x, y) f_3(y) ds \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $f(y)$ は一重層密度または積分密度とよばれ、境界上で連続で積分可能な関数として与えられるもので、影響係数としての意味をもっている。また、 $G_{ij}(x, y)$ は式 (2), (3) の基本解であって、次式の解となるものである。

$$\text{面内: } \left(\frac{k_s^2}{k_p^2} - 1\right) u_{\alpha,\beta\beta}(x) + u_{\alpha,\beta\beta}(x) + k_s^2 u_\alpha(x) = -\delta(y-x) \delta_{\alpha\beta} \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{面外: } u_{3,\beta\beta}(x) + k_s^2 u_3(x) = -\delta(y-x) \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 $\delta(y-x)$ は Dirac のデルタ関数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

式 (7) および (8) を式 (4) と (5) に代入することによって表面力は次のように表わされる。

$$\text{面内: } t_\alpha(x) = \int_S T_{\alpha\beta}(x, y) f_\beta(y) dS \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{面外: } t_3(x) = \int_S T_{33}(x, y) f_3(y) dS \dots\dots\dots (12)$$

ただし、

$$T_{\alpha\beta}(x, y) = \mu \left\{ G_{\alpha\beta,\gamma}(x, y) n_\gamma + G_{\gamma\beta,\alpha}(x, y) n_\gamma + \frac{2\nu}{1-2\nu} G_{n\beta,n}(x, y) n_\alpha \right\}$$

$$T_{33}(x, y) = \mu G_{33,\beta\beta}(x, y) n_\beta$$

である。

(3) 基本解

式 (9) および (10) を満足する解 $G_{ij}(x, y)$ は、Sommerfeld の放射条件を満たすように定められ、無限領域においては次のように求められている¹²⁾。

$$\text{面内: } G_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{i}{4\mu} \left[H_0^{(1)}(k_s r) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{k_s^2} \{ H_0^{(1)}(k_s r) - H_0^{(1)}(k_p r) \}_{,\alpha\beta} \right] \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{面外: } G_{33}(x, y) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s r) \dots\dots\dots (14)$$

上式中、 $H_n^{(1)}$ は第一種 Hankel 関数、 r は x 点と y 点の距離である。ところで、上記の G_{ij} と T_{ij} は $O(1/r^3)$ および $O(1/r^5)$ の特異性をもっている。このため、 kr の値によっては数値計算上の誤差を生じることがある。

そこで、これを防ぐために、 $kr \leq 1.0$ の場合には式 (22) に示すような Hankel 関数の級数形に含まれる不都合な項を消去することを考える¹³⁾。

$$H_n(kr) = J_n(kr) + iN_n(kr) \dots (15)$$

$$J_n(kr) = \left(\frac{kr}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(n+m)!m!} \left(\frac{kr}{2}\right)^{2m} \dots (16)$$

$$N_n(kr) = \frac{2}{\pi} J_n(kr) \left(C + \log \frac{kr}{2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{kr}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{kr}{2}\right)^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \cdot \left(\frac{kr}{2}\right)^{2m} \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{m+n} \frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{kr}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{kr}{2}\right)^{2m} \dots (17)$$

ここに、 J_n 、 N_n は Bessel 関数および Neumann 関数であり、 C は Euler の定数である。実際には、計算の上で表われる $1/kr$ を含む項をその過程で相殺することで誤差の原因が除かれる。これによって得られる数値計算上の効果については後で述べることにする。

(4) 数値解析手法

定常状態における線形波動場の変位は、一般に次のように表わすことができる。

$$u_i(x) = u_i^o(x) + u_i^s(x) \dots (18)$$

ここに、 u_i は全体場、 u_i^o は自由場、そして u_i^s は散乱場の変位である。いま、Fig. 2 のような半無限領域において、境界 S 上で応力自由の境界条件を満足するような反射波 u_i^s を考えると、自由場は入射波 u_i^o と反射波の和として次のように得られる。

$$u_i^o(x) = u_i^a(x) + u_i^r(x) \dots (19)$$

ここで、入射波として平面波を仮定し、入射場および反射場として次のようなものを考える。

$$\text{面内： } u_a^i(x) = \phi_a^i + e_{\alpha\beta} \Psi_\beta^i \dots (20)$$

$$u_a^r(x) = \phi_a^r + e_{\alpha\beta} \Psi_\beta^r \dots (21)$$

$$\phi^i = \exp \{ i(x_1 k_p \cos b + x_2 k_p \sin b) \}$$

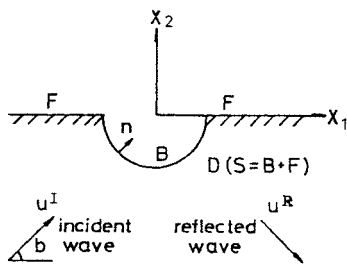


Fig. 2 A domain D with infinite stress-free boundary F and boundary B of surface irregularity in half space.

$$\Psi^i = \exp \{ i(x_1 k_s \cos b + x_2 k_s \sin b) \} \dots (22)$$

$$\phi^R = K_p \exp \{ i(x_1 k_p \cos b - x_2 k_p \sin b) \}$$

$$\Psi^R = K_s \exp \{ i(x_1 k_s \cos b - x_2 k_s \sin b) \}$$

$$\dots (23)$$

$$\text{面外： } u_s^i = \exp \{ i(x_1 k_s \cos b + x_2 k_s \sin b) \} \dots (24)$$

$$u_s^R = \exp \{ i(x_1 k_s \cos b - x_2 k_s \sin b) \} \dots (25)$$

ここに、 ϕ および Ψ は Lamé のポテンシャルとよばれる。これは、式 (2) および (3) に示される Navier の式を満足し、領域内のすべての点で正則であるような任意関数であって、それぞれ P 波に関する変位を表わすスカラーポテンシャル (スカラー値関数) および S 波についての変位を示すベクトルポテンシャル (ベクトル値関数) である¹⁴⁾。したがって、式 (20) および (21) のようにポテンシャルの導関数で与えられる変位を重ね合わせることによって入射場および反射場を表わすことができる。 b は入射波が x_1 軸となす角、 $e_{\alpha\beta}$ は permutation symbol であり、 K_s 、 K_p は P および S 波の反射係数である。この反射係数は、入射波に対する反射波の変位振幅の比を示すもので、自由表面での応力自由の条件を満足するように定められる。詳細については文献 14) にまとめられているので参照されたい。また、SV 波がその臨界角を超えて入射した場合、境界面 F 上を伝わる特殊な反射 P 波 (SP 波) が発生するので、この場合には次のような SP 波のポテンシャルを考える。

$$\phi^s = K_p \exp (ikx_1 + k\xi x_2) \dots (26)$$

ただし、

$$k = k_s \cos b$$

$$\xi = \sqrt{1 - \left(\frac{C_s}{C_p} \frac{1}{\cos b} \right)^2}$$

また、散乱場は、すでに述べたように一重層ポテンシャルによって式 (7) および (8) より得られる。

いま、点 x の領域内部からの境界への極限をとると、境界が滑らかであれば次の特異積分方程式が得られる。

$$\text{面内： } t_\alpha(x) = \frac{1}{2} f_\alpha(x) + \int_S T_{\alpha\beta}(x, y) f_\beta(y) dS \dots (27)$$

$$\text{面外： } t_\beta(x) = \frac{1}{2} f_\beta(x) + \int_S T_{3\beta}(x, y) f_3(y) dS \dots (28)$$

よって、式 (27) および (28) を境界条件 (6) の下で解くことによって得られる積分密度 f_i を用いると変位場が求められる。ところで、このような Fredholm 型の積分方程式を解析的に解くことは一般に困難であるので、数値解析によらねばならず、そのため式 (27) および (28) を離散化する必要がある。数値積分の精度を支配する因子としては、要素分割数と近似関数の選び方があるが、一定要素で分割しても分割を細かくすれば精度の向上が期待できることがわかっている¹⁵⁾。よって、入

射波長に対してその挙動を十分に表わし得る要素幅にとるならば、一定要素分割の場合でも満足できる精度が得られるものと考えて、以下ではすべて一定要素によって離散化し、計算を行っている。

3. 数値解析結果および考察

2.において無限領域における間接法による定式化を示したが、本解析法を半無限領域に適用する場合、その半無限境界の取り扱いが問題となる。そこで、この半無限境界を有限な長さの自由境界（以後、有限近似長さ EL として示す。）に置き替えて近似することを考え^{5),16)}、半無限境界上の積分密度 f の分布を調べることによって、その積分範囲（有限近似長さ EL ）をどの程度の長さにとれば所要の結果が得られるかについて検討した。解析例としては、半円形および三角形断面の渓谷と円形地下空洞を考え、波数 k と構造物の代表長さ a の積の形で表わされる無次元周波数 ka をパラメーターにとり、大規模な地表構造物を対象とした場合に耐震工學上有意であると思われる $ka \leq 1.0$ の範囲内で P, SV 波から成る面内波動問題と SH 波による面外波動問題について考察を行った。

(1) 面外波動問題

まず、円形地下空洞に任意の方向から SH 波が入射したときの半無限境界上の積分密度 f の分布を、Fig. 3 に示す。代表長さ a を円孔の半径とし、有限近似長さ EL を $10a$ にとって、 $ka=1.0$ および 0.5 について計算した結果を示している。積分密度 f の分布は、 ka の値と

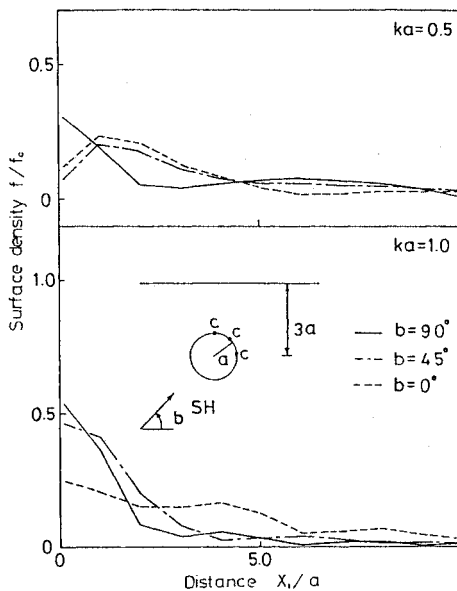


Fig. 3 Distribution of the surface density on the free boundary for different incident angles.

入射波の角度 b によって異なるが、 $ka \leq 1.0$ においては同様の傾向を示し、円孔付近で f の値は最大となり遠ざかるに従ってその値は減少してゆくことがわかる。このことから、円孔から離れるに従って、その半無限境界上の積分密度 f の値は、計算上ほとんど影響を及ぼさないことが明らかとなった。さらに、地表面上の変位振幅についても計算したが、この結果は小林⁹⁾によって得られたものとほぼ一致していることが認められた。ただし、その報告では入射波の波長を有限近似長さの決定要素としている ($EL=2$ 波長)⁹⁾。ところで、この手法によれば、波長が長い（波数が小さい）場合には近似長さも大きくとることになるので実用上不利である。一方、積分密度 f の分布から構造物の代表長さに基づいてこれを決める方法であれば合理的な長さを選択できるので、特に小さな波数領域の問題にはより有効であろう。

有限近似長さ EL の値は、おのおのの問題で要求される計算精度に応じて適切な値にとることが望ましい。これについて調べるために、半径 a の半円形断面の渓谷に SH 波が入射したときの渓谷表面上の任意点の変位を計算し、Shah¹⁷⁾ および Trifunac¹⁸⁾ らの結果と比較したものを Table 1 に示す。比較を簡単にするためにパラメーターとして $p=ka/\pi$ という無次元量を導入し、入射波の角度 $b=60^\circ$ の場合について検討している。ここで、有限近似長さ EL は、Fig. 3 の結果より $6a$ にとってある。 $ka \leq 1.0$ ($p \leq 0.32$) の範囲内ではよい一致が得られており、また、 $ka > 1.0$ の場合についても、その絶対値は解析解に近い結果が得られていることから、 $EL=6a$ という選択の妥当性が確かめられた。

このように、半無限境界を、境界積分の計算において有意であると考えられる長さで置き替えても、計算上はほとんど問題がないことがわかった。

Fig. 3 の場合の円孔に、角度 $b=45^\circ$ で波が入射したときの円孔表面の変位振幅を $ka=1.0$ の場合について計算した結果を Fig. 4 に示す。ただし、縦軸に入射波に対する円孔表面の変位振幅比、横軸には円孔天頂からの角度 C をとってある。図には、有限近似長さ EL をいくつかに変えて計算してあるが、 EL が $6a$ 以上になると、その結果はほぼ同じ値となることがわかる。Fig. 4 の場合、変位応答は波の入射側で最大となっており、ま

Table 1 Comparison of results in a semi-cylindrical cañon of radius a (oblique : angle $b=60^\circ$).

p	x/a	Trifunac			Shah et al.			Results		
		real	imag.	abs.	real	imag.	abs.	real	imag.	abs.
0.1	-1.0	1.932	0.781	2.084	1.930	0.738	2.067	1.934	0.737	2.070
	-0.5	1.836	0.462	1.893	1.844	0.435	1.895	1.874	0.445	1.887
	0.5	1.784	-0.204	1.796	1.801	-0.197	1.811	1.784	-0.184	1.794
	1.0	1.832	-0.523	1.905	1.848	-0.500	1.914	1.840	-0.477	1.901
	1.0	1.804	2.520	3.079	1.854	2.439	3.064	1.959	2.419	3.113
0.5	-1.0	0.325	1.198	1.241	0.442	1.129	1.212	0.301	1.241	1.277
	0.5	0.159	1.113	1.124	0.225	0.928	0.955	0.149	1.169	1.178
	1.0	1.328	-1.150	1.756	1.349	-1.094	1.737	1.501	-1.053	1.834

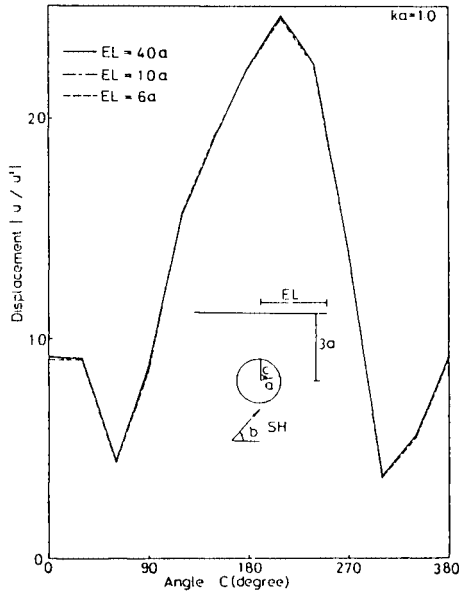


Fig. 4 A displacement amplitude at the surface of a circular cavity for oblique incident plane SH waves (oblique angle $b=45^\circ$).

た、天頂付近で分布形状に大きな変化があり、地表面の影響が現われていることがわかる。

次に、三角形断面の渓谷に任意の方向から SH 波が入射するときの渓谷表面の変位振幅を、 $ka=0.79$ ($p=0.25$) の場合について計算し、Fig. 5 に示す。図では、Sanchez-sesma¹⁹⁾、Shah¹⁷⁾らの解と比較してあるが、求められた結果は両者と非常によく一致していることがわかる。入射波の角度 $b=0^\circ$ および 45° の場合は、波が直接到達する側と影の側で大きく応答が異なり、渓谷によって波の回折が起こっていることがよくわかる。Fig. 6 には、近傍に円孔が存在する三角形断面の渓谷に、任意の方向から波が入射したときの渓谷表面の変位振幅を計算し、やはり Shah らの結果¹⁷⁾と比較して示してある。Fig. 6 a) は、円孔と反対側から波が入射した場合であるが、Fig. 5 に示した円孔のないものと比べてみて、円孔での散乱がかなり影響していることがわかる。特に、水平方向からの入射に対しては渓谷底部付近の変位応答の状態が大きく異なり、円孔上方でその値が最小となっている。しかし、Fig. 6 b) に示すように円孔から波が入射した場合には、円孔に近い側の渓谷表面の応答に円孔の影響はあまり出ていないことが、Fig. 5 の円孔のないものと比較することでわかる (Fig. 5 は対称問題であることから、Fig. 6 の $b=135^\circ$ 、 180° の場合は、Fig. 5 の $b=45^\circ$ 、 0° に対応していることに注意されたい)。これは、渓谷付近で波の回折が起こる際に、円孔での散乱の影響が及んでいないためと思われる。

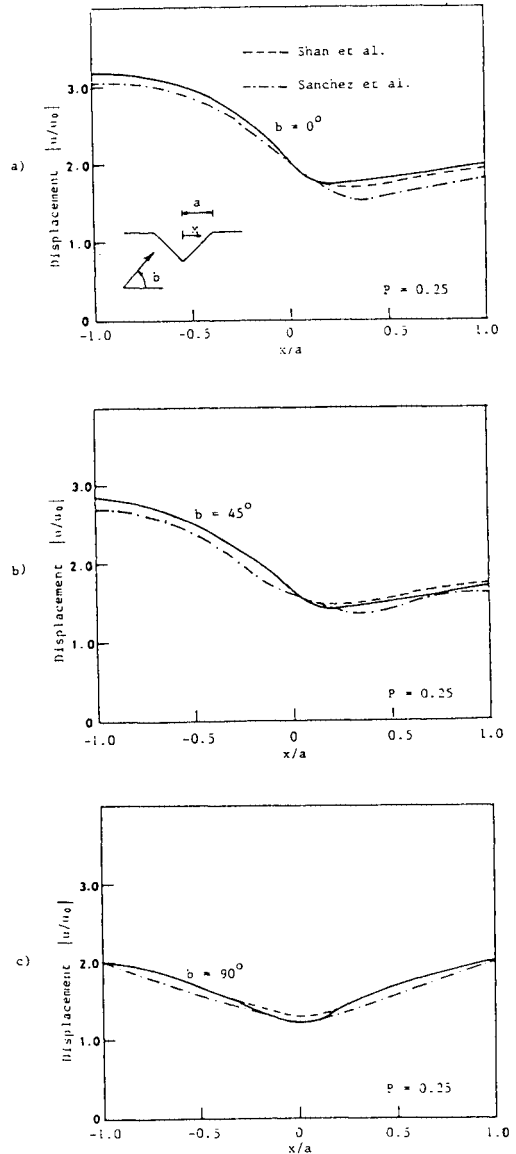


Fig. 5 Displacement amplitudes at the surface of a triangular canyon; a) the case of the slope of a canyon $=45^\circ$ and the oblique angle $b=0^\circ$; b) the case of the oblique angle $b=45^\circ$ and c) the case of the oblique angle $b=90^\circ$.

(2) 面内波動問題

Fig. 7 は、半径 a の円形地下空洞に、真下より P 波が入射したときの半無限境界上の積分密度分布を表わしている。有限近似長さ EL を構造物の代表長さ a (ここでは半径をとる) の 40 倍にとり、 $ka=1.0$ 、 0.5 、 0.1 の場合について計算し、円孔上 C 点の値 f_c との比をとって示してある。 $ka \leq 1.0$ の範囲内では、円孔から離れるに従って値は小さくなっており、計算結果に及ばず影

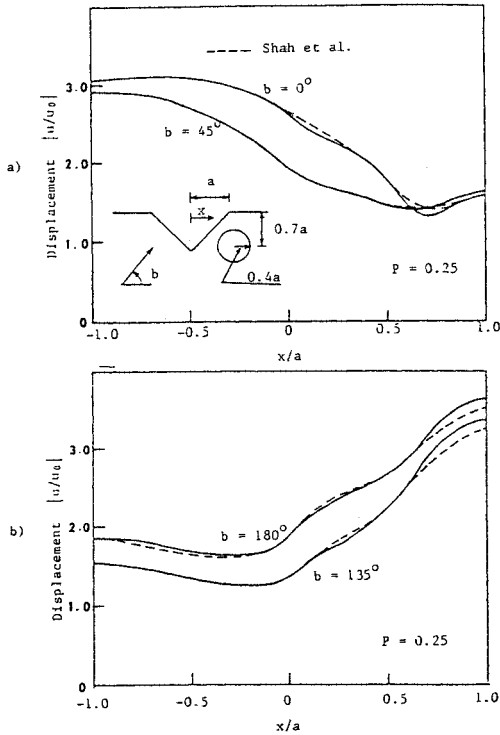


Fig. 6 Displacement amplitudes at the surface of a triangular canyon with a cavity ; a) the case of oblique angle $b = 0^\circ$ and 45° and b) the case of oblique angle $b = 135^\circ$ and 180° . The slope of a canyon is 45° and the radius of a cavity is $0.4a$.

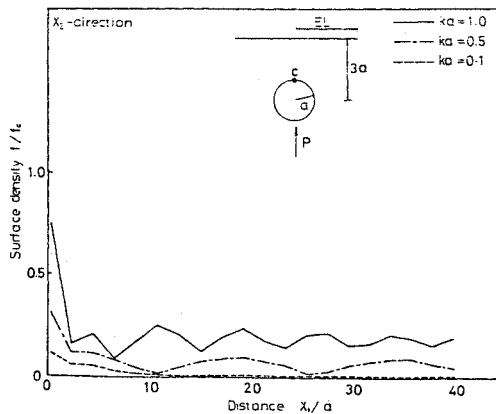


Fig. 7 Distribution of the surface density on the free boundary for normal incident plane P waves (the effective length $EL = 40a$).

響が小さくなっていることがわかる。この場合の円孔表面の変位振幅 (x_2 方向) を Fig. 8 に示す。 $ka = 0.5$ について、 Fig. 7 の結果より有限近似長さ EL を $10a$ にとり、 $EL = 40a$ のものと比較している。また、参考の

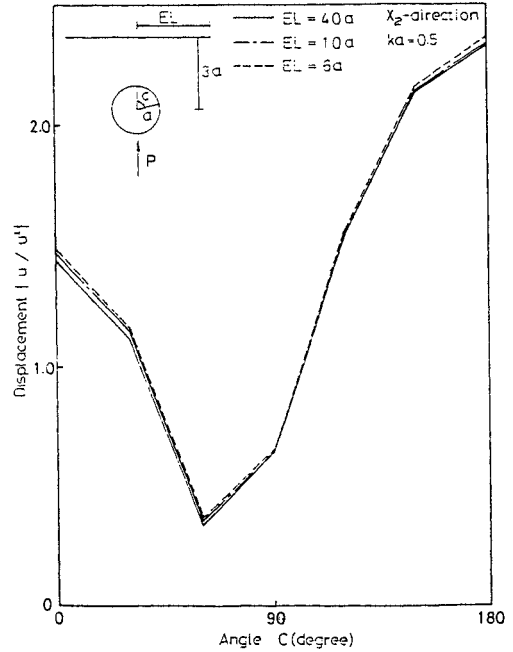


Fig. 8 A displacement amplitude at the surface of a circular cavity for normal incident plane P waves.

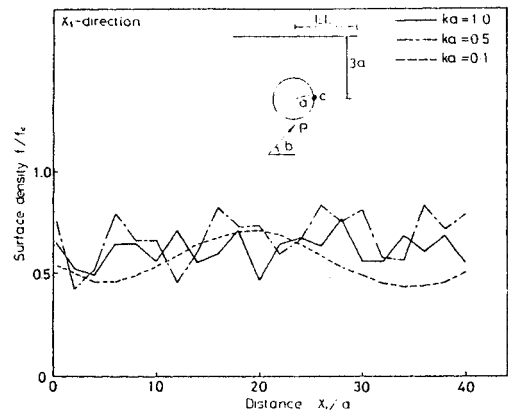


Fig. 9 Distribution of the surface density on the free boundary for obliquely incident plane P waves (incident angle $b = 50^\circ$).

ために、 EL を $6a$ にとった場合についても計算してある。側壁付近で地表面の影響のために多少変動がみられるが、 EL が $10a$ 以上になるとほとんど一致していることがわかる。

Fig. 9 には、 P 波が角度 $b = 50^\circ$ で斜めから入射した場合の半無限境界上の積分密度 f の分布を示す。これも同様に、円孔上の値 f_0 との比をとって表わしている。波数が小さい場合には散乱の影響も小さく、積分密度の分布も比較的滑らかであるが、波数が大きくなるほど円

孔以遠の積分密度の影響が残存することがわかる。このときの円孔表面の変位振幅を $ka=0.5$ について計算し、Fig. 10 に示す。 $EL=40a$ のときと $10a$ および $6a$ にとって計算した場合の変位分布の差異が大きく、とりわけ、波の入射側と地表面に近い天頂部で顕著である。いずれにしても、波が斜めから入射した場合には、真下からの入射に比べてはるかに長い近似長さをとる必要があることがわかる。この近似長さ EL の決定は重要な問題であるが、現状では精度との関係が明らかではなく、ここでの解析例では、 $EL=40a$ にとっても収束した解

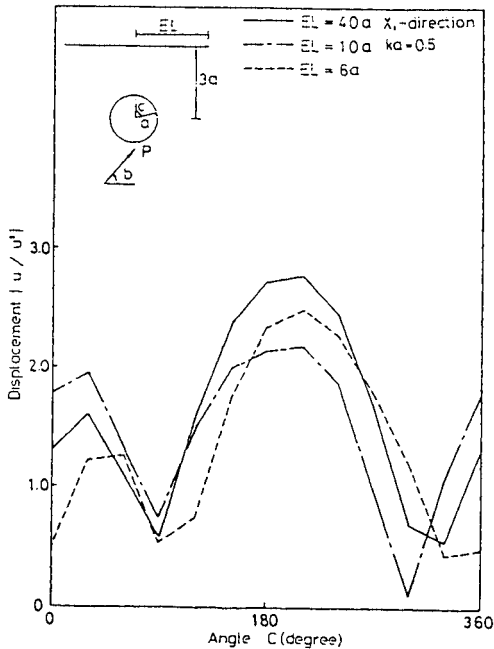


Fig. 10 A displacement amplitude at the surface of a circular cavity for obliquely incident plane P waves (oblique angle $b=50^\circ$).

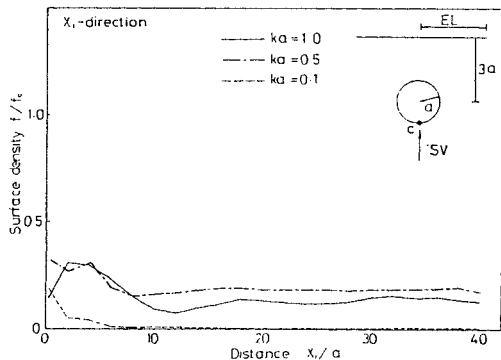


Fig. 11 Distribution of the surface density on the free boundary for normal incident plane SV waves (the effective length $EL=40a$).

は得られていないことを示唆するとどめておく。

次に、SV波が入射した場合の応答について計算した結果を検討する。Fig. 11は、真下から波が入射した場合の半無限境界上の積分密度 f の分布を円孔上C点の値 f_c との比で表わしたものである。 $ka=0.1$ の場合は、P波のときと同様に円孔から遠ざかるに従って値は減少しており、 $EL=10a$ 程度で切って支障ないと思われる。しかし、 $ka=0.5$ および 1.0 においては、円孔からかなり離れても値が変化せず、減少がみられない。ただし、その値は円孔上の値の30%程度であり、計算に及ぼす影響は小さいものと考えてよいかもしれない。この場合の円孔上の応答変位振幅を $ka=0.5$ について計算し、Fig. 12に示す。有限近似長さ EL は、 $6a$ 、 $10a$ および $40a$ にとって計算してある。地表面の影響が大きい天頂付近や波の入射側で差異が大きくなっているようであるが、 EL が $10a$ 程度以上になるとほぼ満足できる結果が得られているようである。P波の鉛直入射に比べると半無限への近似度は劣るが、進行方向と変位成分が直交しているというSV波の特性を考えればやむを得ない結果とも考えられる。

Fig. 13および14には、SV波が斜めから入射した場合の計算結果を示す。まず、Fig. 13の半無限境界上の積分密度 f の分布をみると、鉛直入射に比べて全体的に大きな値を示しており、有限な長さで近似すると大きな影響が残存することが予想される。このときの円孔表

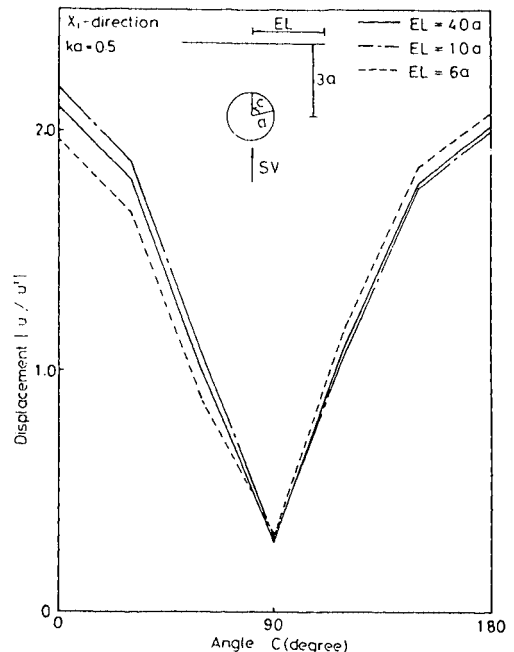


Fig. 12 A displacement amplitude at the surface of a circular cavity for normal plane SV waves.

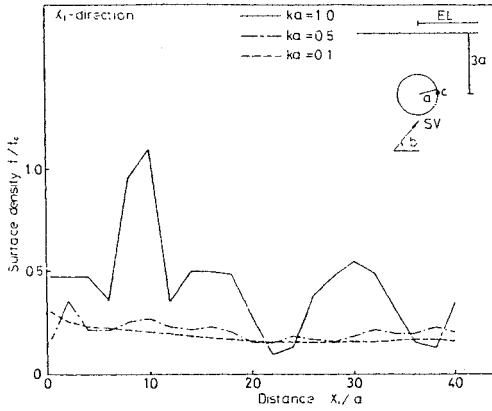


Fig. 13 Distribution of the surface density on the free boundary for obliquely incident plane SV waves (oblique angle $b=50^\circ$).

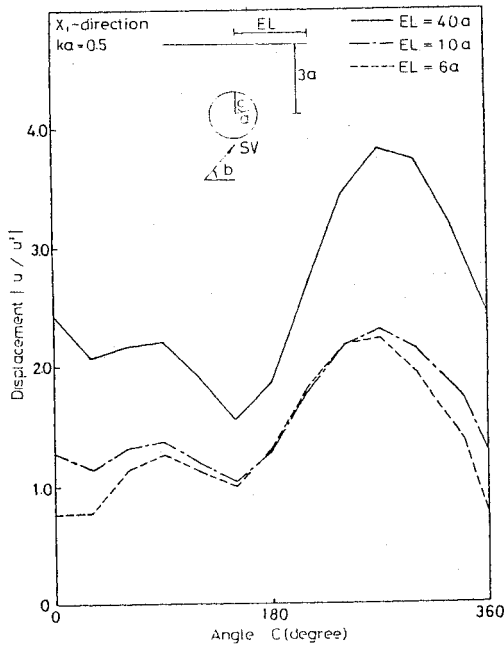


Fig. 14 A displacement amplitude at the surface of a circular cavity for obliquely incident plane SV waves (oblique angle $b=50^\circ$).

面の応答を調べてみると (Fig. 14), 有限近似長さ EL を変えた際の計算結果の収束性が, P波の斜め入射時に比べてよくないことがわかる。この計算例の場合, Fig. 12の鉛直入射 (臨界角以内) の場合と比較して, かなり収束が悪くなっているが, これは, SV波がその臨界角 (54.7°) を越えて入射するために, 地表面に沿って伝播する特殊な反射P波 (SP波) が発生しており, これが円孔から離れた地点にまで地表に沿って伝わり, 計算結果に影響を及ぼしたと思われる。

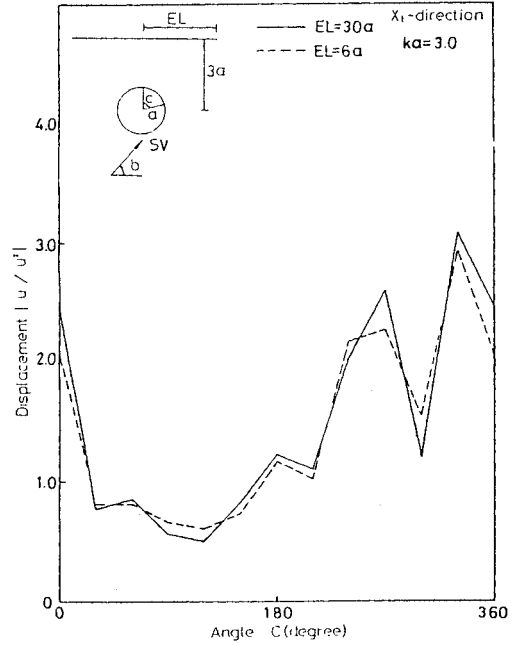


Fig. 15 A displacement amplitude at the surface of a circular cavity for obliquely incident plane SV waves (oblique angle $b=50^\circ$).

Table 2 Comparison of results in a circular cavity for obliquely incident plane waves (oblique angle $b=50^\circ$, effective length $EL=6a$).

C (deg.)	case 1		case 2	
	P-wave	SV-wave	P-wave	SV-wave
0	0.15446	0.29121	0.15446	0.29121
90	0.17279	0.48209	0.17278	0.48211
180	0.75431	0.49701	0.75431	0.49701
270	0.57581	0.85399	0.57581	0.85404

以上, $ka \leq 1.0$ の場合について述べてきたが, 参考のために $ka > 1.0$ についても検討してみた。Fig. 15は, SV波が斜めから入射波の角度 $b=50^\circ$ で入射した際の円孔上の変位振幅を $ka=3.0$ について計算したものである。 $ka \leq 1.0$ のときに比べて波長が短く, このため近似の影響が小さくなり, よい結果が得られている。

最後に, $kr \leq 1.0$ において生じる見掛け上の計算誤差について述べる。SV波に対して, $ka=0.5$ のときの円孔上の変位振幅を計算した結果を Table 2 に示すが, 2.(3)で示したような誤差防止策を講じた場合 (case 1) とそうでない場合 (case 2) とでほとんど差がみられず, 斜めからの入射に対してはあまりよい結果が得られなかった。

4. 結 論

本論文は, 半無限領域の問題に境界要素法を適用する

手法について述べたものである。ここでは、面外および面内波動問題を一重層ポテンシャル（間接法）によって定式化し、次いで、これを半無限領域の問題に適用するための手法について考察した後に、いくつかの計算例により、その妥当性を検討した。ここで得られた結果の主なものをまとめれば、以下ようになる。

(1) 無限の広がりをもつ半無限境界を、有限な長さで近似することによって、無限領域における境界要素法の定式化を半無限領域の問題に適用できることが明らかになった。この手法によれば、基本解として無限領域のものを用いるので取り扱いが簡単となる。

(2) 半無限境界を近似する有限近似長さは、対象とする構造物の幾何形状に応じて決まる代表長さに基づいて、所要の精度が得られるように半無限境界上の積分密度の分布から決めることができる。

(3) SH波による面外波動問題については、いずれの場合においても他の解法による結果とよく一致しており、半無限境界を近似する有限近似長さは構造物の代表長さの6倍程度で十分な精度が得られている。

(4) P, SV波の面内波動問題においては、鉛直入射に関する限り、 $ka \leq 1.0$ の範囲内では有限近似長さを構造物の代表長さの10倍程度にとることで、所要の精度が満足される。一方、波が斜めから入射する場合、とりわけ、SV波がその臨界角を越えて入射するときは有限近似長さのとり方による計算結果の差異が大きくなり、この手法の適用にはさらに工夫が必要である。しかし、半無限境界上の積分密度の分布から積分範囲の大まかな見当をつけることは可能であろう。なお、 ka の値が大ききときには斜め入射に対しても適用が可能であると思われる。

(5) 数値計算上、 $kr \leq 1.0$ の場合に予想される計算誤差を防ぐ対策として、原点近傍に特異性をもつHankel関数の級数形に含まれる誤差の原因となる項を相殺することを考えた。しかしながら、これによって得られる効果よりも斜めに波が入射することに起因する境界の有限性の影響の方が卓越しており、結果的には精度の改善はみられないようである。

以上のように、本法では無限領域における基本解を用いているので取り扱いやすくなっており、また、無限の広がりをもつ半無限境界を所要の計算精度に応じて適当な有限長さで近似して、その積分範囲を決定しているのが特徴である。ここでは、構造物の代表長さに基づいて有限近似長さを定めたが、積分密度の分布からその積分範囲を決定する本法のやり方は、入射波の波長にも関係していることになるので、妥当な手法と考えられる。

参 考 文 献

1) for example, Lysmer, J. and Waas, G. : Shear waves in

- plane infinite structures, J. Eng. Mech. Div. ASCE, pp. 85~105, 1972.
- 2) for example, Varadan, D.J.N. Wall, Tsao, S.J. and Varadan, V.K. : Elastic wave scattering from surface breaking cylindrical cracks : SH waves J. Acoust. Soc. Am., Vol. 71, No. 6, pp. 1384~1390, 1982.
- 3) 小林昭一：積分方程式法（境界要素法）の発展，土木学会論文集，No. 350/I-2, pp. 9~22, 1984.
- 4) for example, Dravinski, M. : Ground motion amplification due to elastic inclusions in a half-space, Earthq. Eng. Struc. Dyn., Vol. 11, pp. 313~335, 1983.
- 5) Kobayashi, S. : Some problems of the boundary integral equation method in elastodynamics, Proc. 5th. Int. Conf. BEM in Eng., pp. 775~784, 1983.
- 6) Y.C. ファン（大橋義夫ほか訳）：固体の力学／理論，7章，培風館，1970.
- 7) 丹羽義次・小林昭一・福井卓雄・東 憲昭：積分方程式法による埋設物周辺の過渡応力の解析，土木学会論文報告集，No. 248, pp. 41~53, 1976.
- 8) 丹羽義次・廣瀬壮一：傾斜層を有する地盤における理論的地震動解析，土木学会論文報告集，No. 337, pp. 57~66, 1983.
- 9) コシリヤコフ・グリニエル・スミルノフ（藤田 宏ほか訳）：物理・工学における偏微分方程式，25章，岩波書店，1974.
- 10) スミルノフ（福原満洲雄ほか訳）：高等数学教程，4巻，4章，共立出版，1961.
- 11) for example, Nishimura, N. and Kobayashi, S. : Elastoplastic analysis by indirect methods, Development in Boundary Element Method-3, Elsevier Appl. Sci. Pub., Ch. 3, 1984.
- 12) 丹羽義次・小林昭一・北原道弘：弾性固有値問題の積分方程式による解法，土木学会論文報告集，No. 285, pp. 17~28, 1979.
- 13) 中川克也・北原道弘：3次元非定常弾性波動問題の解析，境界要素法論文集，2巻，pp. 119~124，境界要素法研究会，1985.
- 14) Eringen, A.C. and Suhubi, E.S. : Elastodynamics Vol. II, Academic Press, Ch. 7, 1975.
- 15) 小林昭一・西村直志：積分方程式法の解析精度の向上に関する考察，土木学会論文報告集，No. 291, pp. 15~26, 1979.
- 16) Ohtsu, M. and Uesugi, S. : Analysis of elastic wave field in a half-space and some applications to earthquake engineering, 6th. Int. Conf. BEM in Eng., 1984.
- 17) Shah, A.H., Wong, K.C. and Datta, S.K. : Diffraction of plane SH waves in a half-space, Earthq. Eng. Struc. Dyn., Vol. 10, pp. 519~528, 1982.
- 18) Trifunac, M.D. : Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical canyon, Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 1, pp. 267~281, 1973.
- 19) Sanchez-sesma, F.J. and Rousenblueth, E. : Ground motion at canyons of arbitrary shape under incident SH waves, Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 7, pp. 441~450, 1979.