

伝達マトリックス法における中間格点条件の効率的処理

EFFECTIVE PROCEDURE FOR INTERMEDIATE CONDITIONS
IN TRANSFER MATRIX METHOD

白木恒雄*・中村秀治**

By Tsuneo USUKI and Hideharu NAKAMURA

Fundamentals on transfer matrix method were established during 1950's, and problems on round-off errors have already been pointed out. Although the solution method is of little interest from a viewpoint of practical application, it is recognized that transfer matrix method provides exact solution for ordinary differential equations based on various theories of structural members and the improvement of intermediate condition procedure is an important subject.

In this paper, an intermediate condition procedure in ordinary and modified transfer matrix method, which one of the authors studied previously, is investigated. Effectiveness of the procedure is confirmed by numerical results on statically indeterminate beam, multi-cell box girder and grillage girder bridge.

Keywords: transfer matrix method

1. ま え が き

線形常微分方程式の一般解に基づく伝達マトリックス法の基礎は、すでに1950年代に確立され、現在では数値計算上の種々の問題点の指摘も出つくした感がある。その中で最も重要な問題点は桁落ちによる精度低下であり、長大橋および板殻構造物への適用時に顕著に発生する^{1)~3)}。著者の一人も、この問題に対する検討を行い、1つの対策として修正伝達マトリックス法を提案した⁴⁾。

一方、最近の構造解析法の現状は、超大型高速電子計算機の発達を背景として、最小ポテンシャルエネルギー原理に基づく変位法が主流である。NASTRAN, MARC, ADINAをはじめとして、多数の汎用構造解析プログラムも世界的に利用されており、原子力発電所、海洋構造物など種々の大型構造物の建設にあたって、数千、数万自由度の静的、動的解析が行われるようになってきている。さらに、計算時間を短縮するために、計算機のパイプライン化、並列処理化の検討も強力に推進されている。

このような状況下において、伝達マトリックス法の構造力学における位置付けを考えるならば、必然的に、「小型の計算機でも扱える、線形常微分方程式の厳密解を求める一手法」ということになるであろう。周知のごとく、有限要素法では構造系を要素に分割し、要素内において未知関数を多項式で近似する。したがって、解析領域全体として、最も正解に近い区分多項式近似解を求めることに相当するが、伝達マトリックス法においては構造系の近似も関数系の多項式近似も行わない。伝達マトリックス法で得られる解は、線形常微分方程式の同次解における指数関数の近似が十分で、しかも、荷重項の算定が厳密であるならば、厳密解である。

以上の観点より伝達マトリックス法の発展を考えるならば、中間格点条件を効率的に処理することがきわめて重要である。不静定はりを例にとれば、その中間部に支承があるならば、せん断力が不連続になり、ヒンジがあるならば、はりの勾配が不連続になる。したがって、中間格点における未知量の置き換えなど、伝達マトリックス法特有の技巧が施されるが、高次不静定構造物を解析する場合、このような技巧は伝達マトリックス法をきわめて難解なものとする。少なくとも、種々の問題を解く際に、プログラムは変更せず、入力データの変更のみで対処できるアルゴリズムが必要である。

* 正会員 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科
(〒278 千葉県野田市山崎 2641)

** 正会員 工博 (財)電力中央研究所 主任研究員
(〒270-11 千葉県我孫子市我孫子 1646)

本論文は、そのような問題意識の上に立ち、通常の伝達マトリックス法と修正伝達マトリックス法において、中間格点条件を効率的に処理するための一方法を検討したものである。その概要は、構造系の中間格点で発生する全未知量を一端より他端まで伝達させることにより、単純なマトリックスの積の計算と連立方程式のサブプログラムのみで解を得るものである。その有用性を容易に理解してもらうべく、簡単な不静定はりの例題にも重点を置き記述した。

2. 理論式の誘導

(1) 通常の伝達マトリックス法

はり、ラーメン、板殻などの構造物において、長手の方向に x 軸をとり、その原点に最も近い端部と最も遠い端部を、それぞれ始端、終端とよぶことにする。構造物のある位置を x 座標で特定すると、その位置でいくつかの物理量が定義できる。曲げを受けるはりの問題では、たわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力などがその物理量である。伝達マトリックス法では、これらの成分を「状態量」とよび、縦に並べて「状態量ベクトル」として扱う⁵⁾。

ある構造物の始端において、常に状態量の総数の半分は未知量であり、残りの半分に対しては既知条件を付与し得る。始端の状態量のうち未知量をまとめたものを「始端未知状態量ベクトル」とよぶ。

構造物の始端および終端を除いた中間部に発生する未知量のすべてをまとめて「中間未知跳躍量ベクトル」とし、次のごとく定義する。ただし、 m は中間未知量の総数である。

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

このベクトルの最後の項 1 は、外荷重を取り込むためのダミーとして設けてある。中間未知跳躍量のそれぞれに対応して中間既知条件を付与し得るから、未知量の決定が可能となる。

始端の全状態量のベクトルの下に式 (1) の中間未知跳躍量ベクトルを組み込んで、それを「拡大始端状態量ベクトル」とよぶ。次に、始端の未知状態量のベクトルの下に中間未知状態量ベクトルを組み込んで、それを「拡大初期ベクトル」とよぶことにする。この拡大初期ベクトルより拡大始端状態量ベクトルへの変換を行うものを作り、それを「始端境界マトリックス」とよぶことにする。この始端境界マトリックスに、順次、状態量の伝達のためのマトリックス、すなわち格間伝達マトリックス

および格点伝達マトリックスを掛けて構造系の終端まで伝達計算をする。終端部まで伝達されたマトリックスに終端の境界条件を付与すべく、「終端境界マトリックス」を掛ける。得られたマトリックスは、始端および中間の未知量に関する連立方程式の係数マトリックスとなる。これを解いて、すでに用いた伝達式に代入し直すと、すべての状態量が求まる。

この解法の詳細は後述のはりの例題で示す。

(2) 修正伝達マトリックス法

状態量の総数は常に偶数であるから、それらを $2n$ 個と表わすならば、状態量ベクトル Z は任意の n 個ずつの要素をもつ 2 つのベクトル y, z に分割して考えることができる。すなわち、次式のごとく置く。

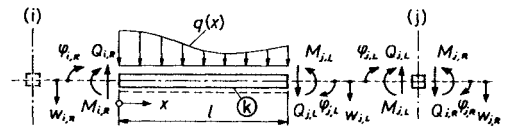
$$Z = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

構造系の力学的挙動を支配する連立 1 階常微分方程式は、一般に、次のごとく表わせる。

$$\frac{dZ}{dx} = AZ + q(x) \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 A は系の幾何学的諸量のみに関する $2n \times 2n$ の正方マトリックスであり、 $q(x)$ は荷重項である。

いま、図一に示すごとく格点 (i) と格点 (j) の間に存在するはり要素、「格間①」を考える。



図一 格点 (i), (j) と格間①

この微分方程式 (3) を解いて、格点 (i) の右側の点 (i, R) の状態量より格点 (j) の左側の点 (j, L) の状態量を与える伝達関係式

$$Z_{j,L} = FZ_{i,R} + b \dots\dots\dots (4)$$

が求まる。ただし、格間伝達マトリックス F および伝達される荷重のベクトル b はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F &= e^{At} \\ b &= e^{At} \int_0^t e^{-As} q(x_i + s) ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5 \cdot a, b)$$

式中の x_i は格点 (i) の x 座標の値である。

中間未知量の項を伝達関係式に取り込むため、ここでベクトル b を拡大したマトリックス B を

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & b \end{bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

と定義する。ただし、 0 は $2n \times m$ の零マトリックスである。ゆえに B の寸法は $2n \times (m+1)$ となる。

式(6)を用いて式(4)を書き直すと、次式を得る。

$$\mathbf{Z}_{j,L} = \mathbf{F}\mathbf{Z}_{i,R} + \mathbf{B}\mathbf{x} \dots\dots\dots (7)$$

各格点ごとに存在する状態量の関係式を構造系の始端より終端に順次、伝達してゆくことを考える。これを、以後「順進演算」とよぶ。この演算の途中で、たとえば、点*(i, R)*および*(j, L)*では、それぞれ次の関係式が存在する。

$$\left. \begin{aligned} \vec{\alpha}_{i,R} \mathbf{y}_{i,R} + \vec{\beta}_{i,R} \mathbf{z}_{i,R} + \vec{\gamma}_{i,R} \mathbf{x} = 0 \\ \vec{\alpha}_{j,L} \mathbf{y}_{j,L} + \vec{\beta}_{j,L} \mathbf{z}_{j,L} + \vec{\gamma}_{j,L} \mathbf{x} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8\cdot a, b)$$

ただし、マトリックス $\vec{\alpha}$ および $\vec{\beta}$ は構造系の幾何学的諸量のみで与えられる $n \times n$ の正方マトリックスであり、マトリックス $\vec{\gamma}$ は中間格点の状況および荷重作用の仕方により定まる $n \times (m+1)$ の一般には正方でないマトリックスである。これらのマトリックス $\vec{\alpha}$ 、 $\vec{\beta}$ 、 $\vec{\gamma}$ は、最初、構造系の境界においてのみ既知であるから、他の格点における値は順次伝達計算により求めることとなる。

まず第一に、マトリックス $\vec{\alpha}$ および $\vec{\beta}$ の伝達関係式を定める。これらは構造系の幾何学的諸量のみで決まるから、格間に荷重の存在しない場合の条件式より求まる。すなわち、式(8)において、マトリックス $\vec{\gamma}_{i,R}$ と $\vec{\gamma}_{j,L}$ が等しいと置けば、次式となる。

$$\vec{\alpha}_{i,R} \mathbf{y}_{i,R} + \vec{\beta}_{i,R} \mathbf{z}_{i,R} = \vec{\alpha}_{j,L} \mathbf{y}_{j,L} + \vec{\beta}_{j,L} \mathbf{z}_{j,L} \dots\dots\dots (9)$$

これに、式(4)において荷重項を零と置いた式を代入するならば、結局、次の伝達関係式を得る。

$$[\vec{\alpha}_{j,L} | \vec{\beta}_{j,L}] = [\vec{\alpha}_{i,R} | \vec{\beta}_{i,R}] \cdot \mathbf{F}^{-1} \dots\dots\dots (10)$$

第二に、マトリックス $\vec{\gamma}$ の伝達関係式を定める。式(7)の両辺に $[\alpha_{i,R} | \beta_{i,R}] \mathbf{F}^{-1}$ を前から掛けて、式(10)、(8)を代入し整理するならば、次の伝達関係式を得る。

$$\vec{\gamma}_{j,L} = \vec{\gamma}_{i,R} + [\vec{\alpha}_{i,R} | \vec{\beta}_{i,R}] \cdot (-\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}) \dots\dots\dots (11)$$

全く同様にして、状態量の関係式を構造系の終端より始端に向かって伝達してゆく。これを、以後「逆進演算」とよぶ。たとえば、この演算途中の点*(i, R)*および*(j, L)*において、それぞれ次の関係式が存在する。

$$\left. \begin{aligned} \vec{\alpha}_{j,L} \mathbf{y}_{j,L} + \vec{\beta}_{j,L} \mathbf{z}_{j,L} + \vec{\gamma}_{j,L} \mathbf{x} = 0 \\ \vec{\alpha}_{i,R} \mathbf{y}_{i,R} + \vec{\beta}_{i,R} \mathbf{z}_{i,R} + \vec{\gamma}_{i,R} \mathbf{x} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12\cdot a, b)$$

そして、マトリックス $\vec{\alpha}$ 、 $\vec{\beta}$ 、 $\vec{\gamma}$ の伝達関係式は、前に述べたと同じ方法を用いて次のごとく与えられる。

$$\left. \begin{aligned} [\vec{\alpha}_{i,R} | \vec{\beta}_{i,R}] = [\vec{\alpha}_{j,L} | \vec{\beta}_{j,L}] \cdot \mathbf{F} \\ \vec{\gamma}_{i,R} = \vec{\gamma}_{j,L} + [\vec{\alpha}_{j,L} | \vec{\beta}_{j,L}] \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13\cdot a, b)$$

格点*(j)*の左側の点*(j, L)*の状態量より右側の点*(j, R)*の状態量を与える伝達関係式は、図-1および式(4)を参考にして

$$\mathbf{Z}_{j,R} = \mathbf{P}\mathbf{Z}_{j,L} + \mathbf{c} \dots\dots\dots (14)$$

と表現できる。ただし、 \mathbf{P} は格点伝達マトリックス、 \mathbf{c} はその格点に発生する既知跳躍変位量または荷重に関するベクトルである。格間伝達の場合と同様に、ベクトル

\mathbf{c} を拡大したマトリックス \mathbf{C} を式(6)のごとく定義して上式を書き直すと、次式となる。

$$\mathbf{Z}_{j,R} = \mathbf{P}\mathbf{Z}_{j,L} + \mathbf{C}\mathbf{x} \dots\dots\dots (15)$$

ただし、マトリックス \mathbf{C} はベクトル \mathbf{c} を除いた部分すべてが式(6)のごとく零要素になるとは限らない。たとえば、中間格点に未知跳躍量が発生するならば、対応する状態量の行および未知跳躍量の順番より決まる列に順進演算なら要素-1、逆進演算なら要素+1がはいる。

格間伝達の場合と同様に、 α 、 β 、 γ の伝達関係式を求めると、 \mathbf{F} を \mathbf{P} に \mathbf{B} を \mathbf{C} に直すならば、式(10)、(11)、(13)とまったく同じかたちに表現される。

これらのマトリックス方程式(10)、(11)、(13)をFalkによって提案された図式⁶⁾を用いて表わすと図-2のごとくなる。ただし、 \mathbf{I} は単位マトリックス、 $\mathbf{0}$ は寸法 $(m+1) \times 2n$ の零マトリックスである。この図-2

(b)の逆進演算において、格間伝達マトリックス \mathbf{F} を含む大きなマトリックスを「拡大格間伝達マトリックス」、格点伝達マトリックス \mathbf{P} を含む大きなマトリックスを「拡大格点伝達マトリックス」とよぶことにする。また、順進演算および逆進演算におけるマトリックス $[\alpha | \beta | \gamma]$ のことを、それぞれ「順進伝達係数マトリックス」および「逆進伝達係数マトリックス」とよぶ。

式(8)または(12)において、マトリックス α 、 β のノルムがある基準値を超えて大きくなるような場合は、文献4)に示したごとく、 α および β のうちノルムの大きくかつ正則なマトリックスを選び、その逆マトリックスを式(8)または(12)に前から掛けてやればよい。そして、掛けられたマトリックスをあらためて新しい α 、 β 、 γ と置くことができる。こうして、 α および β のノルムを常にある一定の大きさ以下に制御しておく。

以上より、全格点の左右において、状態量の数と同数の関係式が得られる。たとえば、点*(i, R)*では、式(8·a)

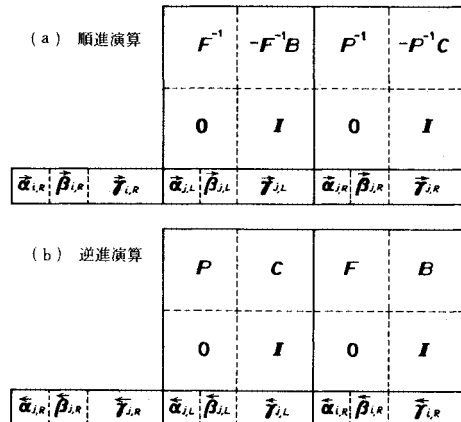


図-2 α 、 β 、 γ の伝達関係

および (12・b) を用いて次の $2n$ 本の式を得る。

$$\begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{i,R} & \vec{\beta}_{i,R} \\ \vec{\alpha}_{i,R} & \vec{\beta}_{i,R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i,R} \\ z_{i,R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\gamma}_{i,R} \\ \vec{\gamma}_{i,R} \end{bmatrix} \cdot x = 0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

このマトリックス方程式より、状態量のベクトル Z は式 (2) より次のごとく表わせる。

$$Z_{i,R} = -D_{i,R} x \quad \dots\dots\dots(17)$$

ただし、 $2n \times (m+1)$ の寸法をもつマトリックス $D_{i,R}$ は次式で与えられる。

$$D_{i,R} = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_{i,R} & \vec{\beta}_{i,R} \\ \vec{\alpha}_{i,R} & \vec{\beta}_{i,R} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\gamma}_{i,R} \\ \vec{\gamma}_{i,R} \end{bmatrix} \cdot x \quad \dots\dots\dots(18)$$

もしも、点 (i, R) において未知跳躍量が発生するなら、それに対応するある状態量は既知量として設定できる。ゆえに、 $2n$ 本の式 (17) の中から未知跳躍量の発生数と同じ数の中間未知量のみに関する条件式が得られる。この作業をすべての中間格点で行い、最終的に中間未知量に関する m 元連立方程式を得る。これを解いて式 (17) に代入し、点 (i, R) の状態量は決定される。他のすべての点の状態量もこれと同様に求められる。

3. 不静定はりの解析

任意の基準定数 P_0, I_0, l_0 を選び、はりのたわみ w ,

たわみ角 φ , 曲げモーメント M , せん断力 Q を無次元化して、それぞれ w^*, φ^*, M^*, Q^* とおく。無次元化による状態量の対応関係を次式で定義する。

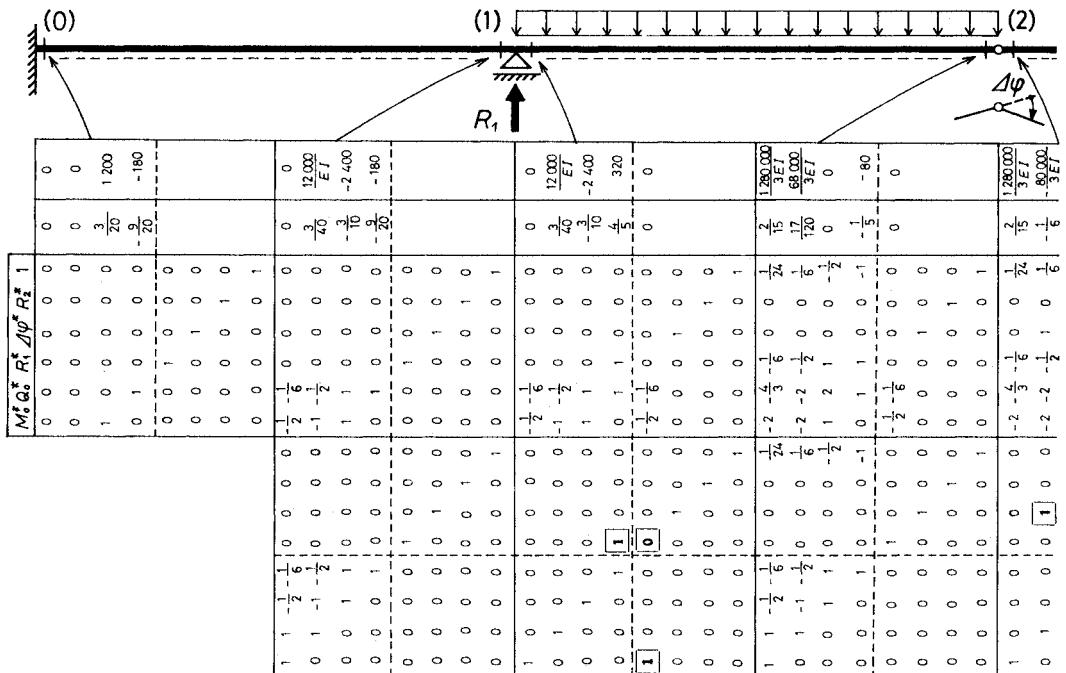
$$\left. \begin{aligned} w^* &= w \frac{EI_0}{P_0 l_0^3}, \quad \varphi^* = \varphi \frac{EI_0}{P_0 l_0^2} \\ M^* &= M \frac{1}{P_0 l_0}, \quad Q^* = Q \frac{1}{P_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

これから、通常の伝達マトリックス法における格間長 l の全長にわたって等分布荷重 q を受ける曲げ剛性 EI のはりの格間伝達マトリックスは次のごとく与えられる。

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{l_0} & -\frac{1}{2} \frac{l^2}{l_0^2} \frac{I_0}{I} & -\frac{1}{6} \frac{l^3}{l_0^3} \frac{I_0}{I} & \frac{1}{24} \frac{ql^4}{P_0 l_0^3} \frac{I_0}{I} \\ 0 & 1 & -\frac{l}{l_0} \frac{I_0}{I} & -\frac{1}{2} \frac{l^2}{l_0^2} \frac{I_0}{I} & \frac{1}{6} \frac{ql^3}{P_0 l_0^2} \frac{I_0}{I} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{l}{l_0} & -\frac{1}{2} \frac{ql^2}{P_0 l_0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{ql}{P_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(20)$$

この正方マトリックスの逆マトリックスは、2行目ごとおよび2列目ごとに符号を逆になおす、いわゆる「石畳変換⁷⁾」によって簡単に与えられる。

部分的に等分布荷重 $q=20 \text{ kN/m}$ を受ける曲げ剛性



図—4 通常の伝達マト

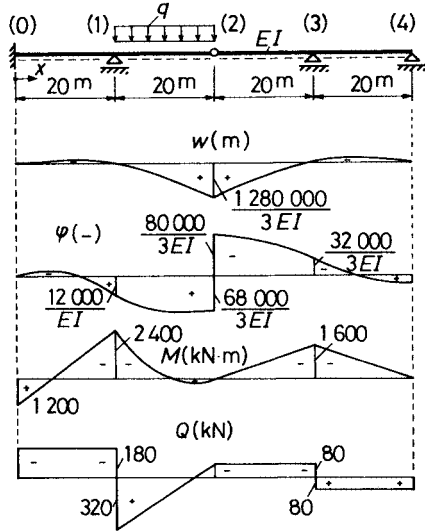


図-3 不静定はりの例題

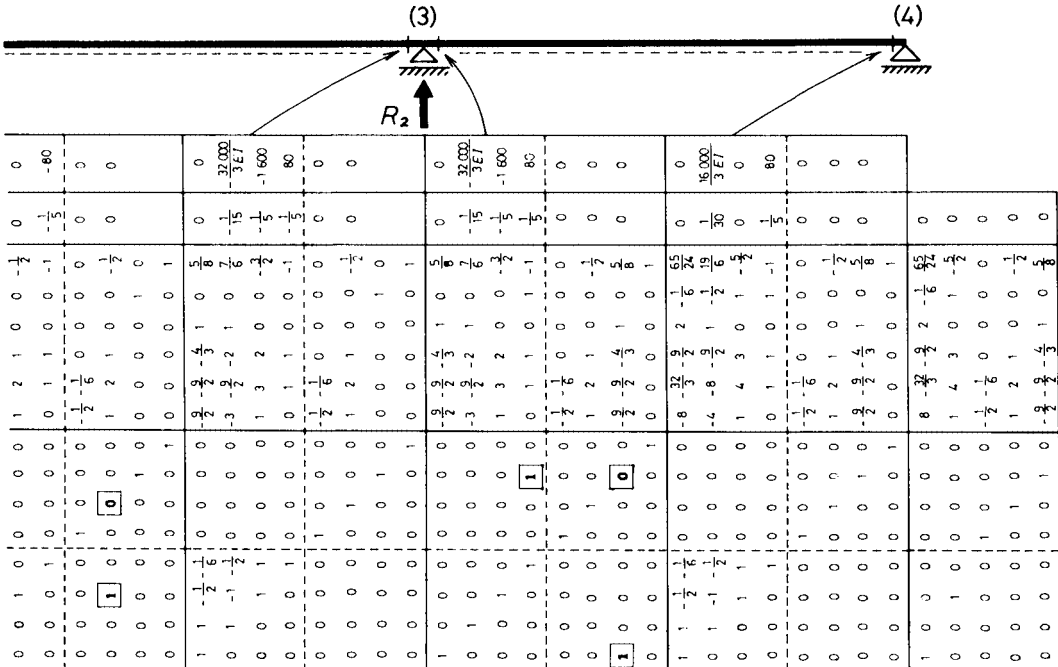
EI が全長にわたって一定な不静定はり (図-3) を取り上げる。基準定数を次のごとく設定する。

$$P_0 = 400 \text{ kN}, I_0 = I, l_0 = 20 \text{ m}$$

格点番号を図示のごとく (0) から (4) までとると、それに応じて格間の数は 4 つとなる。中間格点 (1) および (3) は支点沈下を許さない支承だから、それぞれ未知反力 R_1 および R_2 がせん断力に対する跳躍量とし

て発生する。中間格点 (2) はヒンジだから、未知折れ角 $\Delta\phi$ がたわみ角に対する跳躍量として発生する。これらの中間未知量決定の条件は、格点 (1) と (3) でたわみが、格点 (2) でモーメントが零となることである。

上記の格間伝達マトリックス (20) を用いると、通常の伝達マトリックス法による演算は図-4 によって行われる。始点 (0) の未知量 M_0 および Q_0 に上記の 3 つの中間未知量を加えたものを無次元化し、拡大初期ベクトルとして定義しておく。そして、始点 (0) の境界条件より始端境界マトリックスが図中に示したごとく与えられる。これに最初の格間伝達マトリックスを掛け、次に格点 (1) の伝達マトリックスを掛ける。このとき、最初の間未知反力 R_1 がせん断力の跳躍量として出現する。同時に、たわみに対する既知条件が付与される。そこで、この格点伝達マトリックスの 5 行、5 列目の対角要素に 0 をいれ、5 列目でせん断力に対応する 4 行目、および 5 行目でたわみに対応する 1 列目にそれぞれ要素 1 を入れる。以下、同様に格間および格点伝達マトリックスを順次掛けて、終端の格点 (4) まで行く。ここで、可動支承の境界条件を意味する終端境界マトリックスを図に示したごとく掛けるならば、未知量に関する連立方程式の係数マトリックスが得られる。これを解けば、結局、未知量ベクトルの全要素は既知量となる。これを図-4 の計算表の頭に据え直して、全格点における無次元化された状態量を求めると、表の右から 2 つ目の列のご



リックス法による処理

とく与えられる。なお、右端の列は、それらを通常の次元に戻した状態量である。

次に、修正伝達マトリックス法による順進演算と逆進演算をそれぞれ図-5 (a) および (b) に示す。始点 (0) の境界条件はたわみおよびたわみ角が零であるから、式 (8-a) を参考にして、始点 (0) の順進伝達係数マトリックスは図-5 (a) の左端のごとく与えられる。これに順次、拡大格間伝達マトリックスおよび拡大格点伝達マトリックスを掛けることによって各位置での順進伝達係数マトリックスが求められる。この例題では、 α, β のノルムが大きくならなかったため、ノルム低下の処置は施していない。これと同じ演算を終点 (4) より逆方向に行ったのが図-5 (b) である。

同一の位置ごとに順進および逆進の伝達係数マトリックスを積み上げて式 (16) のごとく表わし、その前半の

4×4 のマトリックスの逆をとり前から掛けて移行すると、結局、状態量は次のごとく中間未知量で表わせる。

$$\begin{bmatrix} w_{0,R}^* \\ \phi_{0,R}^* \\ M_{0,R}^* \\ Q_{0,R}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 3 & 15 & 95 \\ 32 & 8 & 32 & 128 \\ -117 & -3 & -47 & 415 \\ -128 & 32 & 128 & 512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^* \\ \Delta\phi^* \\ R_2^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_{1,L}^* \\ \phi_{1,L}^* \\ M_{1,L}^* \\ Q_{1,L}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 11 & 133 & 725 \\ -256 & 64 & 768 & 3072 \\ 51 & 21 & 73 & 345 \\ -256 & 64 & 256 & 1024 \\ 33 & 9 & 13 & 35 \\ -128 & 32 & 128 & 512 \\ -117 & -3 & -47 & 415 \\ -128 & 32 & 128 & 512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^* \\ \Delta\phi^* \\ R_2^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

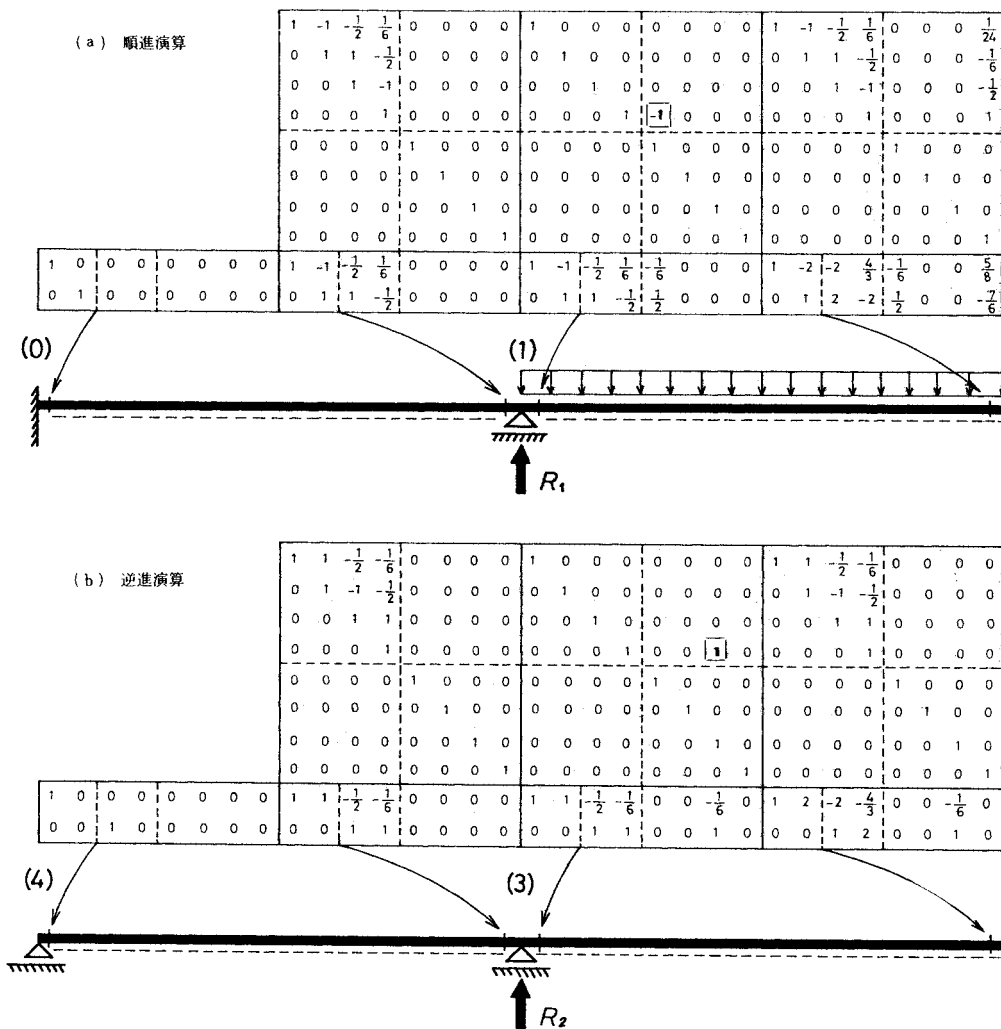


図-5 修正伝達マト

$$\begin{bmatrix} w_{3,R}^* \\ \phi_{3,R}^* \\ M_{3,R}^* \\ Q_{3,R}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{133}{768} & \frac{17}{64} & \frac{117}{256} & \frac{975}{3072} \\ \frac{37}{256} & \frac{19}{64} & \frac{63}{256} & \frac{781}{3072} \\ \frac{11}{128} & \frac{3}{32} & \frac{81}{128} & \frac{97}{512} \\ \frac{11}{128} & \frac{3}{32} & \frac{81}{128} & \frac{97}{512} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^* \\ \Delta\phi^* \\ R_2^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_{4,L}^* \\ \phi_{4,L}^* \\ M_{4,L}^* \\ Q_{4,L}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} & \frac{67}{192} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{128} & \frac{3}{32} & \frac{81}{128} & \frac{97}{512} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^* \\ \Delta\phi^* \\ R_2^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

これらの式において、格点(1)のたわみ、格点(2)の曲げモーメントそして格点(3)のたわみが零である条件

$$\left. \begin{aligned} w_{1,L}^* &= w_{1,R}^* = 0 \\ M_{2,L}^* &= M_{2,R}^* = 0 \\ w_{3,L}^* &= w_{3,R}^* = 0 \end{aligned} \right\}$$

を用いるならば、次の連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \frac{45}{256} & \frac{11}{64} & \frac{133}{768} & \frac{725}{3072} \\ \frac{11}{64} & \frac{3}{16} & \frac{17}{64} & \frac{97}{256} \\ \frac{133}{768} & \frac{17}{64} & \frac{117}{256} & \frac{975}{3072} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^* \\ \Delta\phi^* \\ R_2^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これを解いて、無次元化された中間格点の未知量は、

$$R_1^* = 5/4, \Delta\phi^* = -37/120, R_2^* = 2/5$$

となる。これらの値を再び上記の各点の状態量ベクトルの式に代入すると、すべての無次元化された状態量が求まる。これを式(19)に代入すれば、通常次元に戻された状態量を得る。

以上に求められた値は、当然、通常の伝達マトリックス法で求めた値と一致している。その分布状況を示したのが図-3である。

4. 適用例

(1) 1室および多室断面をもつ連続桁橋

本論文の修正伝達マトリックス法の理論ならびに処理法を用いて、著者の一人は長大なコンクリート1室箱桁橋⁹⁾および多室箱桁橋⁹⁾に偏載活荷重が載る数値計算例を扱い、解を得た。それらの例題はともに4径間連続桁であり、5か所の支承位置のうち、中央のもののみ固定であり、他はすべて軸方向可動である。隔壁は5か所の支承の上部および各径間の中央部に1枚または2枚設けてある(図-6参照)。この境界条件において、橋の重心軸に対する拘束は存在しないので、重心軸の変位に関する状態量は考える必要がない。

断面剛の4つの変形パターンのうち、この重心軸の変

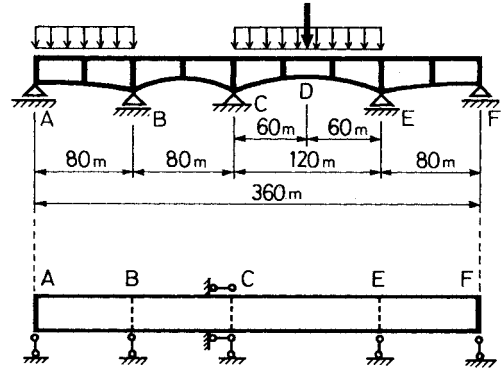


図-6 4径間連続桁の境界条件

位によるものを除去すると、断面剛の変形パターンは3つとなる。これに断面を構成する室の数だけ断面変形パターンが加わるから、 k 室箱桁橋における変形パターンの総数は $(k+3)$ となる。ゆえに、 α, β はともに $2(k+3)$ 次の正方マトリックスとなる。

中間隔壁のみ存在する格点では、断面変形の数 k だけの「未知断面変形せん断力」が発生する。可動支承のある格点では、さらに3つの断面剛におけるせん断力が加わるので、合計 $(k+3)$ 個の未知跳躍量が発生する。固定支承のある格点では、 $(k+1)$ 枚あるウェブの下側にすべて固定支承が存在するならば、 $(k+1)$ 個の橋軸方向水平反力が発生する。ゆえに、この格点の未知量の数は $(2k+4)$ 個となる。結局、図-6の例題において、発生する中間未知量の総数 m は次のごとくなる。

$$m = 5k + 2(k+3) + (2k+4) = 9k + 10$$

これらを発生する順に縦に並べると、未知跳躍量ベクトルとなり、その次数は式(1)より $(9k+11)$ となる。これから、 γ は $2(k+3) \times (9k+11)$ 次の正方でないマトリックスとなる。

本理論を用いて解析した結果は、上記文献中に図示したので、ここでは省略する。

(2) 連続格子桁

図-7に示すねじり剛性のない5径間連続格子桁の中間主桁上の位置①における曲げモーメントおよびせん断力の影響面を数値計算で求めた。この構造系を通常の伝達マトリックス法で解くことを試みたところ、予期したごとく、境界未知量に関する連立方程式の係数マトリックスが特異形となり、正しい解は得られなかった。ゆえ

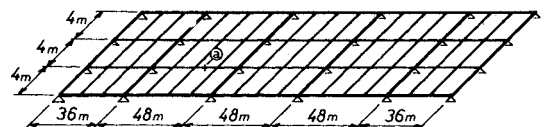


図-7 5径間連続格子桁

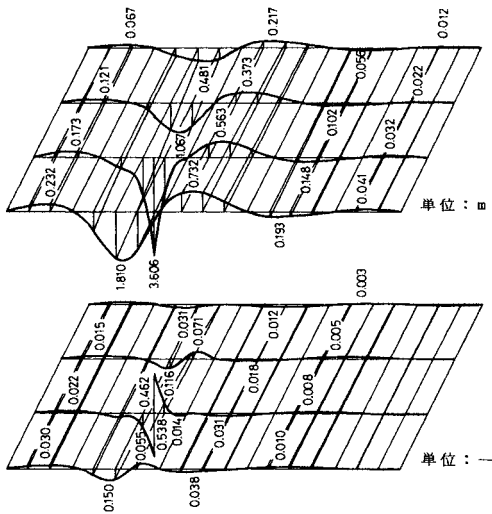


図-8 曲げモーメントおよびせん断力の影響面

に、本文で述べた修正伝達マトリックス法を適用した。

横桁は、すべて 12 m 間隔で配置されているとし、数値計算に用いた諸量を以下に列記する。

ヤング率： $E=2.1 \times 10^7 \text{ tf/m}^2 (205.8 \text{ GPa})$

端主桁の断面二次モーメント： $I_a=0.10 \text{ m}^4$

中間主桁の断面二次モーメント： $I_i=0.08 \text{ m}^4$

横桁の断面二次モーメント： $I_b=0.04 \text{ m}^4$

両端部の支承を除くと中間に 16 個の支承が存在する。それぞれに鉛直方向の未知反力が存在するから、中間未知量の総数は 16 個となる。本例題では、隣接する横桁にはさまれる主桁長さを 4 等分して 1 格間とした。これより、1 格間長は 3 m となるから、格間数は全部で 72 である。求められた結果を図-8 に示す。

5. あとがき

通常の伝達マトリックス法および修正伝達マトリックス法による中間格点の未知跳躍量の効率的処理法を述べ、不静定はり、箱桁橋、連続格子桁橋の数値計算例を示した。

効率的処理を実現するための基本的考え方は、中間格点で発生する跳躍量をあらかじめ未知量として保存しておくことである。これによって、従来行われていた格点未知量の一時的置換えの技巧¹⁰⁾を避けることができる。曲げを受けるはりのごとき簡単な問題では、本処理法も一時置換法も解析上の大きな差はない。しかし、中間未知量が構造系の要所要所で多量かつ煩雑に出現するような場合、本処理法の優位性は明らかである。

逆に、本処理法を一時置換法と比較した場合の欠点は、用いるマトリックスの寸法が相対的に大きいため、プログラム中の記憶容量が増大し、必然的に演算時間が長く

なることである。それは、中間の格点で発生する跳躍量をあらかじめ未知量として保存しておくことに起因する。具体的には、拡大された格間および格点伝達マトリックスおよび伝達係数マトリックスの内部がほとんど 0 および 1 よりなる要素に占領されることに起因する。しかし、プログラムに工夫を加えることにより、拡大された格間および格点伝達マトリックス中の“冗漫な”要素 0 および 1 は記憶せずに処理することが可能である。事実、本文中の数値計算例では、そのように工夫した結果、伝達マトリックスの記憶領域は拡大せずに通常の寸法のみまで済ませている。

構造力学における伝達マトリックス法の存在意義を考えるならば、数値的に悪条件を生じやすい方程式に対しても、任意の境界条件、荷重条件のもとに、厳密解が求められることはきわめて重要である。本論文は、構造系の中点における（境界）支持条件から生じる伝達マトリックス法の難点を取り除く一方法を提示したものと位置づけられるであろう。

なお、本論文における数値計算例には、東京理科大学情報処理センターの計算機システム IBM 4381 を用いたことを付記する。

参考文献

- 1) Uhrig, R. : Elastostatik und Elastokinetik in Matrizen-Schreibweise, Springer-Verlag, 1973.
- 2) Hees, G. : Anwendung des Übertragungsverfahrens bei stark abklingenden Lösungsfunktionen, Ingenieur-Archiv, Vol. 49, pp. 1-6, 1979.
- 3) 遠田良喜・右田泰弘：マトリックス混合法による長スパン連続格子桁の解析，橋梁と基礎，Vol. 17, No. 5, pp. 33-38, 1983.
- 4) 中村秀治：数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案，土木学会論文報告集，No. 289, pp. 43-53, 1979年9月。
- 5) 成岡昌夫・遠田良喜：伝達マトリックス法，コンピューターによる構造工学講座 I-2-B, 培風館，1970年。
- 6) Falk, S. : Ein übersichtliches Schema für die Matrizenmultiplikation, ZAMM, Vol. 31, pp. 152, 1951.
- 7) Zurmühl, R. : Matrizen und ihre technischen Anwendungen, Springer-Verlag, 1964.
- 8) ツルミュール, R. : マトリックスの理論と応用, プレイン図書出版株式会社, 1972年。
- 9) 臼木恒雄：コンクリート 1 室箱桁の弾性解析法，橋梁と基礎，Vol. 18, No. 7, pp. 37-43, 1984.
- 10) 臼木恒雄：断面変形を考慮した変断面直線多室箱桁橋の一解析法，土木学会論文報告集，No. 368, pp. 265-274, 1986年4月。
- 11) Pestel, E. and Leckie, F. : Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, 1963.
- 12) ベステル, E・レッキー, F. : マトリックス弾性力学, プレイン図書出版株式会社, 1978年。

(1985. 12. 10・受付)